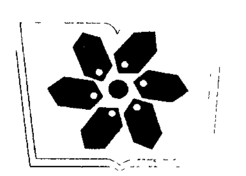
第二卷　第二分册

数学名著译丛

微积分和数学分析引论

R.柯朗　F.约翰　著

科学出版社



中国科学院科学出版基金资助出版

数学名著译丛

微积分和数学分析引论

第二卷　第二分册

R. 柯朗　F. 约翰　著

张恭庆　廖可人　邓东皋　吴兰成　译
叶其孝　林源渠　刘西坦　张南岳
叶其孝　丁同仁　校

科学出版社

2001

图字: 01-98-2682

内 容 简 介

本书系统地阐述了微积分学的基本理论。在叙述上，作者尽量作到既严谨而又通俗易懂，并指出概念之间的内在联系和直观背景。原书分两卷，第一卷为单变量情形，第二卷为多变量情形。

第二卷中译本分为两册出版。本书是第二卷第二分册，包括第四、五、六、七、八章。第四章介绍多重积分；第五章讲述曲面积分和体积分之间的关系；第六章介绍微分方程；第七章介绍变分学；第八章介绍单复变函数。各章节都有例题、习题和解答并备以附录介绍相关的内容。

读者对象为高等院校理工科师生和工程技术人员。

图书在版编目 (CIP) 数据
微积分和数学分析引论. 第二卷，第二分册 / 【美】 R. 柯朗，【美】 F. 约翰著；张恭庆等译. —— 北京：科学出版社， 2001.3
书名原名： Introduction to Calculus and Analysis, Volume 2
ISBN 7-03-008540-X

I. 微… II. ①柯…②约…③张… III. ①微积分②数学分析 IV. O17

中国版本图书馆数据核字 (2000) 第 60215 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
北京双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2001 年 3 月第 一 版 开本： 850 × 1168 1/32
2001 年 3 月第一次印刷 印张： 17 1/2
印数： 1-3 000 字数： 461 000

定价： 35.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

目　录

第四章 多 重 积 分

多元函数微分和导数的运算可以直接化为一元函数的类似微分和导数的运算，这时积分及其与微分的关系就比较复杂了，因为可以用许多种方法来推广多元函数的积分概念. 例如对于三元函数 $f(x,y,z)$ ，我们不但要考虑在空间区域上的重积分，也要考虑曲面积分、曲线积分. 不过多元函数积分的一切问题还是和一元函数的积分的原始概念有联系的.

为简单起见，我们主要在平面上进行讨论 (即两个自变量). 因而，只需改变一下术语 (用“体积”代替“面积”，用“立方体”代替“正方形”等等)，所有的论断对于高维情形同样适用.

4.1 平面上的面积

a. 面积的若尔当测度的定义

在第一卷里，我们把 x,y 平面上的一个区域的面积用一元函数的积分来表示. 其基本思想 (它把我们首先引向积分概念) 是用由有限个矩形组成的较简单的区域来逼近所求的区域. 为了便于使面积直接转向三维或高维体积作更为系统的发展，就要求给出一个直接的定义，这个定义并不束缚在一元函数的积分概念上，而应更密切地与一个区域的面积的直观概念相适应，那就是把区域的面积看成包含在这区域内的单位正方形的个数. 同时，这个新的更加自然的定义是比较一般的，它避免了所有关于边界正则性的非本质的讨论，但当我们试图把面积化为一重积分的时候，这种讨论却是不

可避免的. 和通常一样, 我们把严格的存在性证明留到本章附录里去. 那些证明无非是把读者从正文里表达的思想和目的性的非正式讨论中多少已经明白了的东西系统地表达出来罢了.

定义面积时, 我们接受直观, 认为一个集合 S 的面积 $A(S)$ 应当是和 S 有关的一个非负数, 具有下列性质:

1. 若 S 是一个边长为 k 的正方形, 则 $A = k^2$.

2. 可加性: 整体的面积是它的各部分的面积之和. 更确切些, 若 S 由互不重叠的集合 $S_1, \cdots, S_N$ 组成, 分别有面积 $A(S_1)$, $\cdots$, $A(S_N)$, 则 S 的面积是

$$A(S) = A(S_1) + \cdots + A(S_N).$$

基于这些简单要求, 我们将能对实践中遇到的大多数的二维集合 S 指定一个值 $A(S)$, 虽然不能对平面上一切可以想像的集合都这样做.

对于一个有界集 S, 为了得到一个唯一确定的值 $A(S)$, 我们用一种非常特定的方法把平面划分为正方形; 后面将证明, 每一种把平面划分为正方形 (或矩形) 的其它办法都将导致相同的面积. 并合的正方形提供覆盖平面的最便利的方式, 使之不留空隙也不重叠. 我们使用附着于我们的坐标系的由直线 $x = 0, \pm1, \cdots$ 和 $y = 0, \pm1, \cdots$ 给出的网格. 这些直线把全平面划分为边长为 1 的闭正方形. 我们用 $A_0^+(S)$ 表示与 S 有公共点的正方形的个数, 并用 $A_0^-(S)$ 表示完全包含在 S 内的那些正方形的个数. 然后, 再把每个正方形分为四个边长为 $\frac{1}{2}$、面积为 $\frac{1}{4}$ 的正方形, 记 $A_1^+(S)$ 为那些有 S 中点的子正方形的个数的四分之一, 而记 $A_1^-(S)$ 为那些完全包含在 S 内的子正方形的个数的四分之一. 因为每个完全包含在 S 内的单位正方形导致四个完全包含在 S 内的子正方形, 所以有 $A_0^-(S) \leq A_1^-(S)$, 同样也有 $A_0^+(S) \geq A_1^+(S)$. 以下我们进一步再把每个边长为 $\frac{1}{2}$ 的正方形分为四个边长为 $\frac{1}{4}$ 的正方形. 那些与 S 有公共点的正方形的十六分之一和那些包含在 S 内的正方形的十六分之一分别用 $A_2^+(S)$

与 $A_2^-(S)$ 表示. 按此方式进行下去, 把值 $A_n^+(S)$ 与 $A_n^-(S)$ 和平面划分为边长为 2^{-n} 的正方形的分划联系起来 (参看图 4.1).

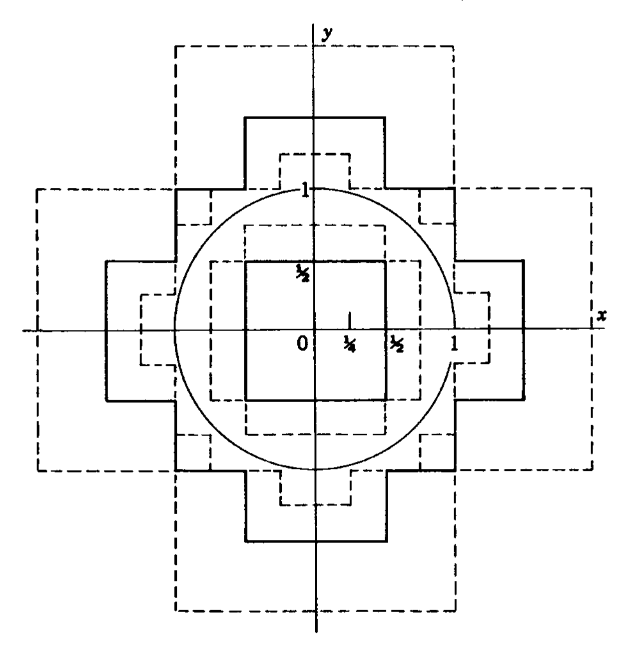


图 4.1 当 $n=0,1,2$ 时单位圆盘 $x^2+y^2\leq 1$ 面积的内、外逼近
这里 $A_0^-=0, A_1^-=1, A_2^-=2, A_2^+=4\frac{1}{4}, A_1^+=6, A_0^+=12$

显然, 值 $A_n^+(S)$ 构成一个单调减少的有界序列, 它收敛到一个值 $A^+(S)$, 同时 $A_n^-(S)$ 单调增加并收敛到一值 $A^-(S)$. 值 $A^-(S)$ 代表**内面积** (inner area), 它是用包含在 S 内的并合正方形从下方逼近 S 的面积时所能达到的最接近的值; **外面积** (outer area)$A^+(S)$ 代表用并合正方形覆盖 S 所能得到的最大下界. 如果这两个值相等, 我们就说 S 是**若尔当可测的**, 并把这个公共值 $A^-(S)=A^+(S)$ 称为 S 的**容量** (content), 或 S 的若尔当测度. 我们将用较为简单的说法, 把 S 的容量说成面积 $A(S)$, 而用 "S 有面积" 代替比较笨拙的话 "S 是若尔当可测的", 以表示 $A^-(S)=A^+(S)$ 这一事实 (对于实践中出现的几乎所有的集合, 这都是对的).

设 $A_n^+(S)-A_n^-(S)$ 代表在第 n 次子分划中那些与 S 有公共点的而又不完全位于 S 内的正方形的总面积. 所有这些正方形都包含 S 的边界点, 所以

$$A_n^+(S)-A_n^-(S)\leq A_n^+(\partial S),$$

其中 ∂S 是 S 的边界. 如果 S 的边界面积为 0, 我们求得

$$\begin{aligned}A^+(S)-A^-(S)&=\lim_{n\to\infty}[A_n^+(S)-A_n^-(S)]\\&=\lim_{n\to\infty}A_n^+(\partial S)=0,\end{aligned}$$

即, S 是有面积的. **因此, 如果 S 的边界 ∂S 面积为 0, S 就是有面积的** (这个条件也是必要的; 参看第 656 页).

为了验证一个给定的集合 S 有面积, 或是 ∂S 的面积为 0, 我们就应当去证明: 当 n 充分大时, 在第 n 次子分划中与 ∂S 有公共点的正方形的总面积任意小. 实际上, 为了作这个分析并不一定要用边长为 2^{-n} 的正方形. **如果对任意的 $\varepsilon>0$, 我们能够找到有限个集合 $S_1,\cdots,S_N$, 它们覆盖了 S 的边界 ∂S, 其总面积 $<\varepsilon$, 那么集合 S 就一定有面积**. 于是, 对任意 n, 显然有

$$A_n^+(\partial S)\leq A_n^+(S_1)+\cdots+A_n^+(S_N),$$

因为任意一个与 ∂S 有公共点的正方形至少与 $S_1,\cdots,S_N$ 中的一个有公共点. 当 $n\to\infty$, 右端趋于 S_i 的面积之和, 而它是小于 ε 的; 因此 $A^+(\partial S)\leq\varepsilon$; 又因为 ε 是一个任意正数, 所以 $A^+(\partial S)=0$.

为了确立在分析中遇到的大多数普通的区域是否有面积, 这个判别法够用了. 特别是只要知道 S 的边界是由有穷个弧组成的就够了, 其中每个弧有一个连续的非参数表示 $y=f(x)$ 或 $x=g(y)$, 而 f 或 g 分别是在一个有穷闭区间上的连续函数. 用有界闭区间上的连续函数的一致连续性能直接使我们证明这些弧可以用有穷个, 其总面积为任意小的矩形来覆盖 [1].

1) 作为练习, 请读者证明其边平行于坐标轴的矩形是有面积的 (按这里的定义), 并且其面积等于两个相邻边的乘积.

b. 一个没有面积的集合

在单位正方形内的"有理"点集，即其坐标 x, y 都是 0 与 1 之间的有理数的点集，是在我们意义下的一个没有面积的或是若尔当不可测的集合的例子. 从有理数和无理数的稠密性质，显然可见，对一切 n

$$A_n^+ = 1, A_n^- = 0,$$

所以 S 的外面积为 1 而内面积为 0. 这与 S 的边界 ∂S 由整个闭单位正方形组成，其面积为 1 这一事实是一致的. 如果我们以任意方式用有穷个闭集 $S_1, \cdots, S_N$，其面积为 $A(S_1), \cdots, A(S_N)$，覆盖 S，那么

$$A(S_1) + \cdots + A(S_N) \geq 1,$$

因为 S_i 还必须覆盖 S 的边界 ∂S(参看练习题 6). 然而，似非而是地，竟然可以用其总面积任意小的无穷个闭集 S_i 覆盖住 S. 我们只须用到有理数对 (x, y) 构成一个可列集这个事实 (见第一卷)[1]. 因此 S 的点能够排成一个无穷序列 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \cdots$. 设 ε 是一个任意正数. 对每个整数 $m > 0$，用 S_m 表示面积为 $\varepsilon 2^{-m}$ 中心在 (x_m, y_m) 的正方形. 则 S_m 覆盖了整个集合 S，而它们的总面积是

$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{16} + \cdots = \varepsilon.$$

于是，用**无穷多个不相等的正方形**作覆盖能够导致本质上低于上界 $A^+(S)$ 的 S 的"面积". 这个"面积"更接近于反映出有理点在实数点中的"稀疏性". 在由勒贝格创始的度量集合的精细理论中，

---

1) 例如我们能够按照两个分母中较大的一个作为尺度把它们分组排起来; 每组只有有穷个元素:

$$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}), (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}),$$

$$(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{1}{2}), (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}), (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}), (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}), \cdots.$$

出发点之一就是把一个集合的外面积定义为覆盖它的任意有穷个或无穷个正方形面积之和的最大下界. 对于我们的这个集合 S, 其勒贝格外面积为 0, S 的内面积也是 0. 碰巧, 对于一个有界闭集 S 来说, 两种外面积的定义是一致的, 因为由海涅 - 波瑞尔定理 (参看第 118 页), S 的任意无穷覆盖已经包含了一个有穷覆盖.

c. 面积的运算法则

在我们感兴趣的大多数情况下, 我们能够通过检验 S 是由有穷个有连续的非参数表示的弧围成的集合, 来证明它的面积的存在性. 由此, 可能会诱使人们不去考虑那些边界更为复杂的区域. 然而, 其结果, 这种限制不但失去一般性, 而且实际上反而把事情复杂化了, 因为必须查明这种区域作集合的并与交运算以后还有简单的边界. 我们把面积看成是容量的一般性定义的好处就在于它是建立在数正方形个数的原始概念的基础上的, 对于边界除了要求它可以被有穷个总面积任意小的正方形所覆盖而外, 没有假设任何东西. 一个若当可测集的边界在细节上可以是非常复杂的, 甚至可以是由无穷多个闭曲线组成的. 只要能够证明由边界产生的总贡献是可以忽略的, 那么这种复杂性并不影响到积分理论.

为了研究面积, 把一个集合分成几个子集以及把几个集合合并成为一个较大的集合, 这些运算是基本的. 重要之点在于运用这些运算时我们必须保留在有面积的集合类里面. 我们有这样的基本定理: **两个若尔当可测集 S 和 T 的并 $S\cup T$ 与交 $S\cap T$ 都还是若尔当可测的**[1]. 这是直接由下述事实推出的: $S\cup T$ 和 $S\cap T$ 的边界是由 S 或 T 的边界点组成的, 因此有面积 0(见第 660 页).

对于两个互不重叠的集合 S, T, 即其中一个集合没有内点属于另一个集合或属于它的边界, 有 **面积的可加性法则**

$$A(S\cup T)=A(S)+A(T).$$

1) 提醒读者: 集合之并由属于这集合中的至少一个集合的点组成, 而集合之交由属于一切集合的点组成.

更一般些，对于有穷个若尔当可测集 $S_1, S_2, \cdots, S_N$，两两互不重叠，有关系式

$$A(\bigcup_{i=1}^{N} S_i) = \sum_{i=1}^{N} A(S_i). \tag{1}$$

根据不等式

$$A_n^+(\bigcup_{i=1}^{N} S_i) \leq \sum_{i=1}^{N} A_n^+(S_i),$$

$$A_n^-(\bigcup_{i=1}^{N} S_i) \geq \sum_{i=1}^{N} A_n^-(S_i),$$

(1) 的证明是平凡的. 而其中的第一个不等式是从下面这个事实简单地得到的：任何一个与 $\bigcup_{i=1}^{N} S_i$ 有公共点的正方形必与其中至少一个 S_i 有公共点. 而第二个不等式则由这样的事实得到：任何正方形如果包含在一个集合 S_i 内，就不能包含在任何其它的 S_k 内 (因为这两个是互不重叠的)，但却包含在这些集之并集内. 令 $n \to \infty$，得到

$$A^+(\bigcup_{i=1}^{N} S_i) \leq \sum_{i=1}^{N} A^+(S_i),$$

$$A^-(\bigcup_{i=1}^{N} S_i) \geq \sum_{i=1}^{N} A^-(S_i).$$

由 S_i 有面积的假设，即

$$A^+(S_i) = A^-(S_i) = A(S_i),$$

又因为并集的内面积不能超过其外面积，就推出等式 (1).

现在容易验证，这里定义的 "面积" 在特殊情形下可以用第一卷里考虑的积分表示出来. 例如，设 S 是由区间 $a \leq x \leq b$ 上一个连续正函数 $y = f(x)$ 的图形 "下方" 的点组成的，即满足

$$a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq f(x)$$

的点 (x,y) 的集合. 考虑任何把区间 $[a,b]$ 分划为 N 个长度为 Δx_i 的子区间, 令 m_i 及 M_i 为 $f(x)$ 在第 i 个子区间上的最小值和最大值. 以 Δx_i 为底, m_i 为高的矩形显然是互不重叠的, 并且其并集包含在 S 内, 所以

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \Delta x_i \leq A(S).$$

类似地有

$$A(S) \leq \sum_{i=1}^{N} M_i \Delta x_i.$$

对于连续的 f, 下和与上和都趋于 f 的积分, 于是我们得出关于 S 的面积的经典表达式

$$A(S) = \int_a^b f(x)dx. \tag{2}$$

练　习　4.1

1. 若 S 和 T 都有面积, 并且 S 包含在 T 内, 求证: $A(S) \leq A(T)$.

2. 在练习 1 的假设下, 证明 $T - S$ 有面积, 其中 $T - S$ 是 T 中那些不含于 S 内的点的集合.

3. 若 S 与 T 是有界的, 求证

(a) $A^+(S \cup T) + A^+(S \cap T) \leq A^+(S) + A^+(T)$,

(b) $A^-(S \cup T) + A^-(S \cap T) \geq A^-(S) + A^-(T)$.

4. 设 S 与 T 是任何互不相交其并集有面积的集合, 求证

$$A^+(S) + A^-(T) = A(S \cup T).$$

5.(a) 若一集合 S 在一个坐标系下有面积, 求证它在任何一个通过转动和平移得到的坐标系下还有面积.

(b) 证明 S 在所有这些坐标系下的面积相同.

6. 设 S 被有穷个闭集族 $S_1, \cdots, S_N$ 所覆盖，求证这一族集合还覆盖了 S 的边界 ∂S.

7. 设 p 与 q 是自然数. 由 $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$ 构成的点集 S 有面积吗？

4.2 二 重 积 分

a. 作为体积的二重积分

上一节关于面积所说的每一件事在三维或高维情形都可以直接搬到体积上去. 在定义 x, y, z 空间中的一个有界集 S 的体积时，只须把空间分划成边长为 2^{-n} 的 **立方体**. 如果集合 S 的边界可以被有穷个这种立方体所覆盖，而其总体积又可以任意小，那么集合 S 就 **有一个体积**. 对于一切有界集，其边界是由有穷个曲面组成的，每个这种曲面又在平面闭集上有一个连续的非参数表示 $z = f(x, y)$，或 $y = g(x, z)$ 或 $x = h(x, y)$，这种有界集就是有体积的集合.

为把体积分析地表达出来的这种企图直接导致多重积分的概念，它有着大量的应用.

设 R 是 x, y 平面上的一个若尔当可测的闭有界集，它是正值函数 $z = f(x, y)$ 的定义域. 我们希望求出在曲面 $z = f(x, y)$“下方”的体积，即满足

$$(x, y) \in R, \quad 0 \leq z \leq f(x, y)$$

的点 (x, y, z) 的集合 S 的体积 $V(S)$. 为此，把 R 分划为互不重叠的闭若当可测集 $R_1, \cdots, R_N$. 设 m_i 和 M_i 是 f 在 R_i 上的最小值和最大值. 容易看出以 R_i 为底，以 m_i 为高的柱体有体积 $m_i A(R_i)$，其中 $A(R_i)$ 是 R_i 的面积 (图 4.2)[1)]. 这些柱体互不重叠. 类似地，以 R_i 为底，以 M_i 为高的柱体有体积 $M_i A(R_i)$，也互不重叠. 由此

1) 当把空间分成边长为 2^{-n} 的立方体时，那些与这柱体有公共点的立方体可以排成柱状“列”，其截面是与 R_i 有公共点的正方形，其高度与 m_i 之差小于 2^{-n}.

得出

$$\sum_{i=1}^{N} m_i A(R_i) \leq V(S) \leq \sum_{i=1}^{N} M_i A(R_i), \tag{3a}$$

在这不等式中出现的和式，我们分别称之为**下和**或**上和**.

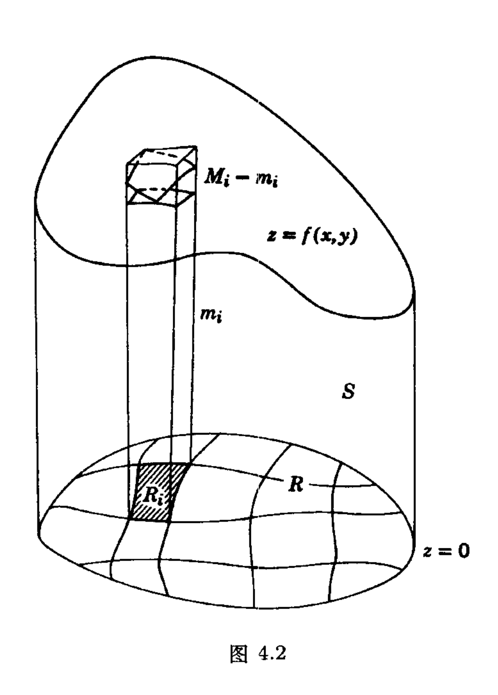


图 4.2

现在我们把分划愈分愈细，以致在分划中出现的任何 R_i 的最大直径趋于 0[1]. 连续函数 $f(x,y)$ 在紧集 R 上是**一致连续的**，所以最大差 $M_i - m_i$ 随这分划中集合 R_i 的最大直径趋于零而趋于零.

---

1) 一个闭集的"直径"是这集合中任意两点的最大距离.

因为

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N} M_i A(R_i) - \sum_{i=1}^{N} m_i A(R_i) \\
&= \sum_{i=1}^{N} (M_i - m_i) A(R_i) \\
&\leq [\operatorname*{Max}_i (M_i - m_i)] \sum_{k=1}^{N} A(R_k) \\
&= [\operatorname*{Max}_i (M_i - m_i)] A(R),
\end{aligned}$$

所以上和与下和的差也趋于零. 由 (3a) 得出, 当无限加细我们的分划时, 上和与下和都收敛到极限 $V(S)$. 显然, 如果在和式中用 m_i 与 M_i 之间的任意数, 例如这函数在集合 R_i 上一点 (x_i, y_i) 的值 $f(x_i, y_i)$, 来代替 m_i 或 M_i, 那么还是得到同样的极限值. 我们将把这极限 $V(S)$ 称为 f 在集合 R 上的二重积分, 并记作

$$V(S) = \iint_R f(x, y) dR. \tag{3b}$$

b. 积分的一般分析概念

从几何学角度提供的把二重积分看成体积的概念现在必须从分析上加以研究, 抛弃其直观并加以精确化. 考虑一个闭的有界若尔当可测集 R, 它的面积为 $A(R) = \Delta R$, 考虑一个在 R 上 (包括边界) 处处连续的函数 $f(x, y)$ 和前面一样, 把 R 分成 N 个互不重叠的若尔当可测子集 $R_1, R_2, \cdots, R_N$, 各有面积 $\Delta R_1, \cdots, \Delta R_N$. 在 R_i 上, 任选一点 (ξ_i, η_i), 其函数值为 $f_i = f(\xi_i, \eta_i)$, 并作和式

$$V_N = \sum_{i=1}^{N} f_i \Delta R_i = \sum_{i=1}^{N} f_i A(R_i),$$

基本存在定理就是:

如果数 N 无限增大, 同时子区域的最大直径趋于零, 则 V_N 趋于一极限 V, 这个极限与区域 R 的分划的特殊性质无关, 也与在

R_i 中点 (ξ_i, η_i) 的选取无关. 我们把这极限 V 称为函数 $f(x,y)$ 在区域 R 上的 (二重) 积分, 并记作

$$\iint_R f(x,y)dR$$ [1].

推论. 如果和式只在那些整个位于 R 内部的子区域上取, 即那些与 R 的边界没有公共点的子区域上取, 那么将得到同一个极限 [2].

对于连续函数的积分存在性定理必须纯分析地证明. 但是这个证明和一元函数相应的证明非常相似, 它将在本章附录中给出 (第 665 页).

现在我们通过某种特殊的分划来阐明积分的概念. 最简单的情形是 R 为矩形 $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$, 而子区域 R_i 也是矩形 (由把 x 区间 n 等分, 把 y 区间 m 等分构成), 其边长为

$$h = \frac{b-a}{n} \text{ 及 } k = \frac{d-c}{m}.$$

分划的点记作 $x_0 = a, x_1, x_2, \cdots, x_n = b$ 以及 $y_0 = c, y_1, y_2, \cdots, y_m = d$. 它们分别对应于 y 轴和 x 轴的平行线. 于是 $N = nm$. 子区域是面积为 $A(R_i) = \Delta R_i = hk = \Delta x \Delta y$ 的所有矩形, 其中

1) 我们可以进一步改进这个定理使之适用于多种目的. 在分划为 N 个子区域的分划中, 并不一定要取其值为函数 $f(x,y)$ 在对应的子区域中一定点 (ξ_i, η_i) 的值; 只要取其值能与 $f(\xi_i, \eta_i)$ 之差随分划加细而一致地趋于零就够了. 换句话说, 代替函数值 $f(\xi_i, \eta_i)$, 我们可以考虑量

$$f_i = f(\xi_i, \eta_i) + \varepsilon_{i,N},$$

其中 $|\varepsilon_{i,N}| \leq \varepsilon_N$, $\lim_{N \to \infty} \varepsilon_N = 0$. 这个定理几乎是不足道的, 因为数 $\varepsilon_{i,N}$ 一致地趋于零. 两个和式

$$\sum_{i=1}^{N} f_i \Delta R_i \text{ 与 } \sum_{i=1}^{N} (f_i + \varepsilon_{i,N}) \Delta R_i$$

之差的绝对值小于 $\varepsilon_N \Sigma \Delta R_i$, 如果让数 N 充分大, 可以使之任意小. 例如, 若 $f(x,y) = P(x,y)Q(x,y)$ 可以取 $f_i = P_i Q_i$, 其中 P_i 与 Q_i 是 P 与 Q 在 R_i 上的极大值. 一般来说这两个极大值不一定在同一点上达到.

2) 根据下列事实, 不仅 R 的边界 ∂R, 而且一切与 ∂R 充分靠近的点的集合, 都能被总面积任意小的正方形所覆盖. 由此得到推论.

$h = \Delta x, k = \Delta y$. 在对应的矩形 R_i 中任意取一点 (ξ_i, η_i), 对分划中的一切矩形作和

$$\sum_i f(\xi_i, \eta_i) \Delta x \Delta y.$$

如果同时让 n 与 m 无限增长, 这个和趋于函数 f 在矩形 R 上的积分.

这些矩形还可以用两个下标 μ 与 ν 来刻划. μ 和 ν 分别对应着所论矩形的左下角的坐标 $x = a + \nu h, y = c + \mu k$, 其中 ν 取从 0 到 $(n-1)$ 的整数值, 而 μ 取从 0 到 $(m-1)$ 的整数值. 通过用下标 μ 和 ν 来标明这些矩形, 我们便可以适当地把这个和式写成双重和 1)

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{m-1} f(\xi_\nu, \eta_\mu) \Delta x \Delta y. \tag{3c}$$

即使 R 不是一个矩形, 把这区域分划为矩形子区域 R_i 也常常是方便的. 为此, 在这平面上添加由直线

$$x = \nu h \ (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

$$y = \mu k \ (\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

构成的矩形网, 其中 h 与 k 是任意选定的数. 现在我们来考虑所有那些整个含于 R 中的分划后的矩形. 这些矩形记作 R_i. 当然, 它们不一定完全填满这个区域; 相反, 除了这些矩形之外, R 还包含一些与边界毗邻的区域 R_i, 它们一部分是由网线围成的, 另一部分是由 R 的部分边界围成的. 根据第 508 页上的推论, 函数 f 在区域 R 上的积分可以通过只对内部矩形上的求和, 然后取极限得到.

另一种经常用到的分划类型是用极坐标网作分划 (图 4.3). 把整个 2π 角分为 n 份; $\Delta\theta = 2\pi/n = h$, 再选取第二个量 $k = \Delta r$.

---

1) 如以这种方式写这个和, 则我们必须假定, 所选择的点 (ξ_i, η_i) 位于垂直或水平的那些直线上.

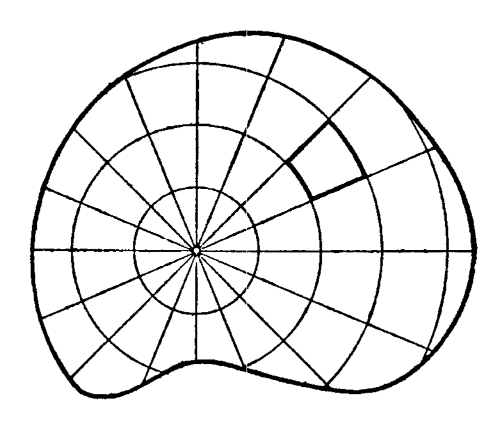


图 4.3　用极坐标网作分划

通过原点作直线 $\theta = \nu h(\nu = 0, 1, 2, \cdots, (n-1))$ 并作同心圆 $r_\mu = \mu k(\mu = 1, 2, \cdots)$. 整个在 R 内部的那些小区域，记作 R_i, 而其面积记作 ΔR_i. 于是我们能把函数 $f(x, y)$ 在区域 R 上的积分看成是和

$$\sum f(\xi_i, \eta_i)\Delta R_i$$

的极限，其中 (ξ_i, η_i) 是 R_i 内任选的一点. 和式取遍在 R 内的一切子区域 R_i, 而向极限的过渡在于让 h 与 k 同时趋于零.

根据初等几何学，面积 ΔR_i 由等式

$$\Delta R_i = \frac{1}{2}(r_{\mu+1}^2 - r_\mu^2)h = \frac{1}{2}(2\mu + 1)k^2 h$$

给出，这里假定 R_i 位于由半径为 μk 及 $(\mu+1)k$ 的圆围成的环内.

c. 例

最简单的例子是函数 $f(x, y) = 1$. 在此，和的极限显然与分划的方式无关，并且总是等于区域 R 的面积. 从而，函数 $f(x, y) = 1$ 在这区域上的积分也就等于这区域的面积. 不出所料，因为这个积分正是以区域 R 为底高度为 1 的柱体的体积.

再举一个例子，考虑函数 $f(x, y) = x$ 在正方形 $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$ 上的积分. 把积分看成是体积的直观解释表明，我们的积分

值必是 $\frac{1}{2}$. 我们可以用积分的分析定义来验证这点. 把这正方形分划成边长为 $h=\frac{1}{n}$ 的正方形, 并对每个小正方形取点 (ξ_i,η_i) 为其左下角. 于是在其左边坐标为 νh 的纵列中的每个正方形对总和的贡献是 νh^3. 这个表达式出现 n 次. 因此, 整列正方形的贡献是 $n\nu h^3=\nu h^2$. 现在, 从 $\nu=0$ 到 $\nu=n-1$ 作和, 得到

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\nu h^2=\frac{n(n-1)}{2}h^2=\frac{1}{2}-\frac{h}{2}.$$

正如所料, 当 $h\to 0$ 时, 这个式子的极限是 $\frac{1}{2}$.

用类似的办法, 只要积分区域是各边平行于坐标轴的矩形, 例如说 $a\leq x\leq b, c\leq y\leq d$, 我们能够积出乘积函数 xy 的积分; 或者, 更一般些, 我们能积出作为 x 的一个函数与 y 的一个函数相乘得到的形如 $f(x,y)=\varphi(x)\psi(y)$ 的任意函数 $f(x,y)$ 的积分, 采用 (3c) 中的同一矩形分划. 在每个子矩形中取函数值为其左下角点处的函数值. 于是积分为和式

$$hk\sum_{\nu=0}^{n-1}\sum_{\mu=0}^{m-1}\phi(\nu h)\psi(\mu k)$$

的极限. 它可以写成两个和式的乘积

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}h\phi(\nu h)\sum_{\mu=0}^{m-1}k\phi(\mu k).$$

从普通积分的定义看出, 当 $h\to 0$ 及 $k\to 0$ 时, 这些因子分别趋于对应的函数从 a 到 b 以及从 c 到 d 的积分. 于是得到一般的法则: 若 $f(x,y)$ 可以表成两个函数 $\phi(x)$ 及 $\psi(y)$ 的乘积, 则它在矩形 $a\leq x\leq b, c\leq y\leq d$ 上的积分就可以分解成两个积分的乘积:

$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy=\int_a^b\phi(x)dx\cdot\int_c^d\psi(y)dy.$$

这个法则与求和法则 (参看 (4b), 第 514 页) 结合起来就给出在其边平行于坐标轴的矩形上任意多项式的积分.

最后一个例子, 我们来考虑一种用极坐标作分划较之矩形分划更为便利的情形. 设 R 是由 $x^2+y^2\leq 1$ 给出的, 中心在原点的单位圆, 又设

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}.$$

f 在 R 上的积分无非是一个半径为 1 的半球的体积.

像前面那样构作极坐标网. 在以 $r_\mu=\mu k$ 与 $r_{\mu+1}=(\mu+1)k$ 为半径的圆以及直线 $\theta=\nu h$ 与 $\theta=(\nu+1)h$ 之间的子区域作出的贡献是:

$$\frac{1}{2}\sqrt{1-\left(\frac{r_{\mu+1}+r_\mu}{2}\right)^2}(r_{\mu+1}^2-r_\mu^2)h=\sqrt{1-\rho_\mu^2}\rho_\mu kh,$$

其中 $h=2\pi/n$, 我们把在以 $\rho_\mu=(r_{\mu+1}+r_\mu)/2$ 为半径的一个中间圆上的函数值取作在子区域 R_i 上的函数值. 在同一个环内的所有子区域给出同样的贡献, 又因为有 $n=2\pi/h$ 个这样的区域, 所以整个环的贡献是

$$2\pi\sqrt{1-\rho_\mu^2}\rho_\mu k.$$

于是和

$$\sum_{\mu=0}^{m-1}2\pi\sqrt{1-\rho_\mu^2}\rho_\mu k$$

的极限就是积分.

我们已经知道, 这个和趋于单重积分

$$2\pi\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}dr=-\frac{2\pi}{3}\sqrt{(1-r^2)^3}\Big|_0^1=\frac{2\pi}{3}.$$

所以得到

$$\iint\limits_R\sqrt{1-x^2-y^2}dR=\frac{2\pi}{3},$$

这与球体积的已知公式是一致的.

d. 记号、推广、基本法则

区域 R 的矩形分划使人联想从莱布尼茨时代起就使用了的二重积分符号. 从矩形上的和式的记号

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\sum_{\mu=0}^{m-1} f(\xi_\nu,\eta_\mu)\Delta x\Delta y$$

出发, 我们指出, 从和式到积分的极限过渡中, 用二重积分号代替双重和号, 并用符号 $dxdy$ 代替量的乘积 $\Delta x\Delta y$. 因此, 二重积分经常写成

$$\iint_R f(x,y)dxdy$$

的形式, 而不用

$$\iint_R f(x,y)dR$$

的形式, 这里符号 dR 表示面积 ΔR. 在这个阶段, 符号 $dxdy$ 仅仅指的是当 $n\to\infty$ 及 $m\to\infty$ 时上述 nm 项和的极限过程.

显然, 和一元函数的普通积分一样, 在二重积分中, 积分变量的记号是不重要的. 我们认为

$$\iint_R f(u,v)dudv \text{ 和 } \iint_R f(\xi,\eta)d\xi d\eta$$

是同样的东西.

在引进积分概念时, 我们知道一个正函数 $f(x,y)$ 的积分代表曲面 $z=f(x,y)$ 下方的体积. 然而, 在积分的分析定义中, 函数 $f(x,y)$ 完全没有必要必须处处是正的; 它可以是负的, 或者在曲面与区域相交的情形, 它改变符号. 于是, 在一般情况下, 积分表示带确定符号的体积, 对于在 x,y 平面上方的曲面或者曲面的一部分来说它的符号是正的. 如果整个曲面由好几个这样的部分组成, 那

么其积分就表示对应的体积连同它们特定的符号的总和. 特别地, 尽管积分号下的函数可以处处不为零, 但它的二重积分却仍可能为零.

和单重积分一样, 对于二重积分也有下列基本法则; 它们的证明是第一卷中那些法则的简单的重复. 若 c 是一个常数, 则

$$\iint_R cf(x,y)dR = c\iint_R f(x,y)dR. \tag{4a}$$

此外, 两个函数的和的积分等于它们的两个积分的和 (**积分运算的线性性质**):

$$\iint_R [f(x,y)+\phi(x,y)]dR = \iint_R f(x,y)dR + \iint_R \phi(x,y)dR. \tag{4b}$$

最后, 若区域 R 由两个子区域 R' 与 R'' 组成, 这两个子区域至多有边界部分是公共的, 则

$$\iint_R f(x,y)dR = \iint_{R'} f(x,y)dR + \iint_{R''} f(x,y)dR; \tag{4c}$$

即 **当区域合在一起时, 对应的积分相加**(积分的可加性).

e. 积分估计与中值定理

和普通积分一样, 二重积分有几个非常有用的估计. 因为证明实际上和第一卷里的一样, 所以我们只把这些事实列出来.

若在 R 中 $f(x,y)\geq 0$, 则

$$\iint_R f(x,y)dR \geq 0; \tag{5a}$$

类似地，若 $f(x,y) \le 0$, 则

$$\iint_R f(x,y)dR \le 0, \tag{5b}$$

由此导出下列结论：若在 R 中处处有不等式

$$f(x,y) \ge \phi(x,y), \tag{5c}$$

则

$$\iint_R f(x,y)dR \ge \iint_R \phi(x,y)dR. \tag{5d}$$

直接应用这个定理给出关系式

$$\iint_R f(x,y)dR \le \iint_R |f(x,y)|dR \tag{5e}$$

以及

$$\iint_R f(x,y)dR \ge -\iint_R |f(x,y)|dR. \tag{5f}$$

还可以把这两个不等式合成一个简单公式

$$\left|\iint_R f(x,y)dR\right| \le \iint_R |f(x,y)|dR. \tag{5g}$$

如果函数 $f(x,y)$ 在 R 中的最大下界是 m, 最小上界是 M, 那么

$$m\Delta R \le \iint_R f(x,y)dR \le M\Delta R, \tag{6}$$

其中 ΔR 是区域 R 的面积. 于是积分可以表成

$$\iint_R f(x,y)dR = \mu\Delta R \tag{7a}$$

的形式，其中 μ 介于 m 与 M 之间. 一般说来， μ 的准确值不能更精确地确定 [1].

1)和一元连续函数的积分一样，如果 R 是连通的，而 $f(x,y)$ 是连续的，那么 μ 一定是函数 $f(x,y)$ 在集合 R 上某一点的函数值.

我们再次把这种形式的估计式叫做积分中值定理.

这里还可以推广如下：若 $p(x,y)$ 是 R 上的任意正连续函数，则

$$\iint_R p(x,y)f(x,y)dR = \mu \iint_R p(x,y)dR, \tag{7b}$$

其中 μ 表示介于 f 的最大值与最小值之间的一个数，它不能再进一步确定了.

和以前一样，这些积分估计表明积分随函数连续地变化. 确切地说，设两个函数 $f(x,y)$ 及 $\phi(x,y)$ 在整个区域 R 上满足不等式

$$|f(x,y) - \phi(x,y)| < \varepsilon,$$

其中 ε 是一个固定的正数. 若 ΔR 是 R 的面积, 则积分 $\iint_R f(x,y)dR$ 与 $\iint_R \phi(x,y)dR$ 之差小于 $\varepsilon\Delta R$, 即小于一个随 ε 趋于零的数.

用同样的办法, 可证明一个函数的积分随区域连续地变化. 假设两个区域 R' 与 R'' 彼此相差的部分的总面积小于 ε, 又设 $f(x,y)$ 是在这两个区域上的一个连续函数，使得 $|f(x,y)| < M$, 其中 M 是一固定的数，则积分 $\iint_{R'} f(x,y)dR$ 与 $\iint_{R''} f(x,y)dR$ 之差小于 $M\varepsilon$, 即小于一个随 ε 趋于零的数. 这件事可从第 154 页上的公式 (4c) 立即推出.

所以为了计算区域 R 上的积分，我们可以用 R 的一个子区域上的积分来代替. 算到想要多精确就多精确的程度，只要这子区域与 R 相差的总面积充分小，例如对区域 R, 我们可以构造多角形，使之与 R 相差的总面积要多小就多小. 特别是可以假定这种多角形的边交替地成为与 x 轴和 y 轴平行的直线，即它是由边平行于坐标轴的矩形一块一块拼起来的.

4.3　三维及高维区域上的积分

对于 x, y 平面区域上的积分所得到的每一个命题可以毫无困难也无需引入新概念地推广到三维或更高维区域上去，例如，研究三维区域 R 上的积分，我们只须把 R 分划为一些填满 R 的闭的互不重叠的若当可测子区域 $R_1, R_2, \cdots, R_N$(例如用有穷个有连续非参数表示的曲面来分划). 若 $f(x, y, z)$ 是在闭区域 R 上的连续函数，又若 $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ 表示区域 R_i 上任意一点，再次作和

$$\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta R_i,$$

其中 ΔR_i 表示区域 R_i 的体积. 这个和是对一切区域 R_i 取的，或者只对 R 的那些与边界不连接的区域求和，如果这样做更方便的话. 现在，如果让子区域的个数无限增长，使它们的最大直径趋于零，我们又求得一个极限，它与分划的特定方式无关，也与中间点的选取无关. 这个极限我们称之为 $f(x, y, z)$ 在区域 R 上的积分，并记作

$$\iiint\limits_R f(x, y, z)dR. \tag{7c}$$

特别地，如果把区域分划成边长为 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 的长方体区域，内部区域 R_i 的体积都是 $\Delta x\Delta y\Delta z$. 和第 513 页一样，我们用记号

$$\iiint\limits_R f(x, y, z)dxdydz$$

表明极限的过渡方式. 除了记号上必要的变化而外，对二重积分提到过的所有事实在三重积分中仍然保持成立.

对于高于三维的区域，一旦我们适当地定义了这种区域的体积概念，重积分就可以完完全全同样地定义了. 如果我们限制于长方形子区域:

$$a_i \leq x_i \leq a_i + h_i \ (i = 1, 2, \cdots, n)$$

并定义其体积为乘积 $h_1h_2\cdots h_n$, 积分定义就没什么新东西了. 用

$$\iint\cdots\int_R f(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

表记 n 维区域 R 上的积分. 对于更一般的区域和更一般的分划, 我们就要靠在附录里给出的体积的抽象定义了.

今后, 我们至多限于讨论在三维空间中的积分.

4.4 空间微分、质量与密度

对一元函数来说, 被积函数是 (不定) 积分的导数. 这件事表达了微分与积分计算之间的基本联系. 对于多元函数的重积分来说, 也有同样的联系, 不过在这儿从本质上说没有那么基本了.

考虑区域 B 上的二元或三元连续函数的重积分 (区域积分)

$$\iint\limits_B f(x,y)dB \text{ 或 } \iiint\limits_B f(x,y,z)dB.$$

B 包含一固定点 P, 其坐标分别是 (x_0,y_0) 或 (x_0,y_0,z_0), 设 B 的容量是 ΔB. 用 ΔB 除此积分, 由公式 (7a) 推出其商是被积函数的一个中间值, 即介于被积函数在这区域上的最大值与最小值之间的一个数. 若令包含 P 点的区域 B 的直径趋于零, 则其容量 ΔB 也趋于零, 函数 f 的这个中间值必趋于在 P 点的函数值. 于是过渡到极限后分别有关系式:

$$\lim_{\Delta B\to 0}\frac{1}{\Delta B}\iint\limits_B f(x,y)dB = f(x_0,y_0)$$

以及

$$\lim_{\Delta B\to 0}\frac{1}{\Delta B}\iiint\limits_B f(x,y,z)dB = f(x_0,y_0,z_0). \tag{8}$$

这个与一元函数积分的微分过程类似的极限过程, 我们称之为**积分的空间微分**. 于是可见, **一个重积分的空间微分给出被积函数**

我们可以用密度与总质量的物理概念来解释多元函数情形下被积函数与积分的关系. 我们把一个物体的质量看成分布在三维空间的一个区域 R 上, 使得每个充分小的子区域含有任意小的质量. 为了定义在一点 P 的特定质量或密度, 首先考虑 P 点的一个邻域 B, 设其容量为 ΔB, 并用这容量去除在这邻域内的质量. 我们称其商为在子区域的平均密度. 今若令 B 的直径趋于零, 则从区域 B 内的平均密度取极限得到一个极限值, 我们称其为在 P 点的密度, 只要这个极限值总是存在的而且与区域序列的选取无关. 若记此密度为 $\mu(x,y,z)$ 并设其连续. 我们立即可见上述过程与在整个区域 R 上的积分

$$\iiint_R \mu(x,y,z)dV$$

的微分取同样的值. 这个积分是在整个区域上取的, 所以它代表在区域 R 上密度为 μ 的物体的总质量[1].

从物理学观点看, 这样表述一个物体的质量当然是理想化的. 然而这种理想化却是合理的, 即它在足够精确的范围内逼近真实情况, 而这是物理学的假定之一.

而且这些思想, 即使在 μ 不是处处为正的情形, 在数学上还是有其重要性的. 负密度和负质量也有物理解释, 例如研究电荷的分布就是这样.

4.5 化重积分为累次单积分

每个重积分可以化到单积分去, 这件事对重积分的计算有基本的重要性. 它使我们能够用以前发展的求不定积分的所有方法来计算重积分.

---

1) 我们仅仅证明了由重积分给定的分布与一开始给定的质量分布有相同的空间微分. 剩下来要证明它蕴涵了这两个分布实际上是恒同的; 换句话说, "空间微分给出密度 μ" 这句话只能被一种质量分布所满足. 其证明虽不难, 但现在还是略去. 我们必须假定质量是可加的, 即由两块互不重叠的区域 R' 与 R'' 组成的区域 R, 其质量为 R' 与 R'' 上的质量之和.

a. 在矩形上的积分

首先取 x,y 平面上的区域 R 为矩形 $a \leq x \leq b, \alpha \leq \gamma \leq \beta$, 并考虑 R 上的一个连续函数 $f(x,y)$. 于是有定理:

为求区域 R 上 $f(x,y)$ 的二重积分, 首先把 y 看成是常数, 对 x 在 a 与 b 限内求 $f(x,y)$ 的积分,

$$\phi(y) = \int_a^b f(x,y)dx$$

是参数 y 的函数, 再对它在 α 与 β 限内求积分, 即得二重积分. 用符号写成

$$\iint\limits_R f(x,y)dR = \int_\alpha^\beta \phi(y)dy, \quad \phi(y) = \int_a^b f(x,y)dx,$$

或者更简练地写成

$$\iint\limits_R f(x,y)dR = \int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x,y)dx. \tag{9a}$$

为了证明这个命题, 我们回到重积分的定义 (3c). 取

$$h = \frac{b-a}{m} \text{ 及 } k = \frac{\beta-\alpha}{n},$$

有

$$\iint\limits_R f(x,y)dR = \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m} f(a+\mu h, \alpha+\nu k)hk.$$

在此极限是这样理解的: 对于事先规定的任意小的正数 ε, 仅当数 m 与 n 都大于一个仅依赖于 ε 的界限 N 时, 右边的和式与积分值之差小于 ε. 引入表达式 [1)]

---

1) 下列证明的根本思想只不过是把 m 与 n 同时增长的二重极限过程分解为: 先让 n 固定, $m \to \infty$, 再让 $n \to \infty$ 的逐次单重极限过程.

$$\Phi_\nu = \sum_{\mu=1}^{m} f(a+\mu h, \alpha+\nu k)h,$$

便可将这和写成

$$\sum_{\nu=1}^{n} \Phi_\nu k$$

的形式. 今若选取任意固定的 ε, 并取 n 为大于 N 的一个固定数. 我们知道, 不论数 m 怎样, 只要它大于 N, 总有

$$\left| \iint_R f(x,y)dR - k\sum_{\nu=1}^{n} \Phi_\nu \right| < \varepsilon.$$

若保持 n 固定, 并让 m 趋于无穷, 上述表达式永不超过 ε. 然而, 按照普通积分的定义, 在这极限过程中, 表达式 Φ_ν 趋于积分

$$\int_a^b f(x,\alpha+\nu k)dx = \phi(\alpha+\nu k),$$

所以便得到

$$\left| \iint_R f(x,y)dR - k\sum_{\nu=1}^{n} \phi(\alpha+\nu k) \right| \leq \varepsilon.$$

不论 ε 怎样, 这个不等式对大于仅依赖于 ε 的固定数 N 的一切 n 都成立. 今若令 n 趋于 ∞(即令 k 趋于零), 则由 “积分” 的定义以及

$$\int_a^b f(x,y)dx = \phi(y)$$

的连续性 (第 81 页), 得到

$$\lim_{n\to\infty} k\sum_{\nu=1}^{n} \phi(\alpha+\nu k) = \int_\alpha^\beta \phi(y)dy,$$

这时

$$\left| \iint_R f(x,y)dR - \int_\alpha^\beta \phi(y)dy \right| \leq \varepsilon.$$

因为 ε 可以选得要怎么小就怎么小，而左边是一个固定的数，所以仅当左边为零时这不等式才能成立，即

$$\iint\limits_R f(x,y)dR = \int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x,y)dx.$$

这就给出了所要的变换.

这个结论使我们**能把二重积分化成两个累次的单重积分**.

因为 x 和 y 所起的作用是可以互换的，无需另证，即得

$$\iint\limits_R f(x,y)dR = \int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x,y)dy. \tag{9b}$$

b. 积分交换次序．积分号下求微分

两个公式 (9a),(9b) 给出关系式

$$\int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x,y)dy. \tag{9c}$$

(在第 88 页上已经用别的办法证明过了) 或者，换句话说:

在有固定积分限的连续函数的累次积分中，积分次序可以颠倒.

积分交换次序定理有许多应用. 特别是，经常把它用来显式地计算那些不能求得其不定积分的单重定积分

作为一个例子 (更多的例子参看附录)，考虑积分

$$I = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx,$$

当 $a > 0, b > 0$ 时，它是收敛的. 我们把 I 写成累次积分的形式

$$I = \int_0^\infty dx \int_a^b e^{-xy} dy.$$

这是一个广义累次积分，我们不能马上应用积分交换次序定理．然而若写成

$$I=\lim_{T\to\infty}\int_0^T dx\int_a^b e^{-xy}dy,$$

用积分交换次序定理，得到

$$I=\lim_{T\to\infty}\int_a^b \frac{1-e^{-Ty}}{y}dy=\log\frac{b}{a}-\lim_{T\to\infty}\int_a^b \frac{e^{-Ty}}{y}dy. \tag{10}$$

依照关系式

$$\int_a^b \frac{e^{-Ty}}{y}dy=\int_{Ta}^{Tb}\frac{e^{-y}}{y}dy,$$

当 T 增大时，第二个积分趋于零；因此

$$I=\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\log\frac{b}{a}. \tag{11a}$$

用类似的办法我们能证明下列一般性的定理：

若 $f(t)$ 在 $t\geq 0$ 是逐段光滑的，又若积分

$$\int_1^\infty \frac{f(t)}{t}dt$$

存在，则对正数 a 与 b

$$I=\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\log\frac{b}{a}. \tag{11b}$$

在此我们还是能把单重积分表成累次积分

$$I=\int_0^\infty dx\int_b^a f'(xy)dy$$

再改变积分的次序．

c. 在更一般的区域上化二重积分为单重积分

我们把已经得到的结果作简单的扩充，能够得到在比矩形更为一般的区域上的类似结论．从考虑**凸区域** R 开始，即区域 R 的边界

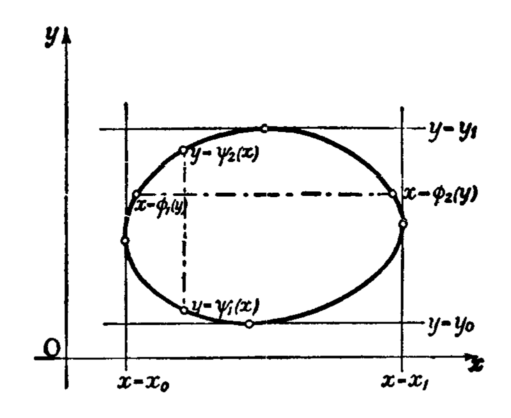


图 4.4　一般凸的积分区域

曲线被任意一根直线相割至多有两个交点，除非这两点间的整个线段是这边界的一部分 (图 4.4). 假设区域介于 支撑线 $x = x_0, x = x_1$ 与 $y = y_0, y = y_1$ 之间 (即这种直线，它含有 R 的边界点，但却不分离 R 中任意两点). 因为 R 中任意一点的 x 坐标在区间 $x_0 \le x \le x_1$ 上，而 y 坐标在 $y_0 \le y \le y_1$ 上. 我们考虑积分

$$\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)dx$$

以及

$$\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)dy,$$

它们分别沿与这区域相交的 $y=$ 常数与 $x=$ 常数的线段求积，其中 $\phi_2(y)$ 与 $\phi_1(y)$ 是直线 $y=$ 常数与区域的边界的交点的横坐标，而 $\psi_2(x)$ 与 $\psi_1(x)$ 是直线 $x=$ 常数与区域的边界的交点的纵坐标. 于是积分

$$\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)dx$$

是参数 y 的函数，其中参数 y 既在积分号内出现又在上、下限里出现；积分

$$\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)dy$$

作为 x 的函数也有类似的结论．于是等式

$$\begin{aligned}\iint_R f(x,y)dR &= \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)dy,\end{aligned} \tag{12}$$

给出累次积分的分解.

为证明这件事．我们先在弧 $y=\psi_2(x)$ 上选择一串点，相邻点之间的距离小于一正数 δ. 然后用在 R 内的由水平线段和铅垂线段组成的路径把相邻点连接起来．类似地在下边界 $y=\psi_1(x)$ 上，也这样做，同时使其横坐标与上边界的一样．于是得到 R 内的一个由有穷个矩形构成的区域 $\bar{R}$, $\bar{R}$ 的上、下边界分别由逐段常数函数 $y=\bar{\psi}_2(x)$ 及 $y=\bar{\psi}_1(x)$ 表达 (参看图 4.5)．由关于矩形的已知定

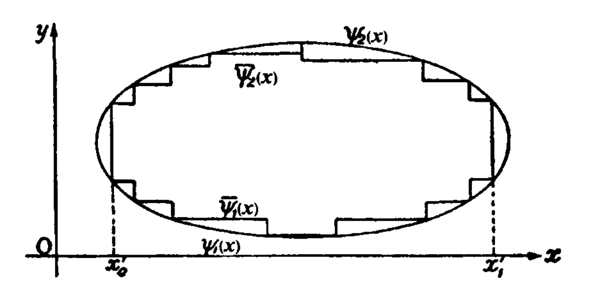


图 4.5

理，有

$$\iint_{\bar{R}} f(x,y)dR = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{\bar{\psi}_1(x)}^{\bar{\psi}_2(x)} f(x,y)dy.$$

因为 $\psi_1(x)$ 与 $\psi_2(x)$ 是一致连续的，所以当 $\delta \to 0$ 时，函数 $\bar{\psi}_1(x)$ 与 $\bar{\psi}_2(x)$ 分别一致地趋于 $\psi_1(x)$ 与 $\psi_2(x)$. 从而

$$\lim_{\delta\to 0} \int_{\bar{\psi}_1(x)}^{\bar{\psi}_2(x)} f(x,y)dy = \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)dy$$

对 x 是一致的. 由此推得

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{x_0'}^{x_1'} dx \int_{\bar{\psi}_1(x)}^{\bar{\psi}_2(x)} f(x,y)dy = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)dy.$$

另一方面, 当 $\delta\to 0$ 时, 区域 $\bar{R}$ 趋于 R. 因此

$$\lim_{\delta\to 0}\iint_{\bar{R}} f(x,y)dR = \iint_{R} f(x,y)dR.$$

把这三个等式合起来, 就有

$$\iint_{R} f(x,y)dR = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)dy.$$

用类似的办法可以建立另一个命题.

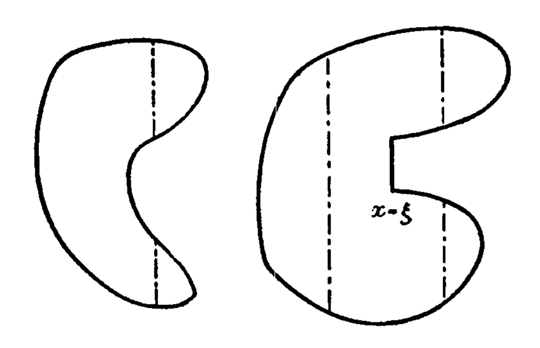


图 4.6　非凸的积分区域

如果我们去掉凸性假设, 考虑形如图 4.6 的区域, 也能得到类似的结论. 只须假定区域的边界曲线与每个平行于 x 轴的直线以及平行于 y 轴的直线交于有限个点或区间. 这时用 $\int f(x,y)dy$ 表示固定 x, 函数 $f(x,y)$ 在这闭区域与直线 $x=$ 常数的公共部分组成的所有区间上的积分. 对于非凸区域, 这种区间可能不止一个. 在一点 $x=\xi$(如图 4.6) 个数可以突然改变, 以致 $\int f(x,y)dy$ 有一个跳跃不连续点. 然而在证明中无须作实质性的改变, 二重积分分

解还是对的:

$$\iint\limits_R f(x,y)dR = \int dx \int f(x,y)dy,$$

其中关于 x 的积分是在区域 R 所位于的整个区间 $x_0 \le x \le x_1$ 上取的. 当然还有另一种分解

$$\iint\limits_R f(x,y)dR = \int dy \int f(x,y)dx.$$

在由 $x^2+y^2 \le 1$ 定义的圆的例子中，有

$$\iint\limits_R f(x,y)dR = \int_{-1}^{+1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy.$$

如果区域是圆周 $x^2+y^2=1$ 与 $x^2+y^2=4$ 之间的圆环 (图 4.7) 则

$$\begin{aligned}\iint\limits_R f(x,y)dxdy = &\int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{+\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy \\ &+ \int_{1}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{+\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy \\ &+ \int_{-1}^{+1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy \\ &+ \int_{-1}^{+1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy.\end{aligned}$$

作为最后一个例子，把区域 R 取作由直线 $x=y, y=0$ 以及 $x=\alpha(\alpha>0)$ 围成的三角形 (图 4.8). 或者先对 x 积分或者先对 y 积分，得到

$$\begin{aligned}\iint\limits_R f(x,y)dR &= \int_0^\alpha dx \int_0^x f(x,y)dy \\ &= \int_0^\alpha dy \int_y^\alpha f(x,y)dx. \qquad (13a)\end{aligned}$$

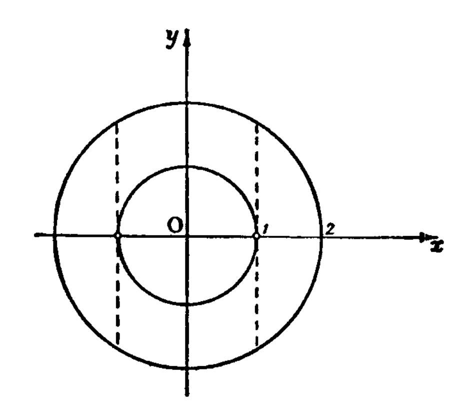


图 4.7 作为积分区域的圆环

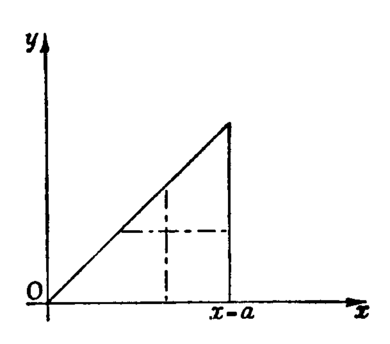


图 4.8 作为积分区域的三角形

特别地，若 $f(x,y)$ 仅依赖于 y, 我们的公式给出

$$\int_0^\alpha dx \int_0^x f(y)dy = \int_0^\alpha f(y)(\alpha - y)dy. \tag{13b}$$

由此可见，如果对函数 $f(y)$ 的不定积分 $\int_0^x f(y)dy$ 再积一次分，其结果可以表成一个单重积分 (参看第一卷第一分册).

d. 在多维区域中的推广

高于二维区域中的对应的定理与二维区域的定理是如此之相似，我们只要把它们不加证明地写出来就够了. 如果先考虑长方体区域 $x_0 \le x \le x_1, y_0 \le y \le y_1, z_0 \le z \le z_1$, 和在这区域上的一个连续函数 $f(x,y,z)$, 我们可以按好几种方式把三重积分

$$V = \iiint_R f(x,y,z)dR$$

化成单重积分或二重积分，例如

$$\iiint_R f(x,y,z)dR = \int_{z_0}^{z_1} dz \iint_B f(x,y,z)dxdy, \tag{14a}$$

其中

$$\iint_B f(x,y,z)dxdy$$

是由 $x_0 \leq x \leq x_1, y_0 \leq y \leq y_1$ 决定的矩形 B 上函数的二重积分，在这积分中，z 作为一个参数保持不变，从而这个二重积分是参数 z 的一个函数. 其余的坐标 x 和 y 也都可以用同样的办法单挑出来.

此外三重积分 V 也可以通过逐次作三个单重积分的累次积分表示出来. 为此先考虑表达式

$$\int_{z_0}^{z_1} f(x,y,z)dz,$$

其中 x 和 y 是固定的，再考虑

$$\int_{y_0}^{y_1} dy \int_{z_0}^{z_1} f(x,y,z)dz,$$

其中 x 是固定的；最后得到

$$V = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{z_0}^{z_1} f(x,y,z)dz. \tag{14b}$$

在这个累次积分中，我们同样也可以先对 x 积分，再对 y, 最后对 z; 而且还可以任意改变成其它的积分次序，因为累次积分总是等于这个三重积分. 所以有下列定理：

在闭长方体上的一个连续函数的累次积分与其积分次序无关.

几乎可以不需要作任何特别的提醒，在三维空间非矩形区域上也可以作这种分解 [1]. 我们只想对球形区域 $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ 写下这种分解：

$$\iiint\limits_R f(x,y,z)dxdydz$$
$$= \int_{-1}^{+1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} dy \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{+\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x,y,z)dz. \tag{15}$$

1) 一般性的证明见附录第 670 页.

4.6 重积分的变换

a. 平面上的积分的变换

变化和简化单积分的主要方法之一是引进一个新的积分变量. 对多重积分来说, 新变量的引进也是非常重要的. 尽管重积分可以化成单积分, 然而要明确地计算出重积分一般来说比一元函数的问题要困难得多, 而且可能有的用初等函数表达的积分是很少见的. 我们经常用在积分号下引进新变量代替旧变量的办法计算这种积分. 然而撇开明确计算二重积分的目的, 变换理论对于完全掌握积分概念却是十分重要的.

在 509 页上已经指出的到极坐标的变换是一种重要的特殊变换. 现在我们马上进行一般的变换. 先考虑 x, y 平面区域 R 上的二重积分情形

$$\iint_R f(x,y)dR = \iint f(x,y)dxdy.$$

设等式

$$x = \phi(u,v), \quad y = \psi(u,v)$$

给出区域 R 到 u, v 平面闭区域 R' 上的一个 1-1 映射. 设函数 ϕ 与 ψ 在区域 R 上有连续的一阶偏导数而且其雅可比行列式

$$D = \begin{vmatrix} \phi_u & \phi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix} = \phi_u\psi_v - \psi_u\phi_v$$

在 R 上总不为零. 更确切地说, 假设函数组 $x = \phi(u,v), y = \psi(u,v)$ 具有唯一的逆 $u = g(x,y), v = h(x,y)$(第 290 页). 此外, 两族曲线 $u =$ 常数与 $v=$ 常数构成区域 R 上的一个曲线网格.

从直观启发式的考察, 容易使人想起应当怎样把积分 $\iint\limits_R f(x, y)dR$ 表成关于 u 和 v 的积分. 自然地会想到为了计算 $\iint\limits_R f(x,y)dR$

可以不用对区域 R 作矩形分划而是用由 $u=$ 常数或 $v=$ 常数构成的曲线网作分划. 所以考虑值 $u=\nu h$ 及 $v=\mu k$, 其中 $h=\Delta u$, 而 $k=\Delta v$ 是给定的数而 ν 与 μ 取一切整数值使得 $u=\nu h$ 与 $v=\mu k$ 与 R' 相交 (从而它们的象是 R 上的曲线). 这些曲线确定了许多网格, 我们把那些位于 R 内部的网格取作子区域 R_i(图 4.9 与 4.10). 现在我们必须求出这样一个网格的面积.

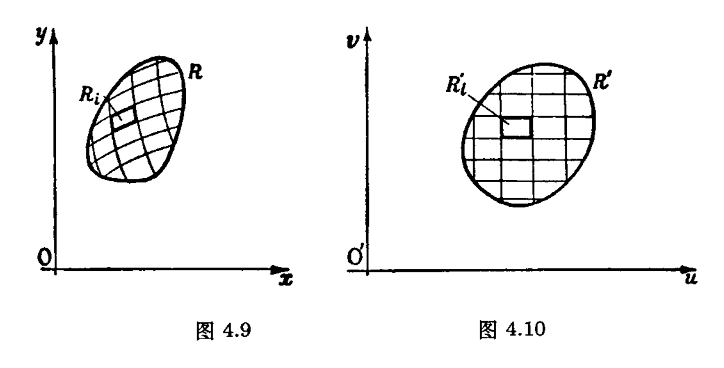


图 4.9　　　　图 4.10

如果这种网格不是由曲线围成的, 而是由 $(u_\nu,v_\mu),(u_\nu+h,v_\mu)$, $(u_\nu,v_\mu+k)$ 与 $(u_\nu+h,v_\mu+k)$ 对应的顶点构成的平行四边形. 则由解析几何中的公式 (参看第二章), 这个网格的面积应是行列式

$$\begin{vmatrix} \phi(u_\nu+h,v_\mu)-\phi(u_\nu,v_\mu) & \phi(u_\nu,v_\mu+k)-\phi(u_\nu,v_\mu) \\ \psi(u_\nu+h,v_\mu)-\psi(u_\nu,v_\mu) & \psi(u_\nu,v_\mu+k)-\psi(u_\nu,v_\mu) \end{vmatrix}$$

的绝对值, 它近似地等于

$$\begin{vmatrix} \phi_u(u_\nu,v_\mu) & \phi_v(u_\nu,v_\mu) \\ \psi_u(u_\nu,v_\mu) & \psi_v(u_\nu,v_\mu) \end{vmatrix} hk = hkD.$$

把它乘上函数 f 在对应的网格上的函数值, 对一切整个位于 R 内的区域 R_i 相加, 然后让 $h\to 0$ 及 $k\to 0$, 过渡到极限, 得到

$$\iint_R f(\phi(u,v),\psi(u,v))|D|dudv.$$

这是变换到新变量后的积分表达式.

然而，上述讨论是不完全的，因为还没有证明可以用平行四边形代替曲边网格或者可以用表达式 $|\phi_u\psi_v-\psi_u\phi_v|hk$ 代替这样一个四边形的面积；也就是说，还没有证明当 $h\to 0$ 和 $k\to 0$ 时，按这种方式引进的误差其极限为零. 我们不准备用误差估计的方法来把证明证完 (这将在附录中做), 而准备用一种稍微不同的办法证明这个变换公式，这种办法随后可以直接推广到高维区域去.

为此，我们利用第三章的结论，并把变量 x,y 到新变量 u,v 的变换分两步做. 通过等式

$$x=x,\quad y=\varPhi(v,x),$$

把新变量 x,v 代替变量 x,y. 在此假设表达式 Φ_v 在区域 R 上处处不为零，例如说 $\varPhi_v$ 处处大于零，而整个区域 R 可以按 1-1 的方式映到 x,v 平面的区域 B 上去. 然后用第二个变换

$$x=\varPsi(u,v),v=v,$$

把区域 B 按 1-1 的方式映到 u,v 平面的区域 R' 上去，在这里我们进一步假定表达式 Ψ_u 在整个区域 B 上是正的. 现在我们按两步实行积分变换. 从把区域 B 分划成边长为 $\Delta x=h$ 和 $\Delta v=k$ 的，由直线 $x=$ 常数 $=x_\nu$ 和 $v=$ 常数 $=v_\mu$ 围成的，在 x,v 平面内的矩形子区域出发， B 的分划对应于区域 R 分划为子区域 R_i, 每个子区域由两条平行线 $x=x_\nu$ 和 $x=x_\nu+h$ 以及两条弧 $y=\varPhi(v_\mu,x)$ 和 $y=\varPhi(v_\mu+k,x)$ 围成 (图 4.11 和 4.12). 由单积分的初等解释，这子区域的面积是

$$\Delta R_i=\int_{x_\nu}^{x_\nu+h}[\varPhi(v_\mu+k,x)-\varPhi(v_\mu,x)]dx.$$

由积分中值定理，可以写成

$$\Delta R_i=h[\varPhi(v_\mu+k,\bar{x}_\nu)-\varPhi(v_\mu,\bar{x}_\nu)],$$

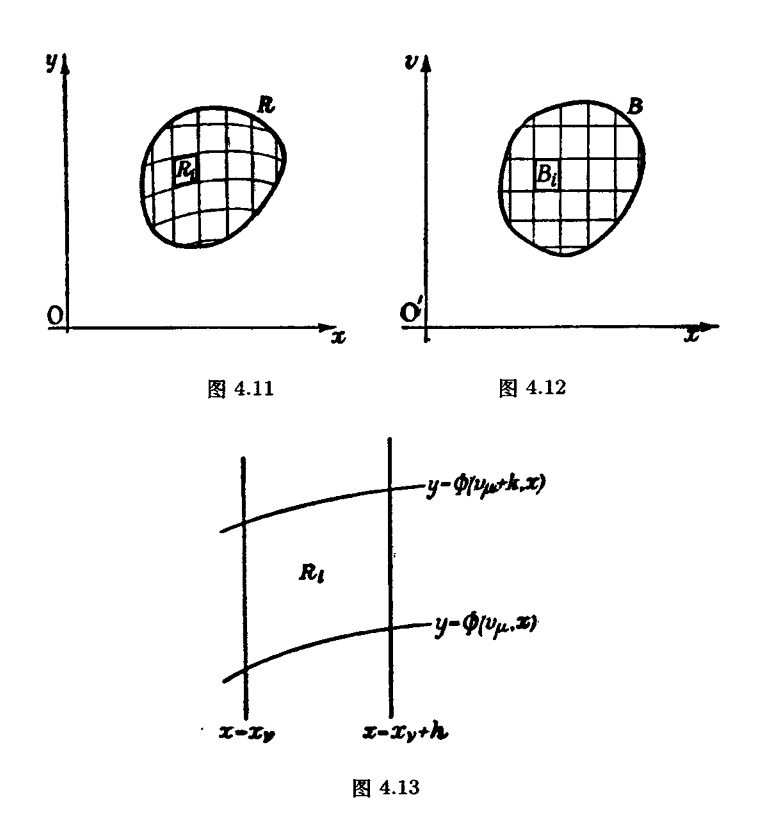


图 4.11　　图 4.12

图 4.13

其中 $\bar{x}_\nu$ 是介于 x_ν 与 $x_\nu + h$ 之间的一个数. 由微分中值定理, 最后变成

$$\Delta R_i = hk\varPhi_v(\bar{v}_\mu, \bar{x}_\nu),$$

其中 $\bar{v}_\mu$ 表示介于 v_μ 与 $v_\mu + k$ 之间的一个数, 所以 $(\bar{v}_\mu, \bar{x}_\nu)$ 是所论 B 中子区域中一点的坐标. 于是 R 上的积分是当 $h \to 0, k \to 0$ 时, 和

$$\varSigma f_i \Delta R_i = \varSigma hkf(\bar{x}_\nu, \varPhi(\bar{v}_\mu, \bar{x}_\nu))\varPhi_v(\bar{v}_\mu, \bar{x}_\nu)$$

的极限. 我们立即可见右边的表达式趋于区域 B 上的积分

$$\iint_R f(x,y)\varPhi_v dxdv(y = \varPhi(v,x)).$$

所以

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_B f(x,y)\Phi_v dxdv$$

对于右边的积分，我们用刚才对 $\iint_R f(x,y)dxdy$ 使用的同样论证方法并用等式 $x = \Psi(u,v), v = v$ 把区域 B 变换到区域 R'.

于是 B 上的积分变为 R' 上形为 $f(x,y)\Phi_v\Psi_u$ 为被积函数的积分，即

$$\iint_{R'} f(x,y)\Phi_v \Psi_u dudv.$$

在此, 量 x 和 y 是通过上面两个变换用自变量 u 和 v 表示出来的. 所以我们证明了变换公式

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_{R'} f(x,y)\Phi_v \Psi_u dudv. \tag{16a}$$

引入直接变换 $x = \phi(u,v), y = \psi(u,v)$, 这个公式可以立即写成前面所说的形式，因为

$$\frac{d(x,y)}{d(x,v)} = \Phi_v \text{ 而 } \frac{d(x,v)}{d(u,v)} = \Psi_u.$$

所以由第三章 (第 263 页), 可得

$$D = \frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \Phi_v \Psi_u.$$

所以，每当变换 $x = \phi(u,v), y = \psi(u,v)$ 能够逐次分解为形如 $x = x, y = \Phi(v,x)$ 以及 $v = v, x = \Psi(u,v)$ 的两个本原变换时 [1], 我们已经建立了变换公式.

然而，在第三章 (第 282 页) 里，我们已经知道，当 $D \neq 0$ 时，就能把闭区域 R 分为有限个区域，在每个区域上这种分解是可行的，如果必须的话，可以改变一下 u 和 v 的位置，而这并不影响到积分值. 于是得到下列一般性的结论:

1) 上面我们假定了导数 Φ_v 与 Φ_u 是正的，但容易看出这不是太强的限制. 如果它不满足的话，只须在公式 (16a) 中用 $\Phi_v \Psi_u$ 的绝对值代替 $\Phi_v \Psi_u$ 就可以了.

如果变换 $x=\phi(u,v), y=\psi(u,v)$ 表示由 x,y 平面上的闭若尔当可测区域 R 到 u,v 平面上的一个区域 R' 上 的一个连续的1-1的映射；又若函数 ϕ 与 ψ 有连续的一阶 导数，而它们的雅可比

$$\frac{d(x,y)}{d(u,v)}=\phi_u\psi_v-\psi_u\phi_v$$

处处不为零，则

$$\iint_R f(x,y)dxdy=\iint_R f(\phi(u,v),\psi(u,v))\left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right|dudv. \tag{16b}$$

为完整起见，我们再加上一条，如果行列式 $d(x,y)/d(u,v)$ 在这区域的有限个孤立点上为零但却不改变符号的话，那么这个变换公式还是对的，因为如果这样，我们只需把这些点用环绕它们的半径为 ρ 的小圆从 R 中挖掉. 对于剩下来的区域原来的证明是有效的，然后让 ρ 趋于零，由于所有涉及的函数都是连续的，所以变换公式在区域 R 上仍然成立. 这个事实使得我们能够对以原点为内点的区域引入极坐标，其雅可比等于 r，在原点为零.

在第五章我们还将回过来考虑积分的变换，其中雅可比的符号将起流形定向的作用. 在附录里还将给出变换公式的另一种证法.

b. 高于二维的区域

当然，在三维或高维空间中我们能用同样的办法得到下列一般性的结果:

若 $x,y,z,\cdots$ 空间中的一个闭若当可测区域 R 由一个1-1的变换映到 $u,v,w,\cdots$ 空间的一个区域 R' 上，其雅可比

$$\frac{d(x,y,z,\cdots)}{d(u,v,w,\cdots)}$$

处处不为零, 则有变换公式

$$\iint\cdots\int_R f(x,y,z,\cdots)dxdydz\cdots$$
$$=\iint\cdots\int_{R'} f(x,y,z,\cdots)\cdot\left|\frac{d(x,y,z,\cdots)}{d(u,v,w,\cdots)}\right|dudvdw\cdots. \tag{17}$$

作为一个特殊的应用, 我们能够得到 极坐标和球坐标的变换公式. 对于平面上的极坐标, 用 r 与 θ 代替 u 与 v, 立即得到 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r$. 空间中的球坐标, 由方程

$$x=r\cos\phi\sin\theta,\quad y=r\sin\phi\sin\theta,\quad z=r\cos\theta$$

定义, 其中 ϕ 从 0 变到 2π, θ 从 0 变到 π, 而 r 从 0 变到 $+\infty$, 我们让 r,θ,ϕ 等同于 u,v,w. 于是得到雅可比

$$\frac{d(x,y,z)}{d(r,\theta,\phi)}=\begin{vmatrix}\cos\phi\sin\theta & r\cos\phi\cos\theta & -r\sin\phi\sin\theta\\ \sin\phi\sin\theta & r\sin\phi\cos\theta & r\cos\phi\sin\theta\\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0\end{vmatrix}$$
$$=r^2\sin\theta$$

(通过对第三列的子式展开容易得到 $r^2\sin\theta$). 所以空间中三重积分的球坐标变换公式是

$$\iiint\limits_R f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{R'} f(x,y,z)r^2\sin\theta drd\theta d\phi. \tag{18}$$

和平面的对应情形一样, 我们也能不用一般理论而得到变换公式. 我们只须从由球面 $r=$ 常数, 锥面 $\theta=$ 常数以及平面 $\phi=$ 常数给定的空间的一个子分划出发. 这个初等方法的细节留给读者去作.

对于球坐标, 当 $r=0$ 或 $\theta=0,\pi$ 时, 因为对应的雅可比为零, 所以我们的假定是不满足的. 然而和在平面情形一样, 我们容易相信, 无论如何变换公式还是对的.

练 习 4.6

1. 计算下列积分:

(a) $\int_0^a\int_0^b xy(x^2-y^2)dydx.$

(b) $\int_0^\pi\int_0^\pi \cos(x+y)dydx.$

(c) $\int_0^e\int_0^2 \frac{1}{xy}dydx.$

(d) $\int_0^a\int_0^b xe^{xy}dydx.$

(e) $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y^2dydx.$

(f) $\int_0^2\int_0^{2-x} ydydx.$

2. 在圆 $x^2+y^2\le 1$ 上求 $\iint x^2y^2dxdy.$

3. 在圆 $x^2+y^2\le 1$ 上求 $\iint \frac{x^3+y^3-3xy(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}}dxdy.$

4. 求介于 x,y 平面与抛物面 $z=2-x^2-y^2$ 之间的体积.

5. 计算积分

$$\iint\frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2},$$

取在

(a) 双纽线 $(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)=0$ 的一叶上,

(b) 以 $(0,0),(2,0),(1,\sqrt{3})$ 为顶点的三角形上.

6. 在整个椭球体 $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2\le 1$ 内计算积分

$$\iiint|xyz|dxdydz.$$

7. 求两个圆柱体 $x^2+z^2<1$ 及 $y^2+z^2<1$ 公共部分的体积.

8. 用积分求体积, 它是半径为 r 的球被一个到中心垂距为 $h(<r)$ 的平面所截得的两部分中较小的一部分.

9. 在球 $x^2+y^2+z^2\le r^2$ 上求积分 $\iiint(x^2+y^2+z^2)xyzdxdydz.$

10. 在由不等式 $x^2+y^2\le z^2, x^2+y^2+z^2\le 1$ 确定的区域上求 $\iiint zdxdydz.$

11. 在区域 $x+y+z\leq 1, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$, 上求 $\iiint(x+y+z)x^2y^2z^2dxdydz$.

12. 在球 $x^2+y^2+z^2\leq 1$ 上求 $\iiint\frac{dxdydz}{x^2+y^2+(z-2)^2}$.

13. 在球 $x^2+y^2+z^2\leq 1$ 上求 $\iiint\frac{dxdydz}{x^2+y^2+(z-\frac{1}{2})^2}$.

14. 在正方形 $|x|\leq 1, |y|\leq 1$ 上求 $\iint\frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

15. 试证, 若 $f(x,y)$ 是 x,y 平面区域 D 上的一个连续函数, 又若对每个含于此区域内的区域 R, $\iint\limits_R f(x,y)dxdy=0$, 则 $f(x,y)$ 恒为 0.

16. 用变换 $x^2+y^2=u^2+a^2, y=vx$ 证明

$$\iint\limits_R e^{-(x^2+y^2)}dxdy=ae^{-a^2}\int_0^{\infty}\frac{e^{-u^2}}{a^2+u^2}du,$$

其中 R 表示半平面 $x\geq a>0$.

17. 证明

$$\left|\iint(u_x^2+u_y^2)dxdy\right|$$

是反演不变的.

18. 在球 $\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leq 1$ 上计算积分

$$I=\iiint\cos(x\xi+y\eta+z\zeta)d\xi d\eta d\zeta.$$

19. 交换下列积分次序

$$I=\int_2^4 dx\int_{4/x}^{(20-4x)/(8-x)}(y-4)dy$$

并计算此积分.

4.7 广义多重积分

在一元函数情形, 我们已发现有必要推广积分概念于积分区间

上的不连续函数. 特别是我们考虑了跳跃不连续函数的积分和有无穷值函数的积分; 我们还考虑了无穷区间上的积分. 现在对于多元函数来讨论积分概念对应的推广.

像第 508 页上定义的"积分"概念 (我们称之为**黎曼积分**) 并不是非要被积函数 $f(x,y)$ 连续不可的. 只要 f 在积分区域 R 上是有界的, 我们总可以作出对应于 R 的分割为若尔当可测集 R_i 的上和与下和. 我们称 f 是可积的 (更确切地说, 黎曼可积), 如果当 R 的分割无限加细时, 这些上和与下和趋于同一极限. 本质上这就是我们将在本章附录中所阐述的步骤 [1]. 严格说来, 即使函数有不连续点, 任何可积函数的积分还是常义积分.

然而, 在这一节, 我们认为仅当被积函数为连续函数时, 积分才是存在的, 由此, 试图用极限过程来扩充积分的概念, 然后对较广的函数类证明积分的存在性. 然而, 按这种方式定义的广义积分与从 R 的分割的上和与下和直接得到的常义黎曼积分是不是完全一样呢 [2]? 我们把这个问题留下来不作回答.

a. 有界集上函数的广义积分

在大多数情形, 我们要想求积的函数在某个区域 R 上是连续的, 除了在一些孤立点上, 或是沿着某些曲线, 函数或者没有定义或者无界, 或者是否连续值得怀疑而外. 所有这些情形使我们感兴趣的是: 函数有反常行为的点集, 其面积为 0 (在此"面积"一词专指若尔当意义下的测度或容量) [3]. 于是我们从 R 中挖去一块包含这些例外点的小面积集合 s, 在剩下部分求积 f, 并让 s 的面积趋于 0 时取 $R-s$ 上 f 的积分的极限. 如果这个极限存在, 就定义成 f 在 R 上的"广义"积分. 因为我们不要这极限依赖于集合 R 的特殊逼近方式, 所以我们将限制在最简单的情形: 不仅 f 而且 $|f|$ 也有

1) 在积分的定义中, 我们只用正方形分割. 但可以证明这个限制是非本质的.

2) 实际情况总是: f 有界且除去可能在一个 0 容量点集外连续, R 有界且若尔当可测.

3) 对于某些函数, 其不连续点集构成一正若尔当测度集, 就需要像勒贝格积分那样更精细的概念.

“广义”积分 (与无穷级数中的“条件收敛”相对照, 它对应于“绝对收敛”).

设积分区域 R 是有界的并有面积. 假设可以找到一列单调的闭子区域序列 R_n (即 $R_n \subset R_{n+1} \subset R$), 在每个 R_n 上 $f(x,y)$ 有定义并且连续, 又设集合 R_n 的面积 $A(R_n)$ 趋于面积 $A(R)$ 并且积分

$$\iint\limits_{R_n} |f(x,y)|dxdy \tag{19a}$$

有与 n 无关的界, 则

$$I = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{R_n} f(x,y)dxdy \tag{19b}$$

存在, 这个极限将被证明与逼近序列 R_n 的特殊选择无关, 并将被用来定义广义积分

$$I = \iint\limits_{R} f(x,y)dxdy. \tag{19c}$$

在证明这个定理之前, 我们用一些典型例子来阐明这些思想.

函数

$$f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$$

在 x,y 平面的原点变为无穷, 所以, 为了计算 f 在含有原点的区域 R 上, 例如在圆 $x^2+y^2 \leq 1$ 上的积分, 我们必须挖掉包含原点的面积趋于 0 的一个区域 s. 然后必须考察在剩下的区域 $R-s$ 上的积分的收敛性. 取 s 为半径是 $\frac{1}{n}$ 的圆盘 s_n. 设 R_n 为从 R 中挖去 s_n 后的区域. R 必然含于以原点为中心、ρ 为半径的圆内, 变换成极坐标, 有

$$\iint\limits_{R_n} |f|dxdy = \iint\limits_{R_n} |f|rdrd\theta \leq \int_{\frac{1}{n}}^{\rho} dr \int_0^{2\pi} d\theta r|\ln r|$$

$$= 2\pi \int_{\frac{1}{n}}^{\rho} r|\ln r| dr.$$

于是这个变换给出一个新的被积函数 $r|\ln r|$, 它不但有界而且甚至连续, 只要在 $r=0$ 点定义为 0. 因此对一切 n 一致地有

$$\iint_{R_n} |f| dxdy \leq 2\pi \int_0^{\rho} r|\ln r| dr.$$

广义积分

$$\iint_R \log\sqrt{x^2+y^2} dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint_{R_n} \log\sqrt{x^2+y^2} dxdy$$

的存在性就得到了. 例如, 若 R 是单位圆盘, 求得

$$\begin{aligned}\iint_{x^2+y^2<1} \log\sqrt{x^2+y^2} dxdy &= \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\theta r \log r \\ &= 2\pi \int_0^1 r \log r dr \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{2} r^2 \ln r - \frac{1}{4} r^2\right)_0^1 \\ &= -\frac{\pi}{2}. \end{aligned} \tag{20a}$$

作为另一个例子, 在同一区域上考虑积分

$$\iint_R \frac{dxdy}{\sqrt{(x^2+y^2)^{\alpha}}}, \tag{20b}$$

由此直接得到

$$\iint_{R_n} |f| dxdy \leq \int_{1/n}^{\rho} dr \int_0^{2\pi} d\theta |f| r dr d\theta = 2\pi \int_{1/n}^{\rho} r^{1-\alpha} dr,$$

从第一卷我们知道积分 $\int_0^{\rho} r^{1-\alpha} d\alpha$ 收敛当且仅当 $\alpha < 2$. 所以得到结论: 二重积分 (20b) 当且仅当 $\alpha < 2$ 时收敛. 这个注记容易推广

为在许多特殊情况中可应用的广义积分的收敛性的一个充分判别法 (但决不是必要的).

若函数 $f(x,y)$ 在区域 R 上除了在一点外处处连续, 把这点取作原点, 又若有一固定的界 M 和一个正数 $\alpha < 2$ 使得

$$|f(x,y)| < \frac{M}{\sqrt{(x^2+y^2)^\alpha}} \tag{21a}$$

对于属于 R 中的 $(x,y) \neq (0,0)$ 处处成立, 则积分

$$\iint_R f(x,y)dxdy \tag{21b}$$

收敛.

用类似的办法讨论三重积分

$$\iiint_R \frac{dxdydz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}}.$$

若 R 含有原点, 引入球坐标便得到

$$\iiint_R r^{2-\alpha} \sin\theta dr d\phi d\theta.$$

和前面类似地讨论证明当 $\alpha < 3$ 时这积分收敛. 更一般地, 我们还知道, 当 $f(x,y,z)$ 在 R 内除了原点外连续, 且有一界 M 及一常数 $\alpha < 3$ 使得

$$|f(x,y,z)| \leq \frac{M}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}}, \tag{22a}$$

则积分

$$\iiint_R f(x,y,z)dxdydz \tag{22b}$$

收敛，从而对于一个处处连续的函数 $g(x,y,z)$ 当 $\alpha<3$ 时，广义积分

$$\iiint\limits_R \frac{g(x,y,z)}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}}dxdydz \tag{22c}$$

存在. 对于被积函数不仅在单个点上而且沿着整条曲线成为无穷时，广义积分还可能存在. 在最简单的情形，例如说被积函数在直线的一个部分，例如在 y 轴的一个线段上成为无穷，在这情形，如果当 $x\neq 0$ 时，在 R 内处处有关系式

$$|f(x,y)|<\frac{M}{|x|^\alpha}, \tag{23}$$

其中 M 是一个固定的界而 $\alpha<1$, 则 R 上的 f 的广义积分存在. 为了证明它，我们只须从 R 中挖去 y 轴附近的一条带子，并让带宽趋于 0.

像

$$\iint\limits_R \frac{dxdy}{x^3}$$

的积分违反了我们关于指数 α 的限制，有时只在一种“特殊”意义下才有可能定义. 在此，积分值依赖于对 R 逼近的确切方式. 例如，这里的积分可以定义成从 R 中挖掉对 y 轴对称的带形区域上的积分的极限. 用别的逼近方式可能导出不同的或者甚至是发散的积分值.

b. 广义积分一般收敛定理的证明

考虑面积为 $A(R)$ 的集合 R, 和一串面积为 $A(R_n)$ 的闭子集 R_n, 当 $n\to\infty$ 时，$A(R_n)$ 趋于 $A(R)$. 这里 R_n 将在 R 内单调地膨胀：

$$R_1\subset R_2\subset R_3\subset\cdots\subset R. \tag{24a}$$

假定函数 $f(x,y)$ 在每个 R_n 上是连续的. 此外存在一个常数 μ, 使得对一切 n 有

$$\iint\limits_{R_n} |f(x,y)|dxdy\leq\mu. \tag{24b}$$

由于 (24a), 积分

$$\iint_{R_n} |f| dxdy$$

显然构成一个单调递增的有界序列, 于是当 $n \to \infty$ 时有一个极限. 由柯西收敛判别法, 对每个 $\varepsilon > 0$, 可以找到一个 $N = N(\varepsilon)$, 使得当 $m > n > N(\varepsilon)$ 时,

$$\iint_{R_m} |f| dxdy - \iint_{R_n} |f| dxdy = \iint_{R_m - R_n} |f| dxdy < \varepsilon, \tag{24c}$$

令

$$I_n = \iint_{R_n} f(x, y) dxdy.$$

显然 I_n 也满足柯西判别法, 因为由 (5g) 对于 $m > n > N(\varepsilon)$ 有

$$\begin{aligned} \left| \iint_{R_m} f dxdy - \iint_{R_n} f dxdy \right| &= \left| \iint_{R_m - R_n} f dxdy \right| \\ &\leq \iint_{R_m - R_n} |f| dxdy < \varepsilon, \end{aligned}$$

由此推出

$$I = \lim_{n \to \infty} \iint_{R_n} f(x, y) dxdy$$

存在.

剩下要证明值 I 不依赖于所用的特殊的逼近序列 R_n. 设 S 是 R 的任意闭若尔当可测子集, f 在 S 上是连续的. 设 M 是 $|f|$ 在 S 上的一个上界. 则由积分中值定理 (见第 515 页)[1],

$$\left| \iint_{S} f dxdy - \iint_{S \cap R_n} f dxdy \right|$$

1) 读者请注意: $S \cap R_n$ 是 S 与 R_n 公共的点组成的点集, 而 $S - R_n$ 是那些属于 S 但不属于 R_n 的点集 (见第 126 页): $S - R_n = S - S \cap R_n$. 仍用 $A(S - R_n)$ 记集合 $S - R_n$ 的面积.

$$= \left| \iint_{S-R_n} f dxdy \right|$$

$$\leq \iint_{S-R_n} |f| dxdy \leq MA(S-R_n)$$

$$\leq MA(R-R_n) = M[A(R) - A(R_n)].$$

由假设 $\lim_{n\to\infty} A(R_n) = A(R)$ 推出

$$\iint_S f dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint_{S\cap R_n} f dxdy. \tag{24d}$$

用 $|f|$ 代替 f 代入这关系式中，并利用 (24b), 得到

$$\iint_S |f| dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint_{S\cap R_n} |f| dxdy$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \iint_{R_n} |f| dxdy \leq \mu. \tag{24e}$$

于是，估计 (24b) 被推广到 R 的更一般的子集 S 上.

我们还可以推广 (24c). 利用 (24d) 当 $n > N(\varepsilon)$ 时，有

$$\left| \iint_S f dxdy - \iint_{S\cap R_n} f dxdy \right|$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left| \iint_{S\cap R_m} f dxdy - \iint_{S\cap R_n} f dxdy \right|$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left| \iint_{S\cap(R_m-R_n)} f dxdy \right| \leq \lim_{m\to\infty} \iint_{R_m-R_n} |f| dxdy$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left(\iint_{R_m} |f| dxdy - \iint_{R_m} |f| dxdy \right) < \varepsilon, \tag{24f}$$

这里的 N 不依赖于特定集合 S.

今设 $S_1, S_2, \cdots$ 是 R 的一串闭子集，f 在它们上面是连续的，并且有

$$S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \cdots \subset R \tag{24g}$$

以及

$$\lim_{m\to\infty} A(S_m) = A(R). \tag{24h}$$

因为由 (24e)

$$\iint_{S_m} |f| dxdy \le \mu,$$

我们知道

$$J = \lim_{m\to\infty} \iint_{S_m} f dxdy$$

存在. 于是对充分大的 m

$$|J - \iint_{S_m} f dxdy| < \varepsilon,$$

由 (24f) 推得当 m, n 都充分大时,

$$\left| J - \iint_{S_m \cap R_n} f dxdy \right| < 2\varepsilon.$$

交换 S_m 与 R_n 的作用, 对一切充分大的 m, n 还有

$$\left| I - \iint_{S_m \cap R_n} f dxdy \right| < 2\varepsilon.$$

因此, 对任意正数 $\varepsilon, |J - I| < 4\varepsilon$, 于是 $I = J$. 这就是所要证明的.

c. 无界区域上的积分

当被积函数 f 连续, 但积分区域扩充到无穷时出现另一种类型的广义积分. 我们还是不想分析最一般的情况, 只是提出一个对在实践中遇到的大多数情形有用的收敛判别法. 只要研究两个自变量的情形就够了.

考虑一个无界集 R, 函数 f 在它上面是连续的. 用一个子集合的单调序列

$$R_1 \subset R_2 \subset R_3 \subset \cdots \subset R$$

来充斥 R, 其中每一个集合是闭的、有界的、若尔当可测集. 不用以前的条件 $\lim_{n\to\infty} A(R_n) = A(R)$, 因为 R 是无界的, 它可能没有意义, 我们要求 R 的每个闭的有界子集至少含于一个集合 R_m 之中 (例如, 若 R 是全平面, 可以选择 R_n 为中心在原点半径为 n 的圆盘). 若极限

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{R_n} f(x,y)dxdy$$

存在并且不依赖于子集序列 R_n 的特殊选取, 我们就把它称为 f 在 R 上的积分并记作

$$\iint_R f dxdy.$$

于是有下列关于积分存在性的充分条件:

如果对于一个特殊的序列 R_n (像上面所说的那样), $|f|$ 在 R_n 上的积分对 n 一致有界, 例如对一切 n,

$$\iint_{R_n} |f|dxdy \le \mu,$$

那么无界集 R 上的 f 的广义积分存在.

这个收敛判别法的证明所用的论证方法与有界集上广义积分的证法是一样的, 应当留给读者作为练习.

用积分

$$\iint_R e^{-x^2-y^2}dxdy$$

来说明这个定理, 其中积分区域 R 是整个 x,y 平面. 选择子区域序列 R_n 为中心在原点半径为 n 的圆盘, 它显然满足我们的所有要求. 现在, 变换为极坐标:

$$\iint_{R_n} e^{-x^2-y^2}dxdy = \iint_{x^2+y^2\le n^2} e^{-x^2-y^2}dxdy$$

$$= \int_0^n dr \int_0^{2\pi} d\theta r e^{-r^2} = 2\pi \int_0^n r e^{-r^2} dr$$
$$= -\pi e^{-r^2} \Big|_0^n = \pi(1 - e^{-n^2}).$$

这证明了 R_n 上的积分的有界性，因此在 R 上的积分存在. 当 $n \to \infty$, 求得广义积分值

$$\iint_R e^{-x^2-y^2} dxdy = \lim_{n\to\infty} \pi(1 - e^{-n^2}) = \pi.$$

另一方面，当用正方形序列 S_m

$$-m \leq x \leq +m, \quad -m \leq y \leq +m$$

代替 R_n 时，我们必然得到同一极限. 在此我们可以利用被积函数是 x 的函数与 y 的函数的乘积的事实 (见第 511 页), 求得

$$\iint_{S_m} e^{-x^2-y^2} dxdy = \iint_{S_m} e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} dxdy$$
$$= \left(\int_{-m}^{m} e^{-x^2} dx\right)\left(\int_{-m}^{m} e^{-y^2} dy\right)$$
$$= \left(\int_{-m}^{m} e^{-x^2} dx\right)^2.$$

由此推出

$$\lim_{m\to\infty} \iint_{S_m} e^{-x^2-y^2} dxdy = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2.$$

因为 R_n 与 S_m 应当给出 R 上的同一个积分值，我们求得

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \tag{25a}$$

于是，我们利用广义二重积分理论算出了在分析中极为重要的一个广义单积分. 因为 e^{-x^2} 的不定积分不能表成初等函数，所以直接去求它是困难的.

我们可以利用这个结果去计算 Γ 函数 (见第一卷)

$$\Gamma(n)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{n-1}dt \tag{25b}$$

在 $n=\frac{1}{2}$ 时的值，作代换 $t=x^2$ 得到

$$\begin{aligned}\Gamma(\frac{1}{2})&=\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt=2\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx\\&=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}.\end{aligned} \tag{25c}$$

用与 $\sqrt{x^2+y^2}$ 的幂次比较的办法，我们能提出无界区域上广义积分的有用的收敛判别法. 这些判别法与第 542 页上函数在原点附近无界的判别法类似. 如果在 R 上，f 处处满足不等式

$$|f(x,y)|\le\frac{M}{\sqrt{(x^2+y^2)^{\alpha}}}, \tag{26}$$

其中 M 和 α 是固定常数，且 $\alpha>2$[1)]，那么在无界区域 R 上的连续函数 $f(x,y)$ 的广义积分存在.

练 习 4.7

1. (a) 用变换到极坐标，证明积分

$$K=\int_0^{a\sin\beta}\left\{\int_{y\cot\beta}^{\sqrt{a^2-y^2}}\log(x^2+y^2)dx\right\}dy(0<\beta<\frac{\pi}{2})$$

的值是 $a^2\beta(\log a-\frac{1}{2})$.

---

1) 如果 (26a) 对某个 $\alpha<2$ 成立，f 就在原点附近可积，在这个意义下我们说在无穷远的行为与在原点的行为是“互补”的，因此**没有值** α **可使广义积分**

$$\iint\frac{dxdy}{\sqrt{(x^2+y^2)^{\alpha}}}$$

在整个平面上存在.

(b) 交换上述积分中的积分次序.

2. 求以下的积分:

(a) $\iint \frac{1}{(x^2+y^2+1)^2}dxdy$ 在 x, y 平面上,

(b) $\iiint \frac{1}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}dxdydz$ 在 x, y, z 空间上.

3. 证明

$$I = \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \frac{y-x}{(x+y)^3}dx \right\} dy$$

中的积分次序不能交换.

4.8 在几何中的应用

a. 体积的初等计算

体积概念构成了我们的"积分"定义的出发点. 在这里, 我们应用多重积分来计算一些立体的体积.

例如, 为了计算旋转椭球

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

的体积, 我们将方程表为

$$z = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2-y^2}.$$

因此, 位于 x, y 平面之上部的半个椭球的体积由二重积分给出 [见 (3b)],

$$\frac{V}{2} = \frac{b}{a}\iint \sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy,$$

积分区域是圆 $x^2+y^2 \leq a^2$. 如果我们作极坐标变换, 二重积分变为

$$\iint r\sqrt{a^2-r^2}drd\theta,$$

进一步分解为单重积分

$$\frac{V}{2} = \frac{b}{a}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r\sqrt{a^2-r^2}dr = 2\pi\frac{b}{a}\int_0^a r\sqrt{a^2-r^2}dr,$$

它给出我们要求的体积的值

$$V = \frac{4}{3}\pi a^2 b.$$

为计算一般椭球

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{27a}$$

的体积，我们作变换

$$x = a\rho\cos\theta, \quad y = b\rho\sin\theta, \quad \frac{d(x,y)}{d(\rho,\theta)} = ab\rho,$$

得到半个椭球的体积

$$\frac{V}{2} = c\iint\limits_{R} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}dxdy = abc\iint\limits_{R} \rho\sqrt{1-\rho^2}d\rho d\theta,$$

其中区域 R' 是矩形 $0 \le \rho \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi$. 于是

$$\frac{V}{2} = abc\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho\sqrt{1-\rho^2}d\rho = \frac{2}{3}\pi abc,$$

即

$$V = \frac{4}{3}\pi abc. \tag{27b}$$

最后，我们来计算由三个坐标平面和平面 $ax + by + cz - 1 = 0$ 围成的棱锥体的体积，其中 a, b 和 c 假定是正的. 我们得到体积

$$V = \frac{1}{c}\iint\limits_{R} (1 - ax - by)dxdy,$$

其中积分区域是 x, y 平面上的三角形区域 $0 \le x \le \frac{1}{a}, 0 \le y \le (1 - ax)/b$. 因此,

$$V = \frac{1}{c}\int_0^{1/a} dx \int_0^{(1-ax)/b} (1 - ax - by)dy.$$

对 y 积分给出

$$(1-ax)y-\frac{b}{2}y^2\Big|_0^{(1-ax)/b}=\frac{(1-ax)^2}{2b},$$

如果我们借助于替换 $1-ax=t$ 再一次积分，得到

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{2bc}\int_0^{1/a}(1-ax)^2dx\\&=-\frac{1}{6abc}(1-ax)^3\Big|_0^{1/a}=\frac{1}{6abc}.\end{aligned}$$

显然，这一结果和初等几何中棱锥体体积是底面积乘高的三分之一的公式是一致的.

为了计算更为复杂的立体的体积，我们可以将立体分块，这些块的体积可直接表为二重积分. 但是，在后面 (特别是在下一章中)，我们将得到并不需要这种分划的封闭曲面围成的体积的表达式.

b. 体积计算的一般性附注. 旋转体在球坐标系中的体积

正如我们能将平面区域 R 的面积表为二重积分

$$\iint\limits_R dR=\iint\limits_R dxdy$$

那样，我们也可以将三维空间区域 R 的体积表为在区域 R 上的积分

$$V=\iiint\limits_R dxdydz.$$

事实上，这种观点恰好和我们的积分定义相吻合 (参看附录第 655 页)，而且这种观点表示这样的几何事实：我们可以把空间划分成相等的立方体，求出整个包含在 R 中的那些立方体体积的总和，然后让立方体的直径趋于零，从而得到区域的体积. V 的积分分解为 $\int dz\iint dxdy$[见第 528 页 (14a)]，这表示一个我们在初等几何中熟知的 卡瓦利里原理. 从初等几何中知道，按照这个原理，如果立体

在垂直于某一确定的直线 (比如说 z 轴) 的每一个横截面面积为已知，则此立体的体积也就确定了. 上面给出的三维区域体积的一般表达式使我们能够立即得到计算体积的许多公式. 为此，在积分中引入新的自变量代替 x, y, z 常常是有益的.

最重要的例子是由 **球** 坐标和 **柱** 坐标给出的. 例如，让我们来计算由曲线 $x=\varphi(z)$ 绕 z 轴旋转而得到的旋转体体积. 我们假定曲线不与 z 轴相交而且旋转体的上方和下方被平面 $z=$ 常数所界住. 因此这个立体由不等式 $a \leq z \leq b$ 和 $0 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq \varphi(z)$ 确定. 它的体积由上面的积分给出，借助于柱坐标

$$z, \rho=\sqrt{x^2+y^2}, \quad \theta=\arccos \frac{x}{\rho}=\arcsin \frac{y}{\rho},$$

体积公式变为

$$V=\iiint\limits_R d x d y d z=\int_a^b d z \int_0^{2 \pi} d \theta \int_0^{\varphi(z)} \rho d \rho .$$

如果我们积出单重积分，立即得到

$$V=\pi \int_a^b \varphi(z)^2 d z . \tag{28a}$$

我们还可以给出这一公式的更为直观的推导. 我们用垂直于 z 轴的平面将旋转体切为小薄片

$$z_\nu \leq z \leq z_{\nu+1},$$

此薄片中的点到 z 轴的距离 $\phi(z)$ 的最小值和最大值分别记为 m_ν 和 M_ν. 则薄片的体积介于高为

$$\Delta z=z_{\nu+1}-z_\nu$$

而半径分别为 m_ν 和 M_ν 的两个圆柱体的体积之间，从而有

$$\Sigma m_\nu^2 \pi \Delta z \leq V \leq \Sigma M_\nu^2 \pi \Delta z .$$

因此，由常义积分的定义，

$$V = \pi \int_a^b \varphi(z)^2 dz.$$

如果区域 R 包含球坐标系 (r, θ, ϕ) 的原点 0, 而且如果 R 的表面方程由

$$r = f(\theta, \phi)$$

给定，其中函数 $f(\theta, \phi)$ 是单值函数，在计算体积时用球坐标代替 (x, y, z) 常常是方便的. 如果在变换公式中我们代入雅可比行列式的值

$$\frac{d(x, y, z)}{d(r, \theta, \phi)} = r^2 \sin\theta$$

我们立即得到体积的表示式

$$V = \iiint\limits_R r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{f(\theta,\phi)} r^2 dr.$$

对 r 积分给出

$$V = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} f^3(\theta, \phi) \sin\theta d\theta. \qquad (28b)$$

在球的特殊情况下， $f(\theta, \phi) = R$ 是常数，立即给出体积 $(4/3)\pi R^3$.

c. 曲面的面积

我们曾用常义积分表示过曲线的长度 (第一卷，第 391 页). 现在，我们希望借助于二重积分找到曲面面积的类似的表达式. 我们曾定义曲线的长度为内接多边形的周长当每一边长趋于零时的极限值. 这启发我们类似地定义曲面的面积如下：在曲面上我们内接一个用平面三角形作成的多面体，定出多面体的面积，让多面体的最长的边的长度趋于零，使三角形的内接网格更细密，以此试图求出多面体面积的极限值. 这一极限值就应该称为曲面的面积. 但是，这种面积定义没有确定的意义，因为一般说来上述过程并不给出确

定的极限值. 这种现象可说明如下: 内接于光滑曲线的多边形总有如下的 (由微积分学的中值定理所表示的) 性质: 当分划足够细时, 多边形每一边的方向与曲线的方向可以任意接近. 曲面的情形则大不相同. 内接于曲面的多面体的边对邻近点切平面的倾斜可以任意的陡, 即使多面体的面有任意小的直径亦如此. 因此, 这种多面体的面积决不能看成曲面面积的近似值. 在附录中我们将详细讨论这种情形的一个例子.

然而, 在光滑曲线长度的定义中, 我们可以同样好地用外切多边形, 即它的每一边与曲线相切的多边形去替代内接多边形. 如果首先作如下的修正: 曲线 $y=f(x)$ 有连续的导数 $f'(x)$, 横坐标介于 a 与 b 之间, 将介于 a 与 b 之间的区间用点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 划分为 n 个相等或不等的部分, 在第 ν 个子区间上任选一点 ξ_ν, 作曲线在这一点的切线, 量度这条切线位于长条 $x_\nu \le x \le x_{\nu+1}$ (图 4.14) 中

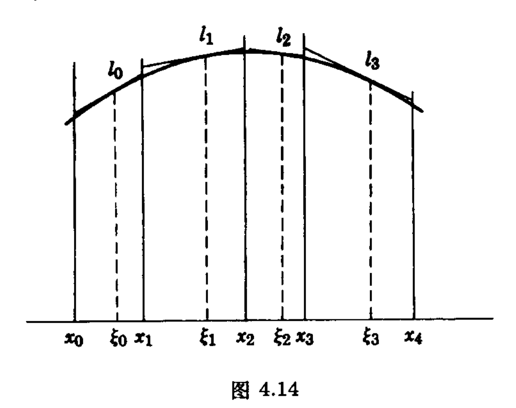


图 4.14

一段的长度 l_ν. 让 n 无限增加同时令最长的子区间长度趋于零, 和数

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} l_\nu$$

就趋于曲线的长度, 即趋于积分

$$\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}dx.$$

这一结果是从

$$L_\nu = (x_{\nu+1} - x_\nu)\sqrt{1 + f'(\xi_\nu)^2}$$

这一事实推出的. 这种将曲线的外切多边形周长的极限作为曲线的长度的定义很容易推广到曲面情形.

现在, 我们类似地来定义曲面的面积. 我们先考虑在 x, y 平面的区域 R 上有连续导数的函数 $z = f(x, y)$ 所表示的曲面. 我们将区域 R 划分为 n 个具有面积 $\Delta R_1, \cdots, \Delta R_n$ 的子区域 $R_1, \cdots, R_n$, 在这些子区域上选取点 $(\xi_1, \eta_1), \cdots, (\xi_n, \eta_n)$. 在以坐标为 $\xi_\nu, \eta_v, \zeta_\nu = f(\xi_\nu, \eta_\nu)$ 的曲面的点上作切平面并求出切平面位于区域 R_ν 之上的那一部分的面积 (图 4.15). 如果 α_ν 是切平面

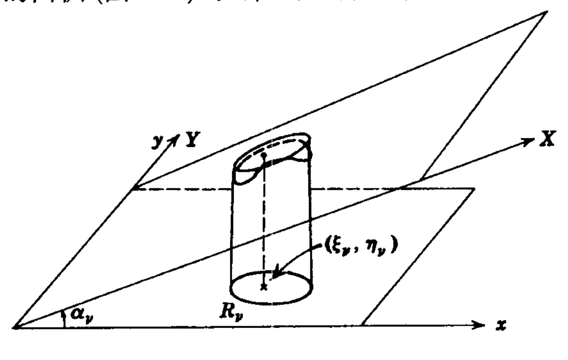


图 4.15

$$z - \zeta_\nu = f_x(\xi_\nu, \eta_\nu)(x - \xi_\nu) + f'_y(\xi_\gamma, \eta_\nu)(y - \eta_\nu)$$

与 x, y 平面的夹角, 又如果 $\Delta\tau_\nu$ 是切平面位于 R_ν 上那部分的面积, 则区域 R_ν, 是 τ_ν 在 x, y 平面的投影 [1]. 因而

$$\Delta R_\nu = \Delta\tau_\nu \cos\alpha_\nu.$$

---

1) 平面集合的面积当把它投影到另一平面时, 要乘上这两个平面的夹角 α 的余弦, 这一事实是一般积分替换公式的推论. 我们可以在两个平面上引入直角坐标系 x, y 和 X, Y, 使得 y 轴和 Y 轴重合. 点 (X, Y) 到 x, y 平面的投影点的坐标是 $x = X\cos\alpha, y = Y$. 从而投影面积是

$$\iint dxdy = \iint \frac{d(x, y)}{d(X, Y)} dXdY = \iint dXdY\cos\alpha.$$

此外 (参看第三章第 260 页)

$$\cos\alpha_\nu = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2(\xi_\nu,\eta_\nu)+f_y^2(\xi_\nu,\eta_\nu)}},$$

因而

$$\Delta\tau_\nu = \sqrt{1+f_x^2(\xi_\nu,\eta_\nu)+f_y^2(\xi_\nu,\eta_\nu)}\cdot\Delta R_\nu.$$

我们求所有这些面积的和

$$\sum_{\nu=1}^{n}\Delta\tau_\nu,$$

令 n 无限增加, 同时令分划的最大直径趋于零. 按照我们的 "积分" 这一定义, 这个和数有极限

$$A = \iint\limits_R \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dR. \tag{29a}$$

这一积分不依赖于区域 R 的分划方式, 现在我们可用它来**定义给定曲面的面积**. 如果曲面恰好是平面, 这一定义与前面的定义一致, 例如, 如果 $z=f(x,y)=0$, 我们有

$$A = \iint\limits_R dR.$$

把符号

$$d\sigma = \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dR = \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dxdy$$

叫做曲面 $z=f(x,y)$ 的**面积元素**有时是方便的. 面积积分用此符号记为

$$\iint\limits_R d\sigma$$

的形式.

如果我们设想用方程 $\phi(x,y,z)=0$ 替代 $z=f(x,y)$ 来给定曲面，我们将得出面积的另一表达式．如果我们假定 $\phi_z\neq 0$，在曲面上等式

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\phi_x}{\phi_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\phi_y}{\phi_z}$$

立即给出面积的表达式

$$\iint\limits_R \sqrt{\phi_x^2+\phi_y^2+\phi_z^2}\left|\frac{1}{\phi_z}\right| dxdy, \tag{29b}$$

其中区域 R 还是曲面在 x,y 平面上的投影．

让我们运用面积公式求球面的面积．方程

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

表示半径为 R 的半球．我们有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

因此整个球面的面积由积分

$$A=2R\iint\frac{dxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

给出，其中积分区域是 x,y 平面上以原点为中心半径为 R 的圆．引入极坐标并将这个积分化为单积分，我们得到

$$A=2R\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\frac{rdr}{\sqrt{R^2-r^2}}=4\pi R\int_0^R\frac{rdr}{\sqrt{R^2-r^2}}.$$

利用替换 $R^2-r^2=u$，容易算出右边的常义积分；我们有

$$A=-4\pi R\sqrt{R^2-r^2}\Big|_0^R=4\pi R^2,$$

这和阿基米德的结果是一致的．

到现在为止，在“面积”的定义中，我们已经挑出来的是坐标 z. 但是，如果曲面是由形如 $x=x(y,z)$ 或 $y=y(x,z)$ 的方程给出的，类似地可用积分

$$\iint\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}dydz \text{ 或 } \iint\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}dxdz$$

表示面积，如果曲面由隐式给出，那么有

$$\iint\sqrt{[\phi_x^2+\phi_y^2+\phi_z^2]}\left|\frac{1}{\phi_y}\right|dzdx \tag{29c}$$

或

$$\iint\sqrt{\phi_x^2+\phi_y^2+\phi_z^2}\left|\frac{1}{\phi_x}\right|dydz. \tag{29d}$$

可以直接验证所有这些表达式都确实准确地定义相同的面积. 为此，我们应用变换

$$x=x(y,z),$$
$$y=y.$$

到积分

$$\iint\frac{\sqrt{\phi_x^2+\phi_y^2+\phi_z^2}}{|\phi_z|}dxdy$$

中去，其中 $x=x(y,z)$ 是从方程 $\phi(x,y,z)=0$ 解出 x 求得的，雅可比为

$$\frac{d(x,y)}{d(y,z)}=\frac{\phi_z}{\phi_x},$$

因此，

$$\iint_R\frac{\sqrt{\phi_x^2+\phi_y^2+\phi_z^2}}{|\phi_z|}dxdy=\iint_{R'}\frac{\sqrt{\phi_x^2+\phi_y^2+\phi_z^2}}{|\phi_x|}dydz,$$

右边的积分区域是曲面在 y,z 平面上的投影 R'.

如果我们想去掉曲面相对于坐标系的位置的任何特殊假定，我们必须将曲面表为参数形式

$$x=\phi(u,v),\quad y=\psi(u,v),\quad z=\chi(u,v),$$

而将曲面的面积表为参数域 R 上的积分. 那么 u,v 平面的一个确定的区域 R 与曲面相对应. 为了在 (29a) 中引入参数 u,v, 我们先考虑曲面在一点附近的那一部分, 在该点处雅可比

$$\frac{d(x,y)}{d(u,v)}=D$$

不等于零. 在这一部分我们可以解出 u 和 v 作为 x 和 y 的函数, 从而得到 (见第 291 页) 它们的偏导数

$$u_x=\frac{\psi_v}{D},\quad v_x=-\frac{\psi_u}{D},$$

$$u_y=-\frac{\phi_v}{D},v_y=\frac{\phi_u}{D}.$$

通过方程

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}u_x+\frac{\partial z}{\partial v}v_x \text{ 和}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}u_y+\frac{\partial z}{\partial v}v_y,$$

我们得到表达式

$$\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}$$
$$=\frac{1}{D}\sqrt{(\phi_u\psi_v-\psi_u\phi_v)^2+(\psi_u\chi_v-\chi_u\psi_v)^2+(\chi_u\phi_v-\phi_u\chi_v)^2}.$$

现在如果我们引入新的自变量 u 和 v, 应用重积分的换元法则 (16b), 第 535 页, 我们求得对应于参数区域 R' 的曲面的那一部分的面积 A'

$$A'=\iint\limits_{R'}\sqrt{(\phi_u\psi_v-\psi_u\phi_v)^2+(\psi_u\chi_v-\chi_u\psi_v)^2+(\chi_u\phi_v-\phi_u\chi_v)^2}dudv,$$

在这个表达式中坐标 x,y 和 z 之间不再出现差别. 因为不管从那一个特殊的非参数表示出发都得出面积的同样的积分表达式, 由此推出这些积分表达式都是相等的而且都表示面积.

至此我们仅考虑了曲面上一个特殊的雅可比不等零的一部分. 但是,三个雅可比中不管那一个不等于零,我们都得到相同的结果. 那么, 如果我们假定曲面上每一点至少有一个雅可比不等于零, 我们就能够将整个曲面划分为如上述的一些部分, 于是发现同一个积分仍然给出整个曲面的面积 A:

$$A = \iint_R \sqrt{(\phi_u\psi_v - \psi_u\phi_v)^2 + (\psi_u\chi_v - \chi_u\psi_v)^2 + (\chi_u\phi_v - \phi_u\chi_v)^2}dudv. \tag{30a}$$

如果我们利用线元素的系数 (参看第三章第 310 页)

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

即利用表达式

$$E = \phi_u^2 + \psi_u^2 + \chi_u^2, \quad F = \phi_u\phi_v + \psi_u\psi_v + \chi_u\chi_v,$$
$$G = \phi_v^2 + \psi_v^2 + \chi_v^2,$$

用参数表示的曲面面积的表达式可引导到另一个值得注意的形式. 经简单计算可证明 (见第 310 页)

$$EG - F^2 = (\phi_u\psi_v - \psi_u\phi_v)^2 + (\psi_u\chi_v - \chi_u\psi_v)^2$$
$$+(\chi_u\phi_v - \phi_u\chi_v)^2. \tag{30b}$$

因此, 我们得到面积的表达式

$$A = \iint \sqrt{EG - F^2}dudv, \tag{30c}$$

和面积元素的表达式

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}dudv. \tag{30d}$$

作为例子, 我们再次考虑半径为 R 的球的面积. 我们现在用参数方程

$$x = R\cos u\sin v, \quad y = R\sin u\sin v,$$
$$z = R\cos v,$$

来表示球面，其中 u 和 v 在区域 $0 \le u \le 2\pi, 0 \le v \le \pi$ 上变化，经简单计算可证明

$$d\sigma = R^2 \sin v du dv, \tag{30e}$$

它再一次给出球面积的表达式

$$R^2 \int_0^{2\pi} du \int_0^{\pi} \sin v dv = 4\pi R^2.$$

更一般地，我们可以把公式 (30d) 应用于由曲线 $z = \phi(x)$ 绕 z 轴旋转而成的旋转曲面．如果我们把 x, y 平面的极坐标看成是曲面的参数 (u, v), 我们得到

$$x = u\cos v, y = u\sin v,$$

$$z = \phi(\sqrt{x^2 + y^2}) = \phi(u).$$

则

$$E = 1 + \phi'^2(u), \quad F = 0, \quad G = u^2,$$

从而面积的表达式为

$$\int_0^{2\pi} dv \int_{u_0}^{u_1} u\sqrt{1 + \phi'^2(u)} du = 2\pi \int_{u_1}^{u_2} u\sqrt{1 + \phi'^2(u)} du. \tag{31a}$$

如果我们引入子午线 $z = \phi(u)$ 的弧长 s 代替 u 作为参数，我们得到旋转曲面面积的表达式

$$2\pi \int_{s_0}^{s_1} u ds, \tag{31b}$$

其中 u 是旋转曲线上对应于 s 的一点到轴的距离 (古鲁金定律；参看第一卷第 420 页).

我们利用这一定律来计算由圆 $(x - a)^2 + z^2 = r^2$ 绕 z 轴旋转而得到的圆环面的表面积 (参看第三章第 313 页). 如果我们引入圆的弧长 s 作为参数，我们有 $u = a + r\cos(s/r)$, 因而面积为

$$2\pi \int_0^{2\pi r} u ds = 2\pi \int_0^{2\pi r} (a + r\cos \frac{s}{r}) ds = 2\pi a \cdot 2\pi r.$$

因此，圆环面的面积等于母圆的周长与圆心描出的路径长度的乘积.

练　习　4.8

1. 计算由

$$\frac{[\sqrt{x^2+y^2}-1]^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}\leq 1(a<1)$$

所确定的立体的体积.

2. 求抛物面 $(x^2/a^2)+(y^2/b^2)=z$ 被平面 $z=h$ 截出的立体的体积.

3. 求椭球面 $(x^2/a^2)+(y^2/b^2)+(z^2/c^2)=1$ 被平面 $lx+my+nz=p$ 截出的立体的体积.

4. (a) 如果 $\theta=f(\phi)$ 是描绘在曲面 $r^2=a^2\cos 2\theta(r,\theta,\phi$ 是空间球坐标) 上的任一封闭曲线，证明此曲线围成的曲面面积等于此曲线在球面 $r=a$ 的投影围成的面积，坐标原点是投影的顶点.

(b) 将面积表为单积分.

(c) 求整个曲面的面积.

5. 求三角形 ABC 绕边 AB 旋转所生成的立体的体积和表面积.

6. 求抛物面 $z=x^2+y^2$ 介于柱面 $x^2+y^2=a$ 和 $x^2+y^2=b$ 之间的曲面的面积，其中

$$a=\frac{1}{4}[(2m-1)^2-1], b=\frac{1}{4}[(2n-1)^2+1],$$

m 和 n 是自然数且 $n>m$.

7. 求柱面 $x^2+z^2=a^2$ 被柱面 $x^2+y^2=b^2$ 截出的曲面面积.

8. 证明正劈锥面

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad z=f(\theta)$$

包含在过 z 轴的两个平面和母线平行于 z 轴而截痕为 $r = f'(\theta)$ 的柱面之间的面积跟它在 $z = 0$ 的正交投影的面积之比为

$$[\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2})] : 1.$$

4.9 在物理中的应用

在 4.4 节 (第 518 页) 中我们已经看到质量概念是怎样跟重积分相联系的. 在这里, 我们将研究其它一些力学概念. 我们从详细研究矩和惯性矩开始.

a. 矩和质心

质量为 m 的质点关于 x, y 平面的矩定义为质量 m 与 z 坐标的乘积 mz, 类似地, 关于 y, z 平面的矩是 mx 而关于 z, x 平面的矩为 my. 几个质点的矩是可加结合的; 即质量为 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 而坐标为 (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), $\cdots, (x_n, y_n, z_n)$ 的质点组的三个矩由下面表示式给出

$$T_x = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu x_\nu, \quad T_y = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu y_\nu, \quad T_z = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu z_\nu. \tag{32a}$$

如果我们处理的质量以连续的密度 $\mu = \mu(x, y, z)$ 分布于空间区域或曲面或曲线, 则像卷一那样, 用极限过程定义分布质量的矩, 因此用积分表示矩. 例如, 在空间中给定一分布. 我们把区域分划为 n 个子区域, 想像每一个子区域的全部质量集中在它的任一点上, 然后形成由这 n 个质点组成的质点组的矩. 我们立刻看到当 $n \to \infty$ 同时子区域的最大直径趋于零时, 和数趋于极限

$$T_x = \iiint\limits_R \mu x dx dy dz, \quad T_y = \iiint\limits_R \mu y dx dy dz,$$

$$T_z = \iiint\limits_R \mu z dx dy dz, \tag{32b}$$

我们把它们称为 体分布的矩.

类似地，如果质量以 $\mu(u,v)$ 分布在由方程 $x=\phi(u,v), y=\psi(u,v), z=\chi(u,v)$ 确定的曲面 S 上，我们定义 面分布的矩 为表达式

$$T_x=\iint\limits_S \mu x d\sigma=\iint\limits_R \mu x\sqrt{EG-F^2}dudv,$$

$$T_y=\iint\limits_S \mu y d\sigma=\iint\limits_R \mu y\sqrt{EG-F^2}dudv,$$

$$T_z=\iint\limits_S \mu z d\sigma=\iint\limits_R \mu z\sqrt{EG-F^2}dudv. \tag{32c}$$

最后，质量密度为 $\mu(s)$ 的空间曲线 $x(s), y(s), z(s)$ 定义为表达式

$$T_x=\int_{s_0}^{s}\mu x ds,\quad T_y=\int_{s_0}^{s_1}\mu y ds,\quad T_z=\int_{s_0}^{s_1}\mu z ds, \tag{32d}$$

其中 s 表弧长.

总质量为 M 分布于区域 R 的物质的质心定义为一个点，它的坐标为

$$\xi=\frac{T_x}{M},\quad \eta=\frac{T_y}{M},\quad \zeta=\frac{T_z}{M}. \tag{32e}$$

所以对空间分布来说，质心坐标的表达式为

$$\xi=\frac{1}{M}\iiint\limits_R \mu x dxdydz,\cdots,$$

其中

$$M=\iiint\limits_R \mu dxdydz.$$

如果质量分布是均匀的， $\mu(x,y,z)=$ 常数，区域的质心称为形心 [1].

---

[1] 显然，形心不依赖于质量密度这一正常数值的选取. 因此，它可以想像为只与区域 R 的形状有关而与质量分布无关的几何概念.

正如我们的第一个例子那样, 考虑质量密度为 1 的均匀半球域 H:

$$x^2+y^2+z^2\leq 1,\quad z\geq 0.$$

两个矩

$$T_x=\iiint\limits_H xdxdydz,\quad T_y=\iiint\limits_H ydxdydz$$

为零, 因为对 x 或对 y 各自的积分值为零. 对于第三个

$$T_z=\iiint\limits_H zdxdydz,$$

我们引入柱坐标 (r,z,θ), 借助于方程

$$z=z,\quad x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,$$

得到

$$\begin{aligned}T_z&=\int_0^1 zdz\int_0^{\sqrt{1-z^2}} rdr\int_0^{2\pi} d\theta=2\pi\int_0^1\frac{1-z^2}{2}zdz\\&=\pi\left(\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}\tag{32f}$$

因为总质量是 $2\pi/3$, 质心的坐标是 $x=0,y=0,z=3/8$.

其次, 我们计算质量密度为 1 半径为 1 的均匀的半球面的质心. 对参数表示式

$$x=\cos u\sin v,\quad y=\sin u\sin v,\quad z=\cos v.$$

从第 562 页的公式 (30e) 计算曲面元素求得

$$d\sigma=\sqrt{EG-F^2}dudv=\sin vdudv.\tag{32g}$$

相应地, 对于三个矩我们得到

$$T_x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 vdv\int_0^{2\pi}\cos udu=0,$$

$$T_y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 v dv \int_0^{2\pi} \sin u du = 0,$$

$$T_z = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v \cos v dv \int_0^{2\pi} du = 2\pi \left. \frac{\sin^2 v}{2} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

因为总质量显然是 2π, 我们知道, 质心位于坐标为 $x = 0, y = 0, z = \frac{1}{2}$ 的点上.

b. 惯性矩

惯性矩的概念推广到质量连续分布的物质同样是明显的. 一个质点关于 x 轴的惯性矩是它的质量和点到 x 轴的距离的平方 $\rho^2 = y^2 + z^2$ 的乘积. 用同样的方法我们定义质量密度为 $\mu(x, y, z)$ 分布于区域 R 的关于 x 轴的惯性矩为表达式

$$\iiint_R \mu(y^2 + z^2) dxdydz. \tag{33a}$$

关于其它轴的惯性矩有类似的表达式. 有时, 关于一个点的惯性矩, 比方说关于原点的, 定义为表达式

$$\iiint_R \mu(x^2 + y^2 + z^2) dxdydz, \tag{33b}$$

关于一个平面的惯性矩, 比方说关于 y, z 平面的, 定义为

$$\iiint_R \mu x^2 dxdydz. \tag{33c}$$

类似地, 面分布的关于 x 轴的惯性矩由

$$\iint_S \mu(y^2 + z^2) d\sigma \tag{33d}$$

给出, 其中 $\mu(u, v)$ 是两参数 u 和 v 的连续函数.

密度为 $\mu(x,y,z)$ 质量分布于区域 R 的物体关于通过点 (ξ,η,ζ) 而平行于 x 轴的轴的惯性矩由表达式

$$\iiint\limits_R \mu[(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]dxdydz \tag{33e}$$

给出.

特别地，如果令 (ξ,η,ζ) 为质心而且回忆质心的坐标的关系式 (32e), 我们立即得到等式

$$\begin{aligned}&\iiint\limits_R \mu(y^2+z^2)dxdydz\\&\qquad=\iiint\limits_R \mu[(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]dxdydz\\&\qquad\quad+(\eta^2+\zeta^2)\iiint\limits_R \mu dxdydz,\end{aligned} \tag{33f}$$

因为物体的任意一个旋转轴可以选为 x 轴，这一等式的意义可以表述如下：

刚体关于任意一个旋转轴的惯性矩等于刚体关于过质心且平行于旋转轴的轴的惯性矩加上总质量与质心到旋转轴距离平方的乘积 (惠更斯定理).

多维区域的惯性矩的物理意义跟卷一第 420 页所讲的完全相同：

绕一轴匀速转动的物体的动能等于角速度平方与惯性矩的乘积的一半.

我们计算一些简单情形的惯性矩.

对于中心在原点、单位半径和单位密度的球 V, 根据对称性可知，它关于任一过原点的轴的惯性矩是

$$I=\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz=\iiint\limits_V (x^2+z^2)dxdydz$$

$$= \iiint\limits_V (y^2 + z^2) dxdydz.$$

如果把三个积分相加，我们得到

$$3I = \iiint\limits_V 2(x^2 + y^2 + z^2) dxdydz.$$

在球坐标系中，

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{3} \int_0^1 r^4 dr \int_0^\pi \sin v dv \int_0^{2\pi} du \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{8\pi}{15}. \end{aligned}$$

对于棱 a, b, c 分别平行于 x 轴，y 轴，z 轴，其密度为单位而质心在原点的梁，我们求出它关于 x, y 平面的惯性矩为

$$\int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} z^2 dz = ab \cdot \frac{c^3}{12}.$$

c. 复合摆

惯性矩概念在复合摆的数学处理中找到了应用. 所谓复合摆是一个刚体，它在重力作用下绕一固定的水平轴振动.

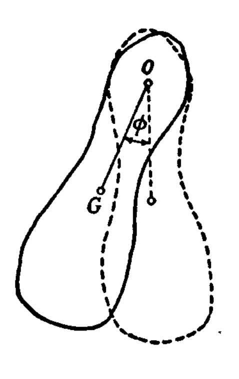


图 4.16

我们考虑一平面，它通过刚体的质心 G 而且垂直于旋转轴；设此平面交轴于点 O(图 4.16). 刚体的运动由作为时间的函数的角度 $\phi=\phi(t)$ 给出，其中 ϕ 是 t 时刻 OG 与过 O 点的铅直线之间的夹角. 为了决定函数 ϕ 和摆的振动周期，我们假定某些物理事实是知道了的 (见 805 页). 我们将运用能量守恒定律，此定律指出，当刚体运动时它的动能和势能的和保持不变. 在这里，刚体势能 V 是乘积 Mgh，其中 M 是总质量，g 是重力加速度，h 是质心高出任一水平线 (例如，通过在运动中质心达到的最低位置的水平线) 的高度. 如果我们记质心到轴的距离 OG 为 s，则 $V=Mgs(1-\cos\phi)$. 由第 584 页，动能为 $T=\frac{1}{2}I\dot{\phi}^2$，其中 I 是刚体关于旋转轴的惯性矩，而且已经将 $\frac{d\phi}{dt}$ 写为 $\dot{\phi}$. 因此，能量守恒定律给出方程

$$\frac{1}{2}I\dot{\phi}^2-Mgs\cos\phi=常数. \tag{34a}$$

如果我们引进常数 $l=I/Ms$，这一方程跟先前对单摆所找到的方程[1] (卷一，第 459 页，461 页) 是完全相同的. 因此，l 叫做**等效单摆的长度**.

现在，我们可以直接利用对于单摆得到的公式 (卷一第 460 页)，**振动周期**由公式

$$T=2\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{-\phi_0}^{\phi_0}\frac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi-\cos\phi_0}}$$

给出，其中 ϕ_0 对应于质心的最大位移；对于小角度近似地有

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgs}}.$$

1) 这里使用的记号，在单摆中质点的运动被表为 $x=l\sin\phi, y=l\cos\phi$，它的速率用 $l\dot{\phi}$ 表示，这里的 ϕ 应满足微分方程

$$\frac{1}{2}(l\dot{\phi})^2-gl\cos\phi=常数.$$

当然, 单摆的公式作为一种特殊情形包含在此公式中, 因为当将整个质量都集中在质心时, 有 $I = Ms^2$, 从而 $l = s$.

为了作进一步的研究, 我们回想一下关于旋转轴的惯性矩 I 与关于过质心而平行于旋转轴的一轴的惯性矩 I_0 是通过关系式 (见 33f)

$$I = I_0 + Ms^2$$

相联系的, 因此

$$l = s + \frac{I_0}{Ms},$$

如果我们引进常数 $a = I_0/M$, 则

$$l = s + \frac{a}{s}.$$

我们立即看出在复合摆中 l 总大于 s, 因此复合摆的周期总是大于将质量 M 集中于质心而得到的单摆的周期. 此外, 对于所有距质心为 s 的平行轴来说周期是相同的, 这是因为等效单摆的长度只依赖于 s 和 $a = I_0/M$ 这两个量. 只要既不改变旋转轴的方向又不改变质心到轴的距离, 它必保持相同的值.

公式

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{s + a/s}{g}}$$

表明, 当 s 趋于零或无穷时周期 T 无限增加, 因此对某个值 s_0, T 必定有最小值. 由微商我们得到

$$s_0 = \sqrt{a} = \sqrt{\frac{I_0}{M}}.$$

一个摆当它的轴距质心 $s_0 = \sqrt{I_0/M}$ 时对轴的微小位移的反应相对地是比较迟钝的, 这是因为在此情况下 dT/ds 为零, 所以 s 的一阶改变仅仅引起 T 的二阶改变. 这一事实已被哥廷根的舒拉教授利用来制造非常准确的钟.

d. 吸引质量的势

在第二章 (第 225 页) 我们已经知道牛顿的引力定律给出了一质量为 m 坐标为 (ξ,η,ζ) 的固定质点 Q 作用于另一个质量为单位坐标为 (x,y,z) 的质点的引力，撇开引力常数不说外，这个引力为

$$m\,\mathrm{grad}\,\frac{1}{r},$$

其中

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$$

是质点 Q 与 P 的距离．力的方向是两质点连线的方向，力的大小与距离的平方成反比．在这里，函数 $f(x,y,z)$ 的梯度是分量为

$$\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}$$

的向量．因此，在我们的情形力的分量为

$$\frac{m(\xi-x)}{r^3},\frac{m(\eta-y)}{r^3},\frac{m(\zeta-z)}{r^3}.$$

如果现在我们考虑的是质量分别为 $m_1,m_2,\cdots,m_n$ 的若干质点 Q_1, $Q_2,\cdots,Q_n$ 作用于 P 点的力，我们可以将合力表为

$$\frac{m_1}{r_1}+\frac{m_2}{r_2}+\cdots+\frac{m_n}{r_n}$$

的梯度，其中 r_ν 表示点 P 到点 Q 的距离．如果一力能表示为一个函数的梯度，通常称此函数为 **力的势** [1]；相应地我们定义质点组 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_n$ 在点 P 的 **重力势** 为表示式

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{m_\nu}{\sqrt{(x-\xi_\nu)^2+(y-\eta_\nu)^2+(z-\zeta_\nu)^2}}.$$

现在，我们假定以密度 μ 分布于空间的一部分 R 或曲面 S 或曲线 C 的引力质量来代替集中于有限个点上的引力质量，那么，

1) 经常把这个函数取负号 —— 它具有势能的意义 —— 称为力的势.

这个分布质量在这个质量系统之外而坐标为 (x,y,z) 的点的势定义为

$$\iiint\limits_R \frac{\mu(\xi,\eta,\zeta)}{r}d\xi d\eta d\zeta, \tag{35a}$$

或

$$\iint\limits_S \frac{\mu}{r}d\sigma, \tag{35b}$$

或

$$\int_{s_0}^{s_1} \frac{\mu}{r}ds. \tag{35c}$$

在第一种情形，积分遍取直角坐标为 (ξ,η,ζ) 的整个区域 R; 在第二种情形，遍取以 $d\sigma$ 为面元为整个曲面 s; 而在第三种情形为沿以 s 为弧长的曲线. 在上述三个公式中，r 都表示积分区域内一点 (ξ,η,ζ) 到点 P 的距离，而 μ 表示在点 (ξ,η,ζ) 处的质量密度. 在每一种情形吸引力可通过势对 x,y,z 求一阶导数而得到. 宁可去求势而不求力，其优点是只要算一个积分而不用去算三个积分，而力的三个分量可作为势的导数而得到.

例如，均匀密度为 1 的半径为单位而中心在原点的球 K 在坐标为 (x,y,z) 的点 P 处的势为积分

$$\iiint\limits_K \frac{d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}$$

$$=\int_{-1}^{1}d\xi\int_{-\sqrt{1-\xi^2}}^{+\sqrt{1-\xi^2}}d\eta\int_{-\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}}^{+\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}}\frac{1}{r}d\zeta.$$

在所有的表达式 (35a,b,c) 中点 P 的坐标 (x,y,z) 不作为积分变量而作为参数出现，而势是这些参数的函数.

为从势得到力的分量，我们必须将积分对参数求微商. 对参数求微商的法则可以直接推广到重积分，而且由第 82 页，只要点 P 不属于积分区域，这就是说，只要我们确信在积分的闭区域内没有一个点使距离 r 的值为零，微商就可以在积分号下进行. 因此，作

为例子，我们求得在空间中密度为单位的分布于区域 R 的质量分布作用于单位质量上的重力分量的表达式由

$$
\begin{aligned}
F_1 &= -\iiint\limits_R \frac{x-\xi}{r^3} d\xi d\eta d\zeta, \\
F_2 &= -\iiint\limits_R \frac{y-\eta}{r^3} d\xi d\eta d\zeta, \\
F_3 &= -\iiint\limits_R \frac{z-\zeta}{r^3} d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned}
\tag{36}
$$

给出.

最后，我们指出当点 P 位于积分区域内部时势的表达式以及它的微商仍然有意义，然而积分是广义积分，而且它们的收敛性容易从 4.7 节的准则推出.

作为一种说明，我们计算由于半径为 a, 密度为单位的球面而引起的在球内的点及球外的点处的势. 如果我们取球心为原点而且令 x 轴通过 P 点 (在球内或球外), 点 P 有坐标 $(x,0,0)$ 而势为

$$U = \iint \frac{d\sigma}{\sqrt{(x-\xi)^2+\eta^2+\zeta^2}}.$$

如果我们通过方程

$$\xi = a\cos\theta, \eta = a\sin\theta\cos\phi, \zeta = a\sin\theta\sin\phi,$$

在球面上引入球坐标，则 [见 (30e), 第 562 页]

$$
\begin{aligned}
U &= \int_0^\pi \frac{a^2\sin\theta}{\sqrt{(x-a\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\
&= 2\pi \int_0^\pi \frac{a^2\sin\theta}{\sqrt{x^2+a^2-2ax\cos\theta}} d\theta,
\end{aligned}
$$

我们令 $x^2+a^2-2ax\cos\theta = r^2$, 所以 $ax\sin\theta d\theta = rdr$ 而且 (只要 $x \neq 0$) 积分变为

$$U = \frac{2\pi a}{x}\int_{|x-a|}^{|x+a|} \frac{rdr}{r} = \frac{2\pi a}{x}(|x+a|-|x-a|).$$

对于 $|x| > a$ 我们有

$$U = \frac{4\pi a^2}{|x|},$$

而对于 $|x| < a$,

$$U = 4\pi a.$$

因此, 在外部点的势都是相同的, 就好像把所有的质量 $4\pi a$ 集中在球心时那样. 另一方面, 在整个内部势是一常数. 在球面上势是连续的, U 的表达式仍有意义 (作为广义积分) 而且值为 $4\pi a$. 但是, 在 x 轴方向力的分量 F_x 在球面上有一个大小为 -4π 的跳跃, 因为当 $|x| > a$ 时, 我们有

$$F_x = -\frac{4\pi a^2}{x^2}\operatorname{sgn} x,$$

而当 $|x| < a$ 时 $F_x = 0$.

密度为单位的球体的势可以由球面的位势对 a 进行积分而求出, 这给出外部一点的势的值

$$\frac{4\pi a^3}{3|x|}.$$

这仍然和总质量 $(4/3)\pi a^3$ 集中于中心的结果相同. 对 x 求微商我们求得正 x 轴上一点的

$$F_x = -\frac{4\pi a^3}{x^2}.$$

这是牛顿的结果, 即常密度的球体作用于外部一点的引力和把球的质量集中于球心所得的结果相同.

练 习 4.9

1. (a) 求正圆锥体的形心的位置.

(b) 锥的表面的形心的位置在哪里?

2. 求抛物面 $z^2+y^2=px$ 被平面 $x=x_0$ 截出的一部分的形心的位置，其中 $x_0<0$.

3. 求由三个坐标平面和平面 $x/a+y/b+z/c=1$ 围成的四面形的形心.

4. (a) 求半球壳 $a^2\le x^2+y^2+z^2\le b^2, z\ge 0$ 的形心.

(b) 证明半球片 $x^2+y^2+z^2=a^2, z\ge 0$, 的形心是 (a) 的形心当 b 趋于 a 时的极限位置.

5. 求质量为 m 的均匀的长方体 $0\le x\le a, 0\le y\le b, 0\le z\le c$ 关于 z 轴的惯性矩.

6. 计算由两个圆柱

$$x^2+y^2=R \text{ 和 } x^2+y^2=R'$$

以及两个平面 $z=h$ 和 $z=-h$ 围成的均匀立体的惯性矩.

(a) 关于 z 轴的,

(b) 关于 x 轴的.

7. 求球的质量和球关于一直径的惯性矩，球的密度随到球心的距离的增加而线性地减少，从中心的 μ_0 变到球面上的 μ_1.

8. 求椭球 $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$ 的惯性矩.

(a) 关于 x 轴,

(b) 关于过原点而由

$$x=y:z=\alpha:\beta:\gamma(\alpha^2+\beta^2+r^2=1)$$

给出的任一轴.

9. 设 A, B, C 是密度为正的任一固体关于 x 轴， y 轴和 z 轴的惯性矩，则“三角不等式”

$$A+B>C, A+C>B, B+C>A$$

满足.

10. 令 O 是任意一点而 S 是任一物体. 在所有从 O 出发的半射线上取与 O 点相距为 $1/\sqrt{I}$ 的点，其中 I 表示 S 关于和半射线

相重合的直线为轴的惯性矩. 证明这些点构成一椭球 (称为惯量椭球).

11. 求椭球 $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \leq 1$ 在点 (ξ, η, ζ) 的惯量椭球.

12. 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的质心的坐标, 其密度由

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}}$$

给出.

13. 求椭球

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \leq 1 (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$$

的八分之一的质心的 x 坐标.

14. 一质点组 S 包含两个部分 S_1 和 S_2, I_1, I_2, I 分别是 S_1, S_2 和 S 关于通过各自的质心的三个平行轴的惯性矩. 证明

$$I = I_1 + I_2 + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} d^2,$$

其中 m_1 和 m_2 是 S_1 和 S_2 的质量而 d 是通过它们的质心的轴之间的距离.

15. 求平面的包络, 对这些平面来说, 椭球

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \leq 1$$

关于它们的惯性矩相同为 h.

16. 计算均匀旋转椭球

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1 (b > a)$$

在它的中心处的势.

17. 计算旋转体

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \leq f(z) (a \leq z \leq b)$$

在原点处的势.

18. 证明固体 S 在足够远的距离处的势近似于将相同的总质量集中于它的重心的质点的势, 而误差小于某一常数除以距离的平方.

19. 假定地球是一半径为 R 的球, 在离中心的距离为 r 处的密度为

$$\rho = A - Br^2,$$

且在球面上的密度等于水的密度的 $2\frac{1}{2}$ 倍而平均密度是水的 $5\frac{1}{2}$ 倍, 证明在一内点处的引力等于

$$\frac{1}{11}g\frac{r}{R}(20 - 9\frac{r^2}{R^2}),$$

其中 g 是在球面的重力的值.

20. 半径为 a 密度均匀为 ρ 的半球, 它的中心置于原点, 使它整个地位于 x, y 平面的正侧. 证明在点 $(0, 0, z)$ 处的势是

$$\frac{2\pi\rho}{3z}[(a^2 + z^2)^{3/2} - a^3 + \frac{3}{2}a^2 z] - \frac{4}{3}\pi\rho z^2, \qquad \text{若} 0 < z < a,$$

$$\text{和}\frac{2\pi\rho}{z}[(a^2 + z^2)^{3/2} - a^3 - \frac{3}{2}a^2 z] - \frac{2}{3}\pi\rho z^2, \qquad \text{若} z > a.$$

21. 令 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 是面积为 A 的三角形的顶点(下标的顺序给定为正向). 证明三角形关于 x 轴的惯性矩为

$$\frac{A}{6}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1).$$

22. 证明密度为 ρ, 半轴为 a, a, c 的均匀椭球体在任一极点处的引力等于

$$2\pi\rho\int_0^{2c} r(1 - \cos\theta)dr,$$

其中

$$r = 2a^2 c\cos\theta/(a^2\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta).$$

23. 从实验知道，充电导体薄球片 (电荷均匀地分布于这样的球面上) 对球内点电荷的作用力为零. 假定点电荷之间排斥或吸引的力仅仅依赖于它们之间的距离，证明这一实验蕴涵着库仑定律，即点电荷相互吸引或排斥的力反比于它们之间距离的平方. 这一结果是均匀薄球片在它内部重力为零这一定理的逆定理.

4.10 在曲线坐标中的重积分

a. 重积分的分解

如果 x,y 平面上的区域 R 被曲线族 $\phi(x,y)=$ 常数所盖满，使得区域 R 的每一点落在曲线族中唯一的一条曲线上，我们可以取量 $\phi(x,y)=\xi$ 作为一个新的自变量；这就是说，我们可以取由 $\phi(x,y)=$ 常数 $=\xi$ 所表示的曲线 C_ξ 作为坐标网格的两个曲线族中的一族.

对于第二个自变量我们可以选量 $\eta=y$, 只要我们对区域加上如下的限制，即在区域内每一对曲线 $\phi(x,y)=$ 常数和 $y=$ 常数交于一点.

如果我们引入这些新自变量，二重积分 $\iint\limits_R f(x,y)dxdy$ 变为[见 (16b), 第 535 页]

$$\iint f(x,y)dxdy=\iint \frac{f(x,y)}{|\phi_x|}d\xi d\eta.$$

保持 ξ 为常数而将右边积分中的被积函数对 η 积分，对 η 的积分可表为如下形式:

$$\int \frac{f(x,y)}{\sqrt{\phi_x^2+\phi_y^2}}\cdot\frac{\sqrt{\phi_x^2+\phi_y^2}}{|\phi_x|}d\eta,$$

因此在 C_ξ 上,

$$\frac{ds}{d\eta}=\sqrt{1+(\frac{dx}{dy})^2}=\frac{\sqrt{\phi_x^2+\phi_y^2}}{|\phi_x|},$$

可以把这一积分看作是沿曲线 $\phi(x,y)=\xi$ 的积分，弧长 s 成为积分变量. 于是，我们得到二重积分的分解

$$\iint f(x,y)dxdy=\int d\xi\int_{C_\xi}\frac{f(x,y)}{\sqrt{\phi_x^2+\phi_y^2}}ds. \tag{37a}$$

如果我们假定对应于曲线 C_ξ, 存在一族正交曲线 (所谓的正交轨线), 这些曲线与每一条分离的曲线 $\phi=$ 常数交于直角并沿着 gradϕ 的方向，这种分解的直观意义是很容易看出来的. 如果 σ 是由函数 $x(\sigma)$ 和 $y(\sigma)$ 表示的一条正交曲线的弧长，则

$$\frac{dx}{d\sigma}=\frac{\phi_x}{\sqrt{\phi_x^2+\phi_y^2}},\quad \frac{dy}{d\sigma}=\frac{\phi_y}{\sqrt{\phi_x^2+\phi_y^2}}.$$

因为

$$\frac{d\xi}{d\sigma}=\phi_x\frac{dx}{d\sigma}+\phi_y\frac{dy}{d\sigma},$$

我们得到

$$\frac{d\xi}{d\sigma}=\sqrt{\phi_x^2+\phi_y^2}=\sqrt{(\mathrm{grad}\phi)^2}. \tag{37b}$$

我们现在来考虑一网格，它由两条曲线 $\phi(x,y)=\xi,\phi(x,y)=\xi+\Delta\xi$ 以及从曲线 $\phi(x,y)=\xi$ 截出长度为 Δs 的两条正交曲线所围成 (图 4.17), 这一网格的面积近似地由乘积 $\Delta s\Delta\sigma$ 给出，也近似地等于

$$\frac{\Delta s\Delta\xi}{\sqrt{\phi_x^2+\phi_y^2}}.$$

这引出恒等式 (37a) 的一个新的解释;

计算二重积分时可以不将区域剖分为边平行于坐标轴的“无穷小矩形”，我们可以剖分为由曲线 $\phi(x,y)=$ 常数和它们的正交轨线所确定的无穷小曲边矩形.

在三维空间中可以实行一种类似的分解. 如果区域 R 被方程 $\phi(x,\,y,\,z)=$ 常数 $=\xi$ 给出的曲面族 S_ξ 所盖住，使得 R 的每一点

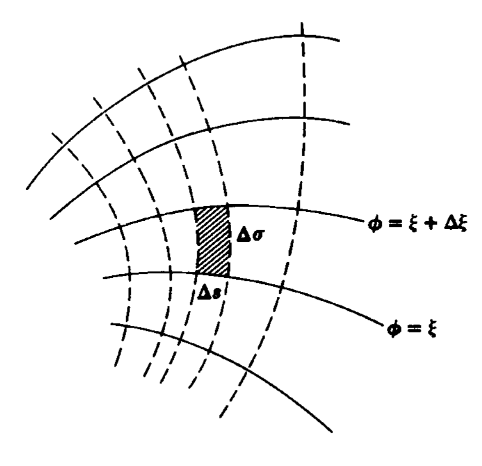


图 4.17

有且仅有一曲面通过它，那么我们可以取量 $\xi = \phi(x, y, z)$ 作为一个积分变量. 用这样的方法可以从三重积分

$$\iiint_R f(x,y,z)dxdydz$$

$$= \int d\xi \iint \frac{f(x,y,z)}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2}} \cdot \frac{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2}}{|\phi_x|} dydz$$

分解出一个在曲面 $\phi = \xi$ 上面积元素为

$$dS = \frac{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2}}{|\phi_x|} dydz$$

的积分

$$\iint_{S_\xi} \frac{f(x,y,z)}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2}} dS$$

[见 (29d), 第 559 页], 接着对 ξ 积分:

$$\iiint f(x,y,z)dxdydz = \int d\xi \iint_{S_\xi} \frac{f(x,y,z)}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2}} dS. \qquad (37c)$$

如果我们引入一个双参数的曲线族，它们在每一点上与曲面 $\xi=$ 常数正交，并且除 S_ξ 外，还利用由那些曲线组成的坐标面，那么这个公式还可以有一个几何解释.

b. 应用到移动曲线扫过的面积和移动曲面扫过的体积. 古鲁金公式. 配极求积仪

如果我们把参数 ξ 等同于时间 t, 公式 (37a,b) 中出现的量

$$\frac{d\sigma}{d\xi}=\frac{1}{\sqrt{\phi_x^2+\phi_y^2}}$$

可作运动学上的解释. 方程 $\phi(x,y)=$ 常数 $=t$ 表示移动曲线 C_t 在时刻 t 的位置. 沿着与 C_t 正交的曲线量度的距离 $\Delta\sigma$ 可以看作是曲线 C_t 与曲线 $C_{t+\Delta t}$ 之间的法向距离, 于是

$$C=\frac{d\sigma}{dt}=\frac{1}{\sqrt{\phi_x^2+\phi_y^2}} \tag{38a}$$

是移动曲线 C_t 在时刻 t 的法向速度. 在 C_t 的不同点上速度是不同的. 类似地, 方程为 $\phi(x,y,z)=$ 常数 $=t$ 的在空间中移动的曲面 S_t 的法向速度是

$$c=\frac{1}{\sqrt{\phi_x^2+\phi_y^2+\phi_z^2}}. \tag{38b}$$

在物理上, 这样的移动曲面作为波前出现 (例如在介质中传播的电磁波).

如果 S_t 是由单个的移动质点组成的, 移动曲面 S_t (类似地在平面上的移动曲线 C_t) 的法向速度 c 有特别简单的意义. 如果这些质点中的一个质点的位置由三个函数 $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$ 表示, 又如果质点在任何时间里都停留在曲面上, 方程

$$\phi(x(t),y(t),z(t))=t$$

在任何时刻 t 都一定成立. 对 t 微商我们求得方程

$$1 = \phi_x \frac{dx}{dt} + \phi_y \frac{dy}{dt} + \phi_z \frac{dz}{dt}.$$

如果方程除以 ϕ 的梯度的长度, 我们得到关系式

$$c = \pm(\xi \frac{dx}{dt} + \eta \frac{dy}{dt} + \zeta \frac{dz}{dt}), \tag{38c}$$

其中 c 是由 (38b) 定义的法向速度, ξ, η, ζ 是 S_t 的一个法方向的方向余弦, 而正负号取决于法线指向 t 的增加或减少的方向而定. 如果我们引入单位法向量

$$\mathbf{n} = (\xi, \eta, \zeta)$$

和质点的速度向量

$$\mathbf{v} = (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}),$$

我们可以将 c 表为数量积

$$c = \pm \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}. \tag{38d}$$

总之, **和曲面一起移动的质点的速度的垂直于曲面 S_t 的分量等于 $\pm c$, 其中 c 是 S_t 的法向速度. 当 $\mathbf{n}$ 是 S_t 的“向前”法向量——面向紧接着的下一时刻要扫过的点的曲面的那一侧的法向量——时, 正号成立.**

当 $f = 1$ 时, 公式 (37c) 给出一个由法向速度为 c 的移动曲面所扫过的区域的体积表达式

$$V = \iiint dxdydz = \int dt \iint_{S_t} cdS. \tag{39a}$$

类似地, 我们求得由平面上移动曲线 C_t 所扫过的区域的面积 A 的表示式

$$A = \int dt \int_{C_t} cds. \tag{39b}$$

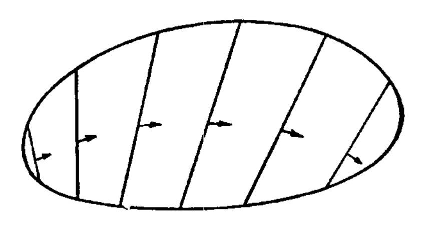


图 4.18

我们把这些结果应用到在平面上移动的直线段 C_t 所扫过的面积的情形 (图 4.18). 线段可用形如

$$\xi(t)x+\eta(t)y=p(t) \tag{40a}$$

的方程来表示, 其中 (ξ,η) 是单位法向量而 P 是 C_t 到原点的 (定号) 距离. C_t 的中心 (与它的形心是相同的) 位于点 [见 (32e), 第 565 页]

$$X(t)=\frac{\displaystyle\int_{C_t} xds}{\displaystyle\int_{C_t} ds},\quad Y(t)=\frac{\displaystyle\int_{C_t} yds}{\displaystyle\int_{C_t} ds}. \tag{40b}$$

(40a) 对 s 在线段 C_t 上积分给出关系式

$$\xi(t)X(t)+\eta(t)Y(t)=p(t), \tag{40c}$$

这只是说明 C_t 的中心位于 C_t. 如果把 C_t 设想为由单个移动质点所组成, 这些质点的速度的法向分量由 (40a),(38c) 求得, 为

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}=\xi\frac{dx}{dt}+\eta\frac{dy}{dt}=\frac{dp}{dt}-\frac{d\xi}{dt}x-\frac{d\eta}{dt}y.$$

于是, 由 (40b),(40c), 有

$$\pm\int_{C_t} cds=\int_{C_t}\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}ds=(\frac{dp}{dt}-\frac{d\xi}{dt}X-\frac{d\eta}{dt}Y)\int_{C_t} ds$$

$$=(\xi\frac{dX}{dt}+\eta\frac{dY}{dt})\int_{C_t} ds=\mathbf{w}\cdot\mathbf{n}L,$$

其中 [1)]

$$\mathbf{w} = (\frac{dX}{dt}, \frac{dY}{dt})$$

是线段 C_t 的中心 (X,Y) 的速度向量，而

$$L = L(t) = \int_{C_t} ds$$

是 C_t 的长度. 从 (39b) 推出移动线段 C_t 所扫过的面积是

$$A = \int \pm L\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dt. \tag{41a}$$

用同样的方法，求得面积为 $A(t)$ 而单位法向量为 $\mathbf{n}$ 的移动的平面区域 S_t 所扫过的体积为

$$V = \int \pm A\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dt, \tag{41b}$$

其中 $\mathbf{w}$ 是 S_t 的形心 (X,Y,Z) 的速度. 在这些公式中，当 $\mathbf{n}$ 是 S_t 的"向前法向量"即指向运动方向的那个法向量时取正号.

特别有趣的是 S_t 的形心沿着一条每一时刻都垂直于平面 S_t 的曲线移动时公式 (41b) 的情形. 这时，形心速度的法向量分量和形心沿其路径移动的速率相重合:

$$\pm \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = \frac{d\sigma}{dt},$$

其中 σ 是沿形心路径的弧长. 从而推出

$$V = \int A\frac{d\sigma}{dt}dt = \int A d\sigma. \tag{42a}$$

此外，如果所有平面区域 S_t 具有相同的面积 A, 我们求得

$$V = A\int d\sigma, \tag{42b}$$

1) 如果我们从函数 t 的隐方程 (40a) 求函数 $t = \phi(x,y)$ 对 x 与 y 的一阶导数，对 c 利用表达式 (38a) 可以导出相同的公式.

即 S_t 扫过的体积等于它们的面积 A 乘它们的形心所描绘的路径的长度. 一个特殊情形显然是平面区域 R 绕此平面上一轴旋转所扫过的旋转体体积的古鲁金公式. 体积等于 R 的面积乘转动时 R 的形心所描绘的路径的长度 (见卷一第 420 页).

回到公式 (41a), 我们知道积分

$$\int L\mathbf{w}\cdot\mathbf{n}dt \tag{43a}$$

表示线段 C_t 所扫过的定号面积, 符号取决于法向量 $\mathbf{n}$ 指向运动方向或相反方向. 对于与移动平面面积所扫过的体积相对应的积分

$$\int A\mathbf{w}\cdot\mathbf{n}dt \tag{43b}$$

同样的结论成立.

这些观察结果允许我们把我们的结果推广到如下情形: 线段或平面面积并不总是在一个方向上移动或者多次覆盖平面 (或空间) 的一部分. 那么上面所给的积分将表示所描绘的区域的那些部分的面积 (或体积) 的代数和, 每一部分取适当符号.

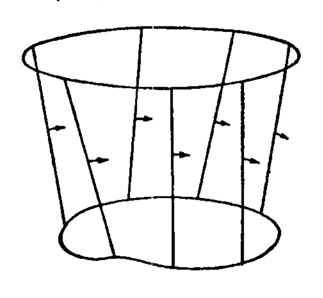


图 4.19

作为例子, 令一个有固定长度的线段的端点总是固定在平面上的两条曲线 Γ 和 Γ' 上移动, 如图 4.19, 从简头指示的法线正向, 我们可以确定积分中出现的每一个面积的符号. 我们发现积分给出由 Γ 和 Γ' 围成的面积之差. 如果 Γ' 包围的面积为零, 例如当它退化为多次扫描过的单一的线段时, 这个积分给出 Γ 围成的面积.

这一原理被用来制造著名的配极求积仪 (昂斯拉的求积仪). 这是一种测量平面面积的机械仪器. 它包含一根刚性的杆, 在杆的中心是一个能在绘图纸上滚动的测量轮. 轮的平面垂直于杆. 当使用仪器测量描绘在纸上由曲线 Γ 围成的面积时, 杆的一个端点环绕曲线移动, 同时杆的另一端点铰接在一刚性的臂上, 臂的另一端绕一固定点 O 转动, O 是在曲线 Γ 外的极点, 因此, 杆被铰接的一端重复地描绘一个圆的弧段, 即包围零面积的闭曲线. 由此推出在这里的表示式 (43a) 给出了 Γ 所包围的面积. 但是, 被积函数 $L\mathbf{w}\cdot\mathbf{n}$ 与测量轮转动的角速度成正比, 只要杆运动时轮的周边在纸上移动, 此时轮的位置仅仅受垂直于杆的运动的影响, 因此轮子转过的总角度正比于曲线 Γ 所围成的面积.

在通常制造的仪器中轮子不一定准确地在杆的中心上, 但这只改变结果中的比例因子, 而这个因子可以由仪器的校准刻度中直接确定.

4.11 任意维数的体积和曲面面积

a. 高于三维的曲面面积和曲面积分

在 n 维空间中由 n 个坐标 $x_1,\cdots,x_n$ 所描述的 $(n-1)$ 维曲面 (超曲面或流形) 是由一个隐式方程

$$\phi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\text{常数} \tag{44a}$$

定义的, 在曲面的每一点上至少有一个 ϕ 的一阶导数不为零. 我们假定这个曲面的一部分 S 对应于 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$ 空间的某一区域 B , 在其上 $\dfrac{\partial\phi}{\partial x_n}\neq 0$, 因而从方程 (44a) 可解出 x_n 为其它坐标的函数.

我们现在把曲面这一部分的 $(n-1)$ 维测度定义为积分

$$A=\iint\limits_B\cdots\int\frac{\sqrt{\phi_{x_1}^2+\phi_{x_2}^2+\cdots+\phi_{x_n}^2}}{|\phi_{x_n}|}dx_1dx_2\cdots dx_{n-1}. \tag{44b}$$

这一定义是三维空间中曲面面积公式 (29b)(第 558 页) 的一种形式推广，并且可以以类似的直观论证为其基础. 当没有混淆的危险时，我们同样地把 n 维空间中的超曲面情形时的 A 简单地称为“面积”. 曲面，曲面面积和曲面积分的更为系统的讨论将在下一章给出. 目前，我们只是注意到由 (44b) 定义的量 A 不依赖于 x_n 的选取，而 x_n 是由方程 (44a) 解出的. 这可用第 558 页三维空间情形所用过的方法类似地作出证明.

更为一般地，我们定义函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在这个 $(n-1)$ 维曲面上的积分为

$$\iint\limits_S\cdots\int f(x_1,\cdots,x_n)d\sigma$$

$$=\iint\limits_B\cdots\int f(x_1,\cdots,x_n)\frac{\sqrt{\phi_{x_1}^2+\cdots+\phi_{x_n}^2}}{|\phi_{x_n}|}dx_1dx_2\cdots dx_{n-1}. \tag{44c}$$

同前面一样，在这里我们假定借助于方程 (44a)，x_n 已被 $x_1,\cdots,x_{n-1}$ 表示. 我们再次发现表示式 (44c) 的值与变量 x_n 的选取无关.

如同二维或三维情形那样，在 n 维区域 R 上的多重积分

$$\iint\limits_R\cdots\int f(x_1,\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_n. \tag{45a}$$

可以分解为曲面积分 [见公式 (37a,c)]. 我们假定区域被超曲面族 S_ξ

$$\phi(x_1,\cdots,x_n)=\text{常数}=\xi \tag{45b}$$

以如下方式覆盖：使得对 R 的每一点有且仅有一张曲面通过它. 如果我们用新的变量

$$x_1,\cdots,x_{n-1},\xi=\phi(x_1,\cdots,x_n)$$

来代替 $x_1,\cdots,x_{n-1},x_n$，由积分的换元法则 (第 536 页)，重积分 (45a) 变为

$$\int d\xi\int\cdots\int\frac{f(x_1,\cdots,x_n)}{|\phi_{x_n}|}dx_1\cdots dx_{n-1}.$$

应用公式 (44c), 我们得到公式

$$\iint\limits_R \cdots \int f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

$$= \int d\xi \int_{S_\xi} \cdots \int \frac{f(x_1, \cdots, x_n)}{\sqrt{\phi_{x_1}^2 + \cdots + \phi_{x_n}^2}} d\sigma, \tag{45c}$$

其中

$$d\sigma = \frac{\sqrt{\phi_{x_1}^2 + \cdots + \phi_{x_n}^2}}{|\phi_{x_n}|} dx_1 \cdots dx_{n-1} \tag{45d}$$

是曲面 S_ξ 的面积元素.

b. n 维空间中的球体面积和体积

作为将体积化为曲面积分的公式 (45c) 的一个应用, 我们将计算 n 维空间中半径为 R 的球的面积和体积, 这就是计算方程为

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = R^2 \tag{46a}$$

的超曲面的面积和球

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq R^2 \tag{46b}$$

的体积.

首先, 我们导出一个一般的公式, 它将具有球对称的函数的空间积分化为单重积分. 我们说变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的函数 f 具有球对称性, 如果

$$f = f(r),$$

其中

$$r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}. \tag{46c}$$

就是说, 在中心位于原点的球面上, f 的值是常数. 中心位于原点半径为 r 的球面的方程由

$$\phi(x_1, \cdots, x_n) = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \text{常数} = r \tag{46d}$$

给定. 这里,

$$\phi_{x_i} = \frac{1}{r}x_i; \quad \sqrt{\phi_{x_1}^2 + \cdots + \phi_{x_n}^2} = 1. \tag{46e}$$

那么, 我们从 (45c) 得到函数 $f(r)$ 在球 (46b) 上的体积分, 即

$$\iint \cdots \int f(r)dx_1 \cdots dx_n = \int_0^R f(r)dr \int_{S_r} \cdots \int d\sigma \tag{46f}$$

$$= \int_0^R f(r)\Omega_n(r)dr,$$

其中 $\Omega_n(r)$ 是球面 S_r 的面积. 这里, 由 (44b),(46e), 半球面

$$\phi = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = r(x_n \geq 0)$$

的面积是

$$\frac{1}{2}\Omega_n(r) = r\int_{B_r} \cdots \int \frac{dx_1 \cdots dx_{n-1}}{x_n}, \tag{47a}$$

其中积分是展布在由

$$x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leq r^2$$

给出的 $(n-1)$ 维球 B_r 上, 而

$$x_n = \sqrt{r^2 - x_1^2 \cdots x_{n-1}^2}.$$

用新变量

$$\xi_i = \frac{1}{r}x_i(i = 1, \cdots, n-1)$$

代替 B_r 中的 $x_1, \cdots, x_{n-1}$, 而且令

$$\xi_n = \frac{1}{r}x_n = \sqrt{1 - \xi_1^2 - \cdots - \xi_{n-1}^2},$$

从 (47a) 我们得到

$$\Omega_n(r) = 2r^{n-1}\int \cdots \int \frac{d\xi_1 \cdots d\xi_{n-1}}{\xi_n}, \tag{47b}$$

其中积分是在 $n-1$ 维的单位球

$$\xi_1^2+\cdots+\xi_{n-1}^2\le 1$$

上进行的. 公式 (47b) 可写为

$$\Omega_n(r)=\omega_n r^{n-1}, \tag{47c}$$

其中

$$\omega_n=2\iint\cdots\int\frac{d\xi_1\cdots d\xi_n}{\xi_n}=\Omega_n(1)$$

是 n 维单位球 S_1 的面积. 这表示直观上似乎有理的事实, 即 n 维球的面积与它们的半径的 $(n-1)$ 次幂成正比. 球对称函数在球 (46b) 上的空间积分的公式 (46f) 现在取如下形式

$$\iint\cdots\int f(r)dx_1\cdots dx_n=\omega_n\int_0^R f(r)r^{n-1}dr. \tag{48a}$$

从这一公式我们能方便地计算 ω_n. 我们选取函数 $f(r)$ 使当 $R\to\infty$ 时上式右边的积分绝对收敛而且能明显地计算出来. 因此作为 $x_1,\cdots,x_n$ 的函数 $f(r)$ 在全空间的反常积分也是收敛的. 我们选 f 为函数 [1)]

$$f(r)=\exp(-r^2)=\exp(-x_1^2-\cdots-x_n^2).$$

f 在全空间的积分是 f 在立方体 C_a 积分的极限, 其中 C_a 为中心在原点, 边平行于坐标轴而边长为 $2a$ 的立方体. 此时,

$$\begin{aligned}\iint_{C_a}\cdots\int f(r)dx_1\cdots dx_n\\ &=\int_{-a}^{a}dx_1\int_{-a}^{a}dx_2\cdots\int_{-a}^{a}dx_n\exp(-x_1^2)\\ &\quad\times\exp(-x_2^2)\cdots\exp(-x_n^2)\end{aligned}$$

1) 在指数 z 为较复杂的表示式时, 可将指数函数 e^z 方便地写为 $\exp(z)$.

$$=(\int_{-a}^{a} e^{-x^2} dx)^n.$$

于是，当 $a \to \infty$ 时，我们从 (48a) 得到恒等式

$$(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx)^n = \omega_n \int_0^{\infty} e^{-r^2 r^{n-1}} dr. \tag{48b}$$

对 $n = 2$ 的特殊情形，用与第 548 页类似的论证这一公式早已被导出过并导致结果 [见 (25a)]

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \tag{48c}$$

另一方面，替换 $r^2 = s$ 表明

$$\int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{n-1} dr = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-s} s^{(n-2)/2} ds = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{n}{2}). \tag{48d}$$

在这里，$\Gamma(\mu)$ 表示 [1] 由

$$\Gamma(\mu) = \int_0^{\infty} e^{-s} s^{\mu-1} ds (\mu > 0)$$

定义的伽玛函数．因此，(48b) 导致 n 维单位球的表面积的值

$$\omega_n = \frac{2\sqrt{\pi^n}}{\Gamma(\frac{n}{2})}. \tag{48e}$$

对整数 n 来说，$\Gamma(\frac{n}{2})$ 的值是容易从递推公式

$$\Gamma(\mu) = (\mu - 1)\Gamma(\mu - 1) \tag{48f}$$

确定的，此递推公式是直接从伽玛函数的定义分部积分得到的（见第一卷第一分册 345 页）．所以，对偶数 n，

$$\Gamma(\frac{n}{2}) = \frac{n-2}{2} \cdot \frac{n-4}{2} \cdot \cdots \cdot \frac{2}{2}\Gamma(1) = (\frac{n}{2} - 1)! \tag{48g}$$

---

1) 可见本卷第 634 页.

对奇数 n, 利用 (48c)

$$\Gamma(\frac{n}{2}) = \frac{n-2}{2} \cdot \frac{n-4}{2} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})$$
$$= \frac{(n-2)(n-4)\cdots 3 \cdot 1}{2^{(n-1)/2}}\sqrt{\pi}. \tag{48h}$$

用这种方法我们从 (48e) 逐次地得到值

$$\omega_2 = 2\pi, \quad \omega_3 = 4\pi, \quad \omega_4 = 2\pi^2, \quad \omega_5 = \frac{8}{3}\pi^2, \cdots.$$

为了求出半径为 R 的 n **维球的体积** $V_n(R)$, 在公式 (48a) 中, 我们令 $f = 1$ 从而求得

$$V_n(R) = \iint \cdots \int dx_1 \cdots dx_n = \omega_n \int_0^R r^{n-1} dr = v_n R^n, \tag{49a}$$

其中

$$v_n = \frac{1}{n}\omega_n = \frac{\sqrt{\pi^n}}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} \tag{49b}$$

是 n 维单位球的体积. 因此

$$v_1 = 2, v_2 = \pi, v_3 = \frac{4}{3}\pi,$$
$$v_4 = \frac{1}{2}\pi^2, v_5 = \frac{8}{15}\pi^2, \cdots. \tag{49c}$$

c. 推广. 参数表示

在 n 维空间我们可以考虑任意 $r \le n$ 的 r 维集合而且试图去定义它的面积. 为此目的, 参数表示是方便的. 让 r 维集合由方程

$$x_1 = \phi_1(u_1, \cdots, u_r),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n = \phi_n(u_1, \cdots, u_r)$$

给出，其中函数 ϕ_ν 在变量 $(u_1,\cdots,u_r)$ 的区域 B 中具有连续的导数. 当变量 $u_1,\cdots,u_r$ 在整个区域中变化时，点 $(x_1,\cdots,x_n)$ 描绘出一个 r 维曲面.

从矩阵 (见第 159 页)

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial u_1} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial u_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u_r} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_r} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial u_r} \end{pmatrix}$$

中，我们作所有可能的 r 行行列式 D_i，其中 $i=1,2,\cdots,k=\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$，例如，这些行列式的第一个是

$$D_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_r}{\partial u_1} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_r}{\partial u_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u_r} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_r} & \cdots & \dfrac{\partial x_r}{\partial u_r} \end{vmatrix}.$$

那么 r 维曲面的面积由积分

$$\int\cdots\int\sqrt{D_1^2+D_2^2+\cdots+D_k^2}du_1\cdots du_r;\quad k=\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} \tag{50a}$$

给出.

借助于多重积分的换元定理 (第 536 页) 和行列式的简单计算 (这里从略)，我们可以证明由这一表达式定义的面积，当 $u_1,\cdots,u_r$ 用另外的参数替换时，它的值是不变的. 我们还看到当 $r=1$ 时这公式转化为弧长公式，而对三维空间中 $r=2$ 时变为第 561 页的面积公式.

当 $r=n-1$ 时我们来证明公式 (50a)，其中 n 是任意的；也就是我们来证明下面的定理：

如果 n 维空间中的一个 $(n-1)$ 维超曲面的一部分可用参数方程

$$x_i = \psi_i(u_1, \cdots, u_{n-1})(i = 1, \cdots, n)$$

表出, 那么, 它的面积由

$$A = \int \cdots \int \sqrt{D_1^2 + \cdots + D_n^2} du_1 \cdots du_{n-1} \tag{50b}$$

给出, 其中 D_i 是由

$$\begin{aligned} D_i &= \frac{d(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n)}{d(u_1, \cdots, u_{n-1})} \\ &= 1 \Big/ \frac{d(u_1, \cdots, u_{n-1})}{d(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n)} \end{aligned}$$

给出的 $(n-1)$ 行的雅可比式. 在这里, 我们总是假定上面式中包含的所有导数存在而且连续.

不失一般性, 我们可以假定 $\phi_{x_n} \neq 0$. 于是, 由 (44b), A 由

$$A = \int \cdots \int \frac{|\text{grad}\phi|}{|\phi_{x_n}|} dx_1 \cdots dx_{n-1}$$

给出. 我们只需证明

$$\frac{1}{|\phi_{x_n}|} |\text{grad}\phi| dx_1 \cdots dx_{n-1} = \sqrt{\sum_i D_i^2} du_1 \cdots du_{n-1},$$

或

$$|\text{grad}\phi|^2 = \phi_{x_n}^2 (\sum_i D_i^2) \frac{d(u_1, \cdots, u_{n-1})}{d(x_1, \cdots, x_{n-1})} = \frac{\phi_{x_n}^2}{D_n^2} \sum_i D_i^2.$$

现在, 从雅可比的性质, 有

$$\begin{aligned} \frac{D_i}{D_n} &= \frac{d(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n)/d(u_1, \cdots, u_{n-1})}{d(x_1, \cdots, x_{n-1})/d(u_1, \cdots, u_{n-1})} \\ &= \frac{d(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n)}{d(x_1, \cdots, x_{n-1})}. \end{aligned}$$

最后一个雅可比式对应于引入 $(x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n)$ 去代替 $(x_1, \cdots, x_{n-1})$ 作为自变量. 但是, 当我们从方程

$$\phi_{x_n}\frac{\partial x_n}{\partial x_i}+\phi_{x_i}=0(i=1,\cdots,n-1)$$

得到偏导数 $\dfrac{\partial x_n}{\partial x_i}$ 时, 我们就有 $D_i/D_n=\pm\phi_{x_i}/\phi_{x_n}$, 因此

$$\frac{D_i^2}{D_n^2}=\frac{\phi_{x_i}^2}{\phi_{x_n}^2},$$

这就证明了 A 的公式 (50b).

这里可以提一下, 表示式 $\sum\limits_i D_i^2$ 可表为 $n-1$ 行的行列式

$$\begin{aligned}W&=\sum_{i=1}^n D_i^2=\Gamma(\mathbf{X}_{u_1},\cdots,\mathbf{X}_{u_{n-1}})\\&=\begin{vmatrix}\mathbf{X}_{u_1}\cdot\mathbf{X}_{u_1} & \mathbf{X}_{u_1}\cdot\mathbf{X}_{u_2} & \cdots & \mathbf{X}_{u_1}\cdot\mathbf{X}_{u_{n-1}}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathbf{X}_{u_{n-1}}\cdot\mathbf{X}_{u_1} & \mathbf{X}_{u_{n-1}}\cdot\mathbf{X}_{u_2} & \cdots & \mathbf{X}_{u_{n-1}}\cdot\mathbf{X}_{u_{n-1}}\end{vmatrix}\end{aligned}\tag{50c}$$

(“格拉姆” 行列式; 见第 209 页), 因此

$$A=\int\cdots\int\sqrt{W}du_1\cdots du_{n-1}.\tag{50d}$$

在这里, 行列式的元素是向量

$$\mathbf{X}_{u_i}=(\frac{\partial x_1}{\partial u_i},\cdots,\frac{\partial x_n}{\partial u_i}) \quad 和 \quad \mathbf{X}_{u_k}=(\frac{\partial x_1}{\partial u_k},\cdots,\frac{\partial x_n}{\partial u_k})$$

的内积, 即表示式

$$\mathbf{X}_{u_i}\cdot\mathbf{X}_{u_k}=\sum_{j=1}^n\frac{\partial x_j}{\partial u_i}\frac{\partial x_j}{\partial u_k}.\tag{50e}$$

练 习 4.11

1. 计算 n 维椭球

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\cdots+\frac{x_n^2}{a_n^2}\leq 1$$

的体积.

2. 将只依赖于 x_1 的函数在 n 维空间中单位球面 $x_1^2+\cdots+x_n^2=1$ 上的积分 I 表为单积分.

3. 一个 n^- 单纯形是 n 维空间中 $n+1$ 个一般位置的半空间的交集; 所谓一般位置即任意 n 个半空间的边界超平面恰好交于一点, 即单纯形的顶点. 例如, 平面上的三角形和三维空间的四面体. 求由超平面 $x_k\geq 0, k=1,\cdots,n$ 和

$$\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}+\cdots+\frac{x_n}{a_n}\leq 1$$

围成的 n 单纯形的体积.

4.12 作为参数的函数的广义单积分

a. 一致收敛性. 对参数的连续依赖性

广义积分常常作为参数的函数而出现. 例如, 一般幂的积分

$$\int_0^1 y^x dy=\frac{1}{x+1} \tag{51a}$$

对于在区间 $-1<x<0$ 中的 x 来说是一个广义积分.

我们已经知道 (第 82 页), 只要被积函数连续, 在有限区间上的积分看作参数的函数时是连续的. 但是, 在无穷区间的情形, 情况就不是这么简单. 例如, 让我们考虑积分

$$F(x)=\int_0^\infty \frac{\sin xy}{y}dy, \tag{51b}$$

按照 $x>0$ 或 $x<0$, 通过替换 $xy=z$, 这一积分变为

$$\int_0^\infty \frac{\sin z}{z}dz \text{或} \int_0^{-\infty} \frac{\sin z}{z}dz=-\int_0^\infty \frac{\sin z}{z}dz.$$

正如我们在卷一已经知道的, 积分

$$\int_0^\infty \frac{\sin z}{z}dz$$

收敛，而且事实上它的值为 $\pi/2$(卷一，第 347 页). 因此，尽管函数 $(\sin xy)/y$ 作为 x 与 y 的函数是处处连续的，而且对 x 的任意值积分是收敛的，但函数 $F(x)$ 不连续.

$$\int_0^\infty \frac{\sin xy}{y}dy = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{当}x > 0, \\ 0, & \text{当}x = 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{当}x < 0. \end{cases} \tag{51c}$$

本来，这一事实一点也不奇怪，因为这与无穷级数非一致收敛的情形是类似的 (卷一，第 592 页)，而且我们必须记住积分的过程是求和的推广. 仅当连续函数的无穷级数是一致收敛时我们才能肯定它表示一个连续函数. 在这里，在广义积分依赖于一个参数的情形，我们也必须引进一致收敛概念.

我们说**积分**

$$F(x) = \int_0^\infty f(x,y)dy \tag{52a}$$

在区间 $a \leq x \leq b$(**对** x) **一致收敛，倘若对所考虑的区间的** x **的所有的值，积分的"余项" 可以同时变得任意地小的话，更确切地说，倘若对给定的正数** ε, **存在一个不依赖于** x **的正数** $A = A(\varepsilon)$, **使得当** $B \geq A$ **时**

$$\left|\int_B^\infty f(x,y)dy\right| < \varepsilon. \tag{52b}$$

作为一个有用的判别法，我们提一下，**积分**

$$\int_0^\infty f(x,y)dy$$

一致(且绝对) 收敛，如果对足够大的 y, **比方说** $y > y_0$, **关系式**

$$|f(x,y)| < \frac{M}{y^\alpha} \tag{52c}$$

成立，其中 M 是正常数而 $\alpha > 1$. 因为在此情形下

$$\left|\int_B^{\infty} f(x,y)dy\right| < M\int_B^{\infty}\frac{dy}{y^{\alpha}}$$

$$= M\frac{1}{(\alpha-1)B^{\alpha-1}} \leq M\frac{1}{(\alpha-1)A^{\alpha-1}};$$

选取足够大的且与 x 无关的 A, 就可使 $M\frac{1}{(\alpha-1)A^{\alpha-1}}$ 任意小. 这和卷一给出的无穷级数一致收敛的判别法是非常相似的.

我们容易看出，连续函数的一致收敛积分本身是一连续函数，因为如果我们选 A 使得对所考虑的区间中的 x 的任意值有

$$\left|\int_A^{\infty} f(x,y)\right| < \varepsilon,$$

因而，从 (52a)

$$|F(x+h)-F(x)| < \left|\int_0^A \{f(x+h,y)-f(x,y)\}dy\right| + 2\varepsilon.$$

由于在有界集上函数 $f(x,y)$ 的一致连续性，我们可以选 h 如此的小，使右边的有穷积分小于 ε, 这就证明了积分的连续性.

当积分的区域是有限但被积函数有值为无穷的间断点时，类似的结果是成立的. 例如，假定函数 $f(x,y)$ 当 $y \to \alpha$ 时趋于无穷. 那么我们说收敛的积分

$$F(x) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x,y)dy \tag{53a}$$

在 $a \leq x \leq b$ 上是一致收敛的，如果对于任意的 ε, 我们能找到不依赖于 x 的数 k, 使得只要 $h \leq k$, 就有

$$\left|\int_{\alpha}^{\alpha+h} f(x,y)dy\right| < \varepsilon. \tag{53b}$$

在点 $y=\alpha$ 的邻域中，条件

$$|f(x,y)| < \frac{M}{(y-\alpha)^{\nu}} \quad (\nu < 1) \tag{53c}$$

是一致收敛的充分条件. 如前所述，当被积函数连续时一致收敛意味着积分是连续函数.

如果在区间 $a \le x \le b$ 中收敛是一致的，则广义积分 $F(x)$ 是连续的. 我们能够在有限区间对 $F(x)$ 积分，于是，对 y 积分是在无限区间时，构成了相应的广义的累次积分

$$\int_a^b dx \int_0^\infty f(x,y)dy,$$

而对无穷性间断的情形则为

$$\int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x,y)dy.$$

代替有限区间 $a \le x \le b$, 我们当然还可以考虑对 x 在无限区间上积分. 但是，累次积分不一定收敛. 例如，积分

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{dy}{x^2+y^2} = \frac{\pi}{2x}$$

当 $x \ge 1$ 时一致收敛，但

$$\int_1^\infty F(x)dx$$

不存在.

b. 广义积分对参数的微分法和积分法

一般说来，广义积分对参数在积分号下求微商或积分是不对的. 换句话说，对参数的极限运算和求积分，一般地说是不能交换次序的 (参看第 608 页的例子).

为了确定广义累次积分中积分次序是否可交换，我们经常可以应用下面的判别法 (或沿着它的证明途径另作特别的研究).

如果广义积分

$$F(x) = \int_0^\infty f(x,y)dy \tag{54a}$$

在区间 $\alpha \le x \le \beta$ 一致收敛, 则

$$\int_\alpha^\beta dx \int_0^\infty f(x,y)dy = \int_0^\infty dy \int_\alpha^\beta f(x,y)dx. \tag{54b}$$

为证明此判别法，我们令

$$\int_0^\infty f(x,y)dy = \int_0^A f(x,y)dy + R_A(x).$$

根据假定， $|R_A(x)| < \varepsilon(A)$, 其中 $\varepsilon(A)$ 仅仅依赖于 A 而不依赖于 x, 且当 $A \to \infty$ 时趋于零. 由第 88 页交换积分次序的定理给出

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta dx \int_0^\infty f(x,y)dy &= \int_\alpha^\beta dx \int_0^A f(x,y)dy + \int_\alpha^\beta R_A(x)dx \\ &= \int_0^A dy \int_\alpha^\beta f(x,y)dx + \int_\alpha^\beta R_A(x)dx,\end{aligned}$$

由此根据积分计算中的中值定理有

$$\left| \int_\alpha^\beta dx \int_0^\infty f(x,y)dy - \int_0^A dy \int_\alpha^\beta f(x,y)dx \right| \le \varepsilon(A)|\beta - \alpha|.$$

如果我们令 A 趋于无穷，我们得到公式 (54b).

如果对参数积分的区间也是无穷的, 即使收敛可以是一致的, 交换积分次序也并不总是可能的. 但是，如果相应的广义二重积分存在 (参看第四章第 540 页), 这样做是可以的. 因此，如果二重积分 $\iint |f(x,y)|dxdy$ 在整个第一象限存在，则

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty f(x,y)dy = \int_0^\infty dy \int_0^\infty f(x,y)dx. \tag{54c}$$

公式 (54c) 成立是因为广义二重积分不依赖于逼近积分区域的方式, 在一种情形中，我们用平行于 x 轴的无穷的带形上的积分去逼近原积分，而在另一种情形，则是用平行于 y 轴的带形.

如果积分区间是有限的, 但被积函数在积分区域中沿有限条直线 $y=$ 常数或有限条更一般的曲线上发生间断, 类似的结果也是成立的. 相应的定理如下:

如果函数 $f(x,y)$ 仅仅沿有限条直线 $y=a_1, y=a_2, \cdots, y=a_r$ 间断, 而且积分

$$\int_a^b f(x,y)dy$$

对区间 $\alpha \leq x \leq \beta$ 中的 x 一致收敛, 则在此区间上它表示一个 x 的连续函数, 而且

$$\int_\alpha^\beta dx \int_a^b f(x,y)dy = \int_a^b dy \int_\alpha^\beta f(x,y)dx. \tag{54d}$$

这就是说, 在这些假定之下, 积分的次序可以交换. 这个定理的证明与上面给出的公式 (54b) 的证明类似.

对参数的微商的法则同样容易推广. 下面的定理成立:

如果函数 $f(x,y)$ 在区间 $\alpha \leq x \leq \beta$ 上对 x 分段地有连续的导数, 而且两个积分

$$F(x) = \int_0^\infty f(x,y)dy \text{和} \int_0^\infty f_x(x,y)dy \tag{55a}$$

一致收敛, 则有

$$F'(x) = \int_0^\infty f_x(x,y)dy. \tag{55b}$$

这就是说, 在这些假定下, 积分和对参数微商的次序可以交换, 因为如果我们令

$$G(x) = \int_0^\infty f_x(x,y)dy,$$

则 (54b) 给出

$$\int_\alpha^\xi G(x)dx = \int_\alpha^\xi dx \int_0^\infty f_x(x,y)dy$$

$$= \int_0^{\infty} dy \int_{\alpha}^{\xi} f_x(x,y)dx,$$

右边被积函数的值为

$$\int_{\alpha}^{\xi} f_x(x,y)dx = f(\xi,y) - f(\alpha,y),$$

因此

$$\int_{\alpha}^{\xi} G(x)dx = F(\xi) - F(\alpha);$$

所以，我们微商然后用 x 代 ξ, 得到

$$\frac{dF(x)}{dx} = G(x) = \int_0^{\infty} f_x(x,y)dy.$$

这就是要证的结论.

当积分限之一依赖于参数 x 时 (见第一章第 85 页), 我们可以类似地推广微商的法则，因为我们可以写

$$\int_{\phi(x)}^{\infty} f(x,y)dy = \int_{\phi(x)}^{\alpha} f(x,y)dy + \int_{\alpha}^{\infty} f(x,y)dy,$$

其中 α 是积分区间内的任一固定值. 然后我们可以把以前已经证明过的法则用到右边两项中的每一项.

如前所述, 我们的微商法则对积分区间是有限的广义积分也成立.

c. 例

1. 我们考虑积分

$$\int_0^{\infty} e^{-xy}dy = \frac{1}{x} \ (x > 0).$$

如果 $x \geq 1$, 这个积分一致收敛，因为对任意正数 A,

$$\int_A^{\infty} e^{-xy}dy \leq \int_A^{\infty} e^{-y}dy = e^{-A},$$

其中最后一项的界不再依赖于 x, 而且只要 A 选得足够大的值, 它可以变得任意的小. 函数关于 x 的偏导数的积分同样也是一致收敛的. 累次求微商, 我们得到

$$\int_0^\infty ye^{-xy}dy = \frac{1}{x^2},\quad \int_0^\infty y^2e^{-xy}dy = \frac{2}{x^3},\cdots,$$

$$\int_0^\infty y^ne^{-xy}dy = \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

特别地, 当 $x=1$ 时, 我们有

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty y^ne^{-y}dy = n!$$

在卷一我们已经用不同的方法建立这一公式.

2. 让我们进一步考虑积分

$$\int_0^\infty \frac{dy}{x^2+y^2} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{x}.$$

我们也容易使自己信服, 如果 $x \le \alpha$, 其中 α 是任意正数, 积分号下求微商所需的全部假定都满足. 所以通过累次求微商我们得到一系列公式

$$\int_0^\infty \frac{dy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^3},$$

$$\int_0^\infty \frac{dy}{(x^2+y^2)^3} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{x^5},\cdots,$$

$$\int_0^\infty \frac{dy}{(x^2+y^2)^n} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n-2)}\frac{1}{x^{2n-1}}.$$

从这些公式我们可以得到关于 π 的瓦里斯乘积的另一种推导 (参看卷一第一分册 314 页). 为此, 我们令 $x=\sqrt{n}$, 得到

$$\int_0^\infty \frac{dy}{(1+y^2/n)^n} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n-2)}\sqrt{n}.$$

当 n 增加时, 左边收敛到积分

$$\int_0^\infty e^{-y^2}dy = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

为证明这点，我们估计差

$$\int_0^\infty e^{-y^2}dy - \int_0^\infty \frac{dy}{(1+y^2/n)^n}.$$

这个差满足不等式

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^\infty e^{-y^2}dy - \int_0^\infty \frac{dy}{(1+\frac{y^2}{n})^n}\right| \\
&\le \int_0^T |e^{-y^2} - \frac{1}{(1+\frac{y^2}{n})^n}|dy + \int_T^\infty e^{-y^2}dy + \int_T^\infty \frac{dy}{(1+\frac{y^2}{n})} \\
&\le \int_0^T |e^{-y^2} - \frac{1}{(1+\frac{y^2}{n})^n}|dy + \int_T^\infty e^{-y^2}dy + \frac{1}{T}.
\end{aligned}$$

这是因为 $(1+\frac{y^2}{n})^n > y^2$. 但如果 T 选得如此之大，使得

$$\int_T^\infty e^{-y^2}dy + \frac{1}{T} < \frac{\varepsilon}{2},$$

然后选 n 如此之大，使得

$$\int_0^T |e^{-y^2} - \frac{1}{(1+\frac{y^2}{n})^n}|dy < \frac{\varepsilon}{2},$$

由于极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{y^2}{n}\right)^{-n} = e^{-y^2}$$

的一致收敛性，这是可以做到的，因此立即推出

$$\left|\int_0^\infty e^{-y^2} - \frac{1}{(1+\frac{y^2}{n})^n}dy\right| < \varepsilon.$$

与第 548 页 (25a) 关于 e^{-y^2} 积分的值一起，这就建立了如下的关系式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots(2n-2)}\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \tag{56}$$

这是与卷一 (第一分册第 316 页) 的公式 (80) 等价的.

3. 为了计算积分

$$\int_0^\infty \frac{\sin y}{y} dy,$$

我们讨论函数

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-xy} \frac{\sin y}{y} dy.$$

如果 $x \geq 0$, 这一积分一致收敛, 同时, 如果 $x \geq \delta > 0$, 积分

$$\int_0^\infty e^{-xy} \sin y dy,$$

一致收敛, 其中 δ 是一任意的正数. 因此, 当 $x \geq 0$ 时 $F(x)$ 是连续的; 而当 $x \geq \delta$ 时, 我们有

$$F'(x) = -\int_0^\infty e^{-xy} \sin y dy.$$

两次分部积分, 我们容易算出这个积分 (见卷一第 303 页):

$$F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

我们积分此式得到

$$F(x) = -\mathrm{arctg} x + C,$$

其中 C 是常数 [1]. 由于关系式

$$\left| \int_0^\infty e^{-xy} \frac{\sin y}{y} dy \right| \leq \int_0^\infty e^{-xy} dy = \left. \frac{e^{-xy}}{x} \right|_\infty^0 = \frac{1}{x}$$

当 $x \geq \delta$ 时成立, 我们知道 $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 0$. 因为 $\lim\limits_{x \to \infty} \arctan x = \pi/2, C$ 必须是 $\pi/2$, 从而我们得到

$$F(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg} x.$$

1) 这里 $\arctan x$ 表示这函数的主值分支, 如卷一 (第 240 页) 定义的那样.

因当 $x \geq 0$ 时 $F(x)$ 是连续的，有

$$\lim_{x\to 0} F(x) = F(0) = \int_0^\infty \frac{\sin y}{y} dy,$$

这给出了需要的公式

$$\int_0^\infty \frac{\sin y}{y} dy = \frac{\pi}{2}. \tag{57}$$

(参看卷一第 663 页).

我们来证明

$$\int_0^\infty e^{-xy} \frac{\sin y}{y} dy$$

当 $x \geq 0$ 时一致收敛，如果 A 是一任意数而 $k\pi$ 是大于 A 的 π 的最小的倍数. 我们可以将积分的“余项”表为如下形式

$$\int_A^\infty e^{-xy} \frac{\sin y}{y} dy$$

$$= \int_A^{k\pi} e^{-xy} \frac{\sin y}{y} dy + \sum_{\nu=k}^{\infty} \int_{\nu\pi}^{(\nu+1)\pi} e^{-xy} \frac{\sin y}{y} dy,$$

右边的级数的项有交错的符号而且它们的绝对值单调地趋于零. 所以，由莱布尼茨判别法 (卷一第 576 页) 级数收敛而且级数的绝对值小于它的第一项. 因此我们有不等式

$$\left| \int_A^\infty e^{-xy} \frac{\sin y}{y} dy \right| < \int_A^{(k+1)\pi} e^{-xy} \frac{|\sin y|}{y} dy$$

$$< \int_A^{(k+1)\pi} \frac{1}{A} dy < \frac{2\pi}{A},$$

上式右边不依赖于 x 而且可以使它任意的小，这就证实了收敛的一致性.

当 $x \geq \delta > 0$ 时，

$$\int_0^\infty e^{-xy} \sin y dy$$

的一致收敛性可以从关系式

$$\int_A^\infty |e^{-xy}\sin y|dy \le \int_A^\infty e^{-xy}dy = \frac{e^{-Ax}}{x} \le \frac{e^{-A\delta}}{\delta}$$

立即推出.

4. 我们已了解到积分的一致收敛是积分次序可交换性的一个充分条件. 如下面的例子表明的, 仅仅是收敛是不够的.

如果我们令 $f(x,y) = (2-xy)xye^{-xy}$, 那么, 因为

$$f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(xy^2e^{-xy}),$$

对区间 $0 \le x \le 1$ 中的每一个 x, 积分

$$\int_0^\infty f(x,y)dy$$

存在; 事实上, 对每个上述的 x 值, 它的值为零. 因此,

$$\int_0^1 dx \int_0^\infty f(x,y)dy = 0.$$

另一方面, 因为对每一 $y \ge 0$,

$$f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2ye^{-xy}),$$

我们有

$$\int_0^1 f(x,y)dx = ye^{-y},$$

因而

$$\int_0^\infty dy \int_0^1 f(x,y)dx = \int_0^\infty ye^{-y}dy = \int_0^\infty e^{-y}dy = 1.$$

故

$$\int_0^1 dx \int_0^\infty f(x,y)dy \ne \int_0^\infty dy \int_0^1 f(x,y)dx.$$

d. 菲涅尔积分值的计算

菲涅尔积分

$$F_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\tau^2) d\tau, \quad F_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\tau^2) d\tau \tag{58a}$$

在光学上是重要的. 为了计算它们, 我们应用替换 $\tau^2 = t$, 得到

$$F_1 = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt, \quad F_2 = \int_0^{\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt.$$

这里, 我们令

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x^2 t} dx,$$

(这由替换 $x = \tau/\sqrt{t}$ 推出) 而且交换积分次序, 按我们的法则这是允许的 (我们首先把对 t 的积分限制在有限区间 $0 < a < t < b$ 上, 然后再令 $a \to 0, b \to \infty$).

$$F_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} e^{-x^2 t} \sin t dt,$$

$$F_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} e^{-x^2 t} \cos t dt.$$

利用分部积分法计算里面的积分, 我们将 F_1 和 F_2 化为初等有理函数的积分

$$F_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx, \quad F_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx.$$

这些积分可由卷一 (参看卷一第 325 页) 给出的公式进行计算; 第二个积分借助于替换 $x' = \dfrac{1}{x}$ 可化成第一个积分; 二者有值 $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$, 因而

$$F_1 = F_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{58b}$$

练　习　4.12

1. 计算

$$\int_0^\infty x^n e^{-x^2} dx.$$

2. 计算

$$F(y) = \int_0^1 x^{y-1}(y\log x + 1)dx.$$

3. 设 $f(x,y)$ 二阶连续可微，又设 $u(x,y,z)$ 定义如下：

$$u(x,y,z) = \int_0^{2\pi} f(x + z\cos\phi, y + z\sin\phi)d\phi.$$

证明

$$z(u_{xx} + u_{yy} - u_{zz}) - u_z = 0.$$

4. 如果 $f(x)$ 二阶连续可微而且

$$u(x,t) = \frac{1}{t^{p-2}}\int_{-t}^{+t} f(x+y)(t^2 - y^2)^{(p-3)/2}dy \qquad (p > 1),$$

证明

$$u_{xx} = \frac{p-1}{t}u_t + u_{tt}.$$

5. 为使

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(ax^2 + 2bxy + cy^2)]dxdy = 1,$$

a,b,c 必须取什么样的值？

6. 计算

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-(ax^2+2bxy+cy^2)](Ax^2+2Bxy+Cy^2)dxdy,$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-(ax^2+2bxy+cy^2)](ax^2+2bxy+cy^2)dxdy,$

其中 $a > 0, ac - b^2 > 0$.

7. 贝塞尔函数 $J_0(x)$ 可定义为

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\cos xt}{\sqrt{1-t^2}}dt,$$

证明

$$J_0'' + \frac{1}{x}J_0' + J_0 = 0.$$

8. 非负整数指标 n 的贝塞尔函数 $J_n(x)$ 可定义为

$$J_n(x) = \frac{x^2}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\pi}\int_{-1}^{+1}(\cos xt)(1-t^2)^{n-1/2}dt,$$

证明

(a) $J_n'' + \frac{1}{x}J_n' + (1-\frac{n^2}{x^2})J_n = 0(n \geq 0)$,

(b) $J_{n+1} = J_{n-1} - 2J_n'(n \geq 1)$

且

$$J_1 = -J_0'.$$

9. 计算下列积分:

(a) $K(a) = \int_0^\infty e^{-ax^2}\cos x dx$,

(b) $\int_0^\infty \frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{x}\cos x dx$,

(c) $I(a) = \int_0^\infty \exp(-x^2 - a^2/x^2)dx$,

(d) $\int_0^\infty \frac{\sin(ax)J_0(bx)}{x}dx$,

其中 J_0 表示在练习 7 中定义的贝塞尔函数.

10. 证明：当 n 大时

$$\int_0^{n\pi} \frac{\sin^2 ax}{x}dx$$

与 $\log n$ 同阶而有

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 ax - \sin^2 bx}{x}dx = \frac{1}{2}\log\frac{a}{b}.$$

11. 将 "积分 $\int_0^\infty f(x,y)dy$ 不一致收敛" 的说法用不含有 "不一致收敛" 词句的等价说法去代替.

4.13 傅里叶积分

a. 引 言

在 4.12 中叙述的理论, 可以用 傅里叶积分定理 (见第一卷第 694 页) 来解释, 它在分析和数学物理中是一个基本的定理. 我们回想一下, 傅里叶级数是把一个逐段光滑而在其它方面却是任意的周期函数, 用三角级数表示出来. 傅里叶积分给出了非周期函数 $f(x)$ 一个相应的三角表示, 这个函数定义在无穷区间 $-\infty < x < +\infty$ 内, 而且为了保证收敛, 它在无穷远处的性质还要有适当的限制.

关于函数 $f(x)$, 我们作以下的假定:

1. $f(x)$ 在任意有限区间内有定义、连续、并有连续的一阶导数 $f'(x)$, 至多在有限个点例外.

2. $f'(x)$ 在每一个例外点的附近有界. 在例外点, $f(x)$ 取它的左右极限的算术平均作为函数值:

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] \text{ [1)]} \tag{59a}$$

3. 积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx = C \tag{59b}$$

收敛.

这时傅里叶积分定理可叙述为

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\tau(t-x)dt. \tag{60}$$

---

1) 对每个例外的 x, 我们并不要求 $f'(x)$ 有定义. 然而, f' 在例外点 x 附近的有界性, 蕴涵了左右极限 $f(x-0)$ 和 $f(x+0)$ 存在.

应用恒等式

$$\cos\tau(t-x)=\frac{1}{2}(e^{i\tau t-i\tau x}+e^{-i\tau t+i\tau x}),$$

并令

$$g(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\tau t}dt, \tag{61a}$$

我们可以把公式 (60) 写成

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}[e^{i\tau x}g(\tau)+e^{-i\tau x}g(-\tau)]d\tau\\&=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{A}[e^{i\tau x}g(\tau)+e^{-i\tau x}g(-\tau)]d\tau\\&=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}g(\tau)e^{ix\tau}d\tau.\end{aligned}$$

这样，傅里叶定理变成

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}g(\tau)e^{ix\tau}d\tau. \tag{61b}$$

写成复数形式的 (61a), 把另一个函数 $g(\tau), f$ 的 **傅里叶变换**, 同函数 $f(x)$ 联系起来了. 由公式 (61b) 给出的傅里叶定理，以一种相当对称的形式用 g 表示了 f；事实上, 它正好说明，$f(-x)$ 是 $g(\tau)$ 的傅里叶变换. 除了指数中差一个符号以及下述事实以外，f 和 g 的关系是互易的，这个事实就是根据从 (60) 出发所作的推导, (61b) 中的广义积分是在

$$\int_{-\infty}^{+\infty}=\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A}$$

这种 **特定的意义** 下取的. 然而在 g 的公式 (61a) 中，根据假定 (59b), 积分是绝对收敛的，从而上下限可以独立地分别趋向 $+\infty$ 和 $-\infty$. 两个公式 (61a,b) 是互易的等式，每个等式都是把一个函数用另一个表示出来.

一般说来，实值函数 $f(x)$ 的傅里叶变换 $g(\tau)$ 取复值. 对于实的 f, 从 (61a) 我们得到复的共轭等式

$$\overline{g(\tau)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\tau t} dt = g(-\tau). \tag{62}$$

然而，当 $f(x)$ 是 x 的 偶 函数时，傅里叶变换也是偶的，而且对实的 f 它也是实的. 事实上，把积分 (61a) 中关于 t 与 $-t$ 的贡献联合起来，我们得到

$$g(\tau) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t) \cos(\tau t) dt, \tag{63a}$$

它蕴涵了 $g(\tau) = g(-\tau)$. 公式 (61b) 因而可以写成

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} g(\tau) \cos(\tau x) d\tau \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \cos(\tau x) d\tau \int_{0}^{\infty} f(t) \cos(\tau t) dt. \end{aligned} \tag{63b}$$

类似地，对于奇函数 $f(x)$,

$$g(\tau) = \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t) \sin(\tau t) dt. \tag{64a}$$

在 (64a) 中， g 是一个对于实的 f 取纯虚数值的奇函数. 反演公式变成

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2i}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} g(\tau) \sin(\tau x) d\tau \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \sin(\tau x) d\tau \int_{0}^{\infty} f(t) \sin(\tau t) dt. \end{aligned} \tag{64b}$$

我们先用些例子来解释傅里叶积分定理，然后再给出它的证明.

b. 例

1. 设 $f(x)$ 是如下定义的阶梯函数，当 $x^2 < 1$ 时 $f(x) = 1$, 当 $x^2 > 1$ 时 $f(x) = 0$. 由公式 (63a), f 的傅里叶变换是函数

$$g(\tau) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{1} \cos(\tau t) dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin\tau}{\tau}.$$

因此，用 (63b)，

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos(\tau x)\sin\tau}{\tau}d\tau=\begin{cases}1, & \text{当}|x|<1,\\ \frac{1}{2}, & \text{当}x=\pm 1,\\ 0, & \text{当}|x|>1.\end{cases}\tag{65a}$$

这个积分在数学文献中被称为狄利克雷间断因子. 它表明，含参变量 x 的积分可以是参变量 x 的间断函数，即使被积函数对 x 是连续的. 当然，这种现象之所以会出现只是由于积分是广义的.

2. 设 $f(x)=e^{-kx}$ 当 $x>0$，其中 k 是一正实数. 对所有的 x 定义 f 为偶函数，我们求 f 的傅里叶变换：

$$g(\tau)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}\cos(\tau t)e^{-kt}dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{k}{k^2+\tau^2}$$

[为了计算这个积分，见第一卷第一分册 311 页的公式 (64)]. 由 (63b) 就导出等式

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{k\cos(\tau x)}{k^2+\tau^2}d\tau=e^{-k|x|}.\tag{65b}$$

另一方面，对负的 x，当把 e^{-kx} 延拓为 x 的奇函数时，我们得到傅里叶变换

$$g(\tau)=\frac{-2i}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}\sin(\tau t)e^{-kt}dt=-i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\tau}{k^2+\tau^2}$$

以及公式

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\tau\sin(\tau x)}{k^2+\tau^2}d\tau=\begin{cases}e^{-kx} & \text{当}x>0\\ 0 & \text{当}x=0\\ -e^{kx} & \text{当}x<0.\end{cases}\tag{65c}$$

3. 函数 $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ 给我们的反演公式一个有趣的说明. 傅里叶变换是

$$g(\tau)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\cos(x\tau)dx.$$

这个 g 不大好算，因为其不定积分没有可供利用的显式. 奇妙的是 g 可以通过解一个微分方程求得. 微分 g 的表达式并分部积分，我们得到

$$\begin{aligned}g'(\tau) &= -\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty (xe^{-\frac{x^2}{2}})\sin(x\tau)dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}[e^{-\frac{x^2}{2}}\sin(x\tau)\Big|_0^\infty - \tau\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\cos(x\tau)dx] \\ &= -\tau g(\tau).\end{aligned}$$

由此推出

$$\frac{d}{d\tau}[g(\tau)e^{\tau^2/2}] = [g\tau + g']e^{\tau^2/2} = 0,$$

或

$$g(\tau)e^{\tau^2/2} = \text{常数} = c.$$

因此 g 的形式是

$$g(\tau) = ce^{-\tau^2/2}.$$

可见，函数 $f = e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的傅里叶变换具有形式

$$g(\tau) = ce^{-\tau^2/2},$$

其中带有一个确定的常数 c. 由于 [见第 548 页的 (25a)]

$$c = g(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-x^2/2}dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-y^2}dy = 1,$$

我们发现，$f = e^{-x^2/2}$ 的傅里叶变换是同一个函数

$$g(\tau) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\cos(x\tau)dx = e^{-\tau^2/2}. \tag{66a}$$

c. 傅里叶积分定理的证明

证明 (类似于第一卷中关于傅里叶级数的相应的证明) 基于一个简单的引理 (“黎曼 - 勒贝格引理”)：

如果 $\varphi(t)$ 在开区间 $a<t<b$ 有界且连续，那么我们有

$$\lim_{A\to\infty}\int_a^b \varphi(t)\sin Atdt=0. \tag{67}$$

为了证明引理，我们假设 $|\varphi(t)|<M$ 当 $a<t<b$. 设 ε 是一个给定的正数. 选取 α 和 β 使得

$$a<\alpha<a+\frac{\varepsilon}{M},\quad b-\frac{\varepsilon}{M}<\beta<b,\quad \alpha<\beta.$$

那么

$$\left|\int_a^b \varphi(t)\sin Atdt\right|\le\left|\int_\alpha^\beta \varphi(t)\sin Atdt\right|+2\varepsilon.$$

在闭区间 $\alpha\le t\le\beta$, 函数 $\varphi(t)$ 是一致连续的，因而我们可以找到 δ, 使得

$$|\varphi(t')-\varphi(t)|<\frac{\varepsilon}{b-a}\quad 当\quad |t'-t|<\delta.$$

现在，在积分中用 $t+\dfrac{\pi}{A}$ 代替 t, 我们有

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta \varphi(t)\sin Atdt&=-\int_{\alpha-\frac{\pi}{A}}^{\beta-\frac{\pi}{A}}\varphi(t+\frac{\pi}{A})\sin Atdt\\&=-\int_\alpha^\beta \varphi(t)\sin Atdt\\&\quad-\int_\alpha^{\beta-\frac{\pi}{A}}[\varphi(t+\frac{\pi}{A})-\varphi(t)]\sin Atdt\\&\quad+\int_{\beta-\frac{\pi}{A}}^\beta \varphi(t)\sin Atdt\\&\quad-\int_{\alpha-\frac{\pi}{A}}^\alpha \varphi(t+\frac{\pi}{A})\sin Atdt.\end{aligned}$$

这样，如果 A 很大使得 $\dfrac{\pi}{A}<\delta$ 且 $2M\pi/A<\varepsilon$, 我们就发现

$$\left|2\int_\alpha^\beta \varphi(t)\sin Atdt\right|\le\frac{\beta-\alpha-\pi/A}{b-a}\varepsilon+\frac{2M\pi}{A}<2\varepsilon,$$

从而也就有

$$\left|\int_a^b \varphi(t)\sin Atdt\right| \leq 3\varepsilon.$$

由于 ε 是任意的，我们就推出了关系式 (67).

显然，公式 (67) 对更一般的情形成立，也就是说，当通过去掉有限多个例外点，区间 $a<t<b$ 可以分成一些开区间，在每一个开区间内 $\varphi(t)$ 连续且有界.

现在设 $f(t)$ 是一个函数，它对所有的 t 都有定义且满足在第 612 页中叙述的假设 1–3. 为了证明我们的写成形式 (60) 的主要定理，我们首先用一个有限的积分区间去代替无限的积分区间，使得我们可以交换积分次序. 对于正的 A,B(和固定的 x), 我们引进表示式

$$I_A=\frac{1}{\pi}\int_0^A d\tau\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\tau(t-x)dt. \tag{68a}$$

由假设 3,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt$$

收敛. 因此，对给定的 $\varepsilon>0$, 对一切充分大的 B, 我们有

$$\left|\int_{|t|>B} f(t)\cos\tau(t-x)dt\right| \leq \int_{|t|>B}|f(t)|dt<\varepsilon.$$

由此推出

$$\lim_{B\to\infty}\int_{-B}^{B} f(t)\cos\tau(t-x)dt=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\tau(t-x)dt \tag{68b}$$

对 τ 一致收敛.

我们将要证明的公式 (60), 可叙述为

$$f(x)=\lim_{A\to\infty} I_A. \tag{69}$$

因为积分 (68b) 一致收敛 [1)]，在定义 I_A 的积分 (68a) 中，我们便可以交换积分次序 [见 (54b), 第 601 页]. 这样

$$\begin{aligned}I_A =&\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dt\int_0^A f(t)\cos\tau(t-x)d\tau\\=&\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\frac{\sin A(t-x)}{t-x}dt\\=&\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t+x)\frac{\sin At}{t}dt.\end{aligned}$$

应用恒等式

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin At}{t}dt=\frac{\pi}{2},\qquad 当A>0$$

[见 (57), 第 607 页], 我们可以把这个结果写成

$$\begin{aligned}I_A =&\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}[f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin At}{t}dt\\=&\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\varphi(t)\sin Atdt\\=&\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{c}\varphi(t)\sin Atdt\\&+\frac{1}{\pi}\int_c^{\infty}\varphi(t)\sin Atdt,\end{aligned}$$

其中 C 是一任意正常数，而

$$\varphi(t)=\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}+\frac{f(x-t)-f(x-0)}{t}.$$

函数 $\varphi(t)$ 满足黎曼 - 勒贝格定理 (67) 的所有假设：除了可能有有限个点外，它显然是连续的，因为 f 就是这样，在间断点 $t\neq 0$ 处，

1) 我们把 612 页的定理分别用到

$$\int_0^{\infty}f(t)\cos\tau(t-x)dt和\int_{-\infty}^{0}f(t)\cos\tau(t-x)dt$$

中去，无需改变 (54b) 的证明就可知道，函数 f 在任意有限区间中允许有有限个跳跃间断点.

函数 $\varphi(t)$ 保持有界，因为 f 只有跳跃间断． $\varphi(t)$ 在 $t=0$ 附近有界，可以从 f 可微和 f' 有界推出，因为用微分学的中值定理

$$\varphi(t)=f'(x+\theta t)-f'(x-\eta t),$$

其中 θ 与 η 都是介于 0 和 1 之间的某个值 [1)]． 应用 (67), 对于任何 $C>0$ 我们得到

$$\lim_{A\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^C\varphi(t)\sin Atdt=0.$$

此外

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_C^{\infty}\varphi(t)\sin Atdt=&\frac{1}{\pi}\int_C^{\infty}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{t}\sin Atdt\\&-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{\pi}\int_{AC}^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt.\end{aligned}$$

在这里，对任意的 $C>0$, 当 $A\to\infty$ 时第二个积分趋向于 0, 而只要选取 C 充分大，我们就可以使第一个积分对一切 $A>0$ 一致地小，这就推得

$$\lim_{A\to\infty}I_A=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

这和 (69) 等价，因为我们假设了

$$f(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

d. 傅里叶积分定理的收敛速度

反演公式 (61a, b) 是在对函数 $f(x)$ 作了第 612 页所叙述的假设 1–3 下建立的，条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx=C<\infty$$

1) 注意，为了应用中值定理，我们只要求函数在区间内部有微商存在并在闭区间连续 (看第一卷第一分册 195 页). 对很小的正数 t 由 $f(x+t)$ 定义而在 $t=0$ 由 $f(x+0)$ 定义的函数，以及对很小的正数 t 由 $f(x-t)$ 定义而在 $t=0$ 由 $f(x-0)$ 定义的函数，都满足这些假设.

的一个推论是，由 (61a) 给出的傅里叶变换 $g(\tau)$ 绝对一致收敛. 事实上，如果我们取

$$g_B(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-B}^{B} f(t) e^{-i\tau t} dt, \tag{70a}$$

那么

$$\begin{aligned}|g(\tau) - g_B(\tau)| &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|t|>B} f(t) e^{-i\tau t} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|t|>B} |f(t)| dt.\end{aligned}$$

因此，给定 $\varepsilon > 0$, 可以找到 B 足够大，使得对所有的 τ, 有

$$|g(\tau) - g_B(\tau)| < \varepsilon.$$

这就推出 g, 作为连续函数 g_B 的一致收敛的极限，本身是连续的.

一般地说, 我们不能肯定, 反演公式 (61b) 中的积分一致收敛. 逼近函数

$$f_A(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} g(\tau) e^{ix\tau} d\tau$$

当然是连续的，并且对每一点 x 收敛到 $f(x)$. 然而，如果 f 有间断, 则收敛不可能是**一致的**, 正如在 614 页例 1 中所看到的那样. 为了使 $f_A(x)$ 趋向于 $f(x)$ 是一致收敛的，还是只要求广义积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(\tau)| d\tau$$

存在就够了. 例 1 显然是不满足这个条件，在那里 $g(\tau) = \dfrac{2\sin\tau}{\sqrt{2\pi}\tau}$.

对许多应用来说，只对绝对一致收敛的积分用起来才方便. 要证明只是条件收敛的积分能交换极限运算的次序通常要难得多. 很容易对 f 加上一些限制来保证 $|g|$ 在整个数轴上可积，从而保证

$f_A(x)$ 的一致收敛性. 只要 $f(x)$ 有连续的一阶与二阶导数 $f'(x)$ 和 $f''(x)$, 并且三个积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx, \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|dx, \int_{-\infty}^{+\infty} |f''(x)|dx$$

都收敛就够了.

首先,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|dx$$

收敛保证了

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty}[f(0) + \int_0^x f'(t)dt] \\ &= f(0) + \int_0^\infty f'(t)dt\end{aligned}$$

存在, 显然

$$\lim_{x\to\infty} f(x)$$

的值只能是 0, 因为否则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx$$

就不可能收敛, 因此, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. 根据同样的论证 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. 类似地,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f''(x)|dx$$

的收敛蕴含了

$$\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = 0$$

也成立. 对公式 (70a) 分部积分两次, 便有

$$
\begin{aligned}
g_B(\tau) =& \frac{1}{i\sqrt{2\pi}\tau}[-f(B)e^{-iB\tau} + f(-B)e^{iB\tau} + \int_{-B}^{B} f'(t)e^{-i\tau t}dt] \\
=& \frac{e^{-iB\tau}[f'(B) + i\tau f(B)] - e^{iB\tau}[f'(-B) + i\tau f(-B)]}{\sqrt{2\pi}\tau^2} \\
& - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau^2}\int_{-B}^{B} f''(t)e^{-i\tau t}dt.
\end{aligned} \tag{71a}
$$

因此, 当 $B \to \infty$

$$
\begin{aligned}
g(\tau) &= \frac{1}{i\tau\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-i\tau t}dt \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau^2}\int_{-\infty}^{+\infty} f''(t)e^{-i\tau t}dt,
\end{aligned} \tag{71b}
$$

从而

$$
|g(\tau)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau^2}\int_{-\infty}^{+\infty} |f''(t)|dt = O(\frac{1}{\tau^2}) \tag{71c}
$$

对 $g(\tau)$ 的这个估计显然蕴涵了

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} |g(\tau)|d\tau
$$

收敛, 因此

$$
f(x) = \lim_{A\to\infty} f_A(x) = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A} g(\tau)e^{ix\tau}d\tau
$$

对所有的 x 是一致成立的. 事实上, 在对 f 所作的假设下, 积分的上、下限如何趋向 $\pm\infty$ 是无关紧要的; 一般说

$$
f(x) = \lim_{\substack{A\to\infty \\ B\to-\infty}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{B}^{A} g(\tau)e^{i\tau x}d\tau.
$$

等式 (71b) 可以解释为, 函数 $f'(t)$ 有傅里叶变换 $i\tau g(\tau)$, 而 $f''(t)$ 有傅里叶变换 $-\tau^2 g(\tau)$, 其中 g 是 f 的傅里叶变换. 因此, 在

适当的正则性假设下，f 的微商对应于 f 的傅里叶变换乘以因子 $i\tau$. 这个事实对于傅里叶变换的许多应用来说是决定性的.

e. 傅里叶变换的帕塞瓦尔等式

对于傅里叶级数，我们证明了 (第一卷第二分册第 693 页) 帕塞瓦尔等式，它把一个周期函数的平方积分和傅里叶系数的平方和联系起来. 对傅里叶变换来说，存在一个非常类似的等式，它在形式上甚至更为对称，这是因为函数 f 和它的傅里叶变换 g 之间的互易性. 由于傅里叶变换 g 一般是复值的，即使对实值的 f 也这样，所以必须用绝对值的平方而不用函数的平方，因此帕塞瓦尔等式叙述为，函数 f 与它的傅里叶变换 g 的绝对值的平方在整个数轴上的积分是相同的:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\tau)|^2 d\tau. \tag{72}$$

我们并不取使这个等式成立的最一般的假设，而仅仅把 f 限制在上一节末尾所加的条件下来证明它，即 f, f', f'' 三个函数都连续，并且在整个 x 轴上绝对可积 [1].

和前面一样，我们用等式 (70a) 和 (70b) 来定义 g 与 f 的逼近 $g_B(x)$ 与 $f_A(x)$. 然后，我们构造表示式

$$\begin{aligned} J_{A,B} &= \int_{-B}^{B} |f(x) - f_A(x)|^2 dx \\ &= \int_{-B}^{B} [f(x) - f_A(x)][\overline{f(x)} - \overline{f_A(x)}] dx \\ &= \int_{-B}^{B} [f(x)\overline{f(x)} - f(x)\overline{f_A(x)} \\ &\quad - f_A(x)\overline{f(x)} + f_A(x)\overline{f_A(x)}] dx, \end{aligned}$$

其中表示式上的横线表示共轭复数值. 现在，交换积分次序，我们

1) 通过用这里所规定的函数类来适当地逼近 f, 等式可以推广到对于更一般的 f 也成立.

发现

$$\int_{-B}^{B} f(x)\overline{f_A(x)}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-B}^{B} f(x)dx\int_{-A}^{A}\overline{g(\tau)}e^{-ix\tau}d\tau$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}\overline{g(\tau)}d\tau\int_{-B}^{B} f(x)e^{-ix\tau}dx$$
$$= \int_{-A}^{A}\overline{g(\tau)}g_B(\tau)d\tau,$$

取共轭复数，我们有

$$\int_{-B}^{B} f_A(x)\overline{f(x)}dx = \int_{-A}^{A} g(\tau)\overline{g_B(\tau)}d\tau.$$

因此

$$J_{A,B} = \int_{-B}^{B}(|f(x)|^2 + |f_A(x)|^2)dx$$
$$- \int_{-A}^{A}[\overline{g(\tau)}g_B(\tau) + g(\tau)\overline{g_B(\tau)}]d\tau, \tag{73}$$

由于我们关于 $f(x)$ 的假设保证了

$$\lim_{A\to\infty} f_A(x) = f(x)$$

对 x 是一致的 (见第 623 页), 我们还有

$$\lim_{A\to\infty}|f(x) - f_A(x)|^2 = 0$$

对 x 是一致的. 从而

$$\lim_{A\to\infty} J_{A,B} = \lim_{A\to\infty}\int_{-B}^{B}|f(x) - f_A(x)|^2dx = 0.$$

因此，当 $A\to\infty$ 时，等式 (73) 化为

$$0 = 2\int_{-B}^{B}|f(x)|^2dx - \int_{-\infty}^{\infty}[\overline{g(\tau)}g_B(\tau) + g(\tau)\overline{g_B(\tau)}]d\tau. \tag{74}$$

由于

$$\lim_{B\to\infty} g_B(\tau) = g(\tau)$$

对 τ 是一致的，又且由 $g_B(\tau)$ 一致有界，而且

$$g(\tau) = 0(\frac{1}{\tau^2}),$$

在等式 (74) 中令 B 趋向 ∞ 取极限，我们就可以得到帕塞瓦尔等式 (72).

f. 多元函数的傅里叶变换

在一维的情形，傅里叶积分等式是把函数表成依赖于一个参变量 ξ 的指数函数 $e^{ix\xi}$ 的线性组合. 对参变量的每一个值 ξ，我们对函数 $e^{ix\xi}$ 乘上适当的“权因子” $\dfrac{g(\xi)}{\sqrt{2\pi}}$，并对 ξ 积分. 合适的因子 $g(\xi)$ 是 f 的傅里叶变换.

为把一个多元函数分解为指数函数，存在类似的公式. 两个自变量 x,y 的函数 $f(x,y)$ 可以表为依赖于两个参变量 ξ,η 的形如 $e^{i(x\xi+y\eta)}$ 的组合. 类似地，三元函数 $f(x,y,z)$ 可由依赖于三个参变量 ξ,η,ζ 的指数函数 $e^{i(x\xi+y\eta+z\zeta)}$ 表示出来. 把一般的函数分解为指数函数，这样的分解构成数学分析最强有力的工具之一. 对于给定的一组参变量 ξ,η,ζ，函数 $e^{i(x\xi+y\eta+z\zeta)}$ 仅仅依赖于组合 $s = x\xi+y\eta+z\zeta$，它在 x,y,z 空间中每一个带有方向数 ξ,η,ζ 的平面上取常数. 如果我们引入新的直角坐标系，把这些平面中的一个取作坐标平面，那么 $e^{i(x\xi+y\eta+z\zeta)}$ 变成单个坐标变量的函数. 这样，傅里叶公式就给出一个把函数 $f(x,y,z)$ 分解成只依赖于一个坐标的函数的组合 (然而，在那里，相应的坐标轴的方向依赖于参变量 ξ,η,ζ).

这种指数表示和在物理中遇到的平面波密切相关. 用依赖时间的指数因子 $e^{-i\omega t}$ 乘指数函数 $e^{i(x\xi+y\eta+z\zeta)}$，我们得到表达式

$$u(x,y,z,t) = e^{i(x\xi+y\eta+z\zeta)-i\omega t} = e^{i(x\xi+y\eta+z\zeta-\omega t)}. \tag{75a}$$

在这里，当时间 t 和位置 (x,y,z) 取相同的"位相值"

$$s = x\xi + y\eta + z\zeta - \omega t$$

时，u 取固定值 e^{is}. 对固定的 s, 上式在每一时刻 t, 都表示 x,y,z 空间中一个方向数为 ξ,η,ζ 的平面("波前"), 当 t 变化时，这平面作平行于自己的运动. 由于 (见第 145 页) 量

$$p = \frac{s+\omega t}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}$$

表示在时间 t 从原点到平面的距离，所以平面以速度

$$c = \frac{dp}{dt} = \frac{\omega}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}} \tag{75b}$$

运动，这就是波前的传播速度, 相当于波的"频率" ω.

我们对二元函数 $f(x,y)$ 来叙述和证明傅里叶积分定理，其中对 f 加上保证定理成立 (虽这非必要的) 而对应用来说是方便的条件.

设 $f(x,y)$ 对所有的 x,y 有定义, 且有连续的一阶、二阶、三阶导数. f 和它的阶数 ≤ 3 的导数的绝对值在全平面绝对可积, 即对任意的非负整数 $i,k: i+k \leq 3$, 展布在整个 x,y 平面的广义积分

$$\iint \left|\frac{\partial^{i+k} f(x,y)}{\partial x^i \partial y^k}\right| dxdy \tag{76}$$

收敛. f 的傅里叶变换用公式

$$g(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\iint e^{-i(x\xi+y\eta)} f(x,y)dxdy \tag{77a}$$

定义. 那么, 函数 f 就通过反演公式

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\iint e^{i(x\xi+y\eta)} g(\xi,\eta)d\xi d\eta \tag{77b}$$

用它的傅里叶变换表示出来，其中所有的积分都展布在全平面而且绝对收敛.

对 n 元函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 有类似的结果成立. 我们只要假设 f 及其阶数 $\leq n+1$ 的导数存在且在全空间绝对可积，则傅里叶变换由

$$g=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int\cdots\int e^{-i(x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n)}f(x_1,\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_n$$

定义，这时 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的反演公式就变成

$$f=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int\cdots\int e^{i(x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n)}g(\xi_1,\cdots,\xi_n)d\xi_1\cdots d\xi_n.$$

n 维情形的证明和我们将要给出的二维情形的证明是完全一样的.

我们首先对属于 C^3 类且有紧支集的函数 $f(x,y)$，也就是说 f 有阶数 ≤ 3 的连续导数且在某有界集外为 0，来证明傅里叶积分定理. 这时 f 的傅里叶公式可直接从一元函数的公式推出，如我们就要做的那样.

傅里叶变换

$$g(\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi}\iint e^{-i(x\xi+y\eta)}f(x,y)dxdy$$

是一个正常积分，因为 f 在一个有界区域外为 0. 引入单独对 y 的"中间"傅里叶变换

$$\gamma(x,\eta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-iy\eta}f(x,y)dy, \tag{77c}$$

我们就可以把 g 写成

$$g(\xi,\eta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-ix\xi}\gamma(x,\eta)dx.$$

显然，对每一个 η 值， $\gamma(x,\eta)$ 是 C^3 类的且具有有界支集的单变量函数. 它的傅里叶变换是 $g(\xi,\eta)$. 应用第 612 页的定理，从而有

$$\gamma(x,\eta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{ix\xi}g(\xi,\eta)d\xi. \tag{78}$$

另一方面，对固定的 $x, \gamma(x,\eta)$ 是只作为 y 的函数 $f(x,y)$ 的傅里叶变换. 因此反演公式

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{iy\eta} \gamma(x,\eta) d\eta$$

成立. 这里对 γ 用它 (78) 的表达式代入，就推出

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int d\eta \int e^{i(x\xi + y\eta)} g(\xi,\eta) d\xi.$$

在这个公式中，累次积分 (先对 ξ 然后对 η) 可以用一个在 ξ, η 全平面的重积分来代替. 这就导致公式 (77b). 这一步是有根据的，因为单重积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(\xi,\eta)| d\zeta \tag{79a}$$

对所有的 η 一致收敛，而重积分

$$\iint |g(\xi,\eta)| d\xi d\eta \tag{79b}$$

也收敛 (见第 601 页). 如果我们对 g 证明估计式

$$|g(\xi,\eta)| \leq \frac{M}{(1+\xi^2+\eta^2)^{3/2}} \tag{79c}$$

对适当的常数 M 成立，则这两个关于收敛的结论便可以得到. 重积分 (79b) 的叫敛性是 (79c) 的一个推论. 从 (79c) 可以推出单重积分 (79a) 的一致收敛性，因为对 $A > 1$

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|>A} |g(\xi,\eta)| d\xi &\leq M \int_{|\xi|>A} \frac{d\xi}{(1+\xi^2+\eta^2)^{3/2}} \\ &\leq M \int_{|\xi|>A} \frac{2|\xi|}{(1+\xi^2)^2} d\xi = \frac{M}{1+A^2},\end{aligned}$$

当 $A \to \infty$ 时右边与 x 无关并趋向于 0.

从 (77a) 用累次分部积分可证明不等式 (79c). 由于 f 有紧支集, 我们发现

$$\iint e^{-i(x\xi+y\eta)}\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^3}dxdy = 2\pi(i\xi)^3 g(\xi,\eta),$$

$$\iint e^{-i(x\xi+y\eta)}\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y^3}dxdy = 2\pi(i\eta)^3 g(\xi,\eta),$$

从而有

$$\begin{aligned}
&2\pi(1+|\xi|^3+|\eta|^3)|g(\xi,\eta)| \\
&\quad = 2\pi|g(\xi,\eta)| + |2\pi(i\xi)^3 g(\xi,\eta)| + |2\pi(i\eta)^3 g(\xi,\eta)| \\
&\quad \le \iint (|f(x,y)| + |\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^3}| + |\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y^3}|)dxdy.
\end{aligned}$$

对任意的 ξ,η, 用 ζ 表示 $1, |\xi|, |\eta|$ 三个量中的最大数, 那么

$$\begin{aligned}
(1+\xi^2+\eta^2)^{3/2} &\le (\zeta^2+\zeta^2+\zeta^2)^{3/2} \\
&\le 3\sqrt{3}\zeta^3 \le 3\sqrt{3}(1+|\xi|^3+|\eta|^3).
\end{aligned}$$

这就推出了不等式 (79c), 其中常量

$$\begin{aligned}
M =& \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\iint (|f(x,y)| \\
&+ |\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^3}| + |\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y^3}|)dxdy,
\end{aligned} \tag{79d}$$

从而对 C^3 类且有紧支集的函数 $f(x,y)$ 完成了傅里叶定理的证明.

对于 C^3 类的使积分 (76) 收敛的最一般的函数 f, 定理的证明可以通过用具有紧支集的函数 $f_n(x,y)$ 去逼近 f 而得到. 为此对 $f(x,y)$ 乘上适当的 "截断" 函数 $\phi_n(x,y)$, 使得乘积 $f_n = f\phi_n$ 具有紧支集, 且在圆域 $x^2+y^2 \le n^2$ 上等于 f. 这里只要求具有如下性质的辅助函数 $\phi_n(x,y)$:

1. $\phi_n(x,y)$ 具有紧支集且属于 C^3;

2. $\phi_n(x,y) = 1$ 当 $x^2+y^2 \le n^2$;

3. $\phi_n(x,y)$ 和它的所有阶数 ≤ 3 的导数的绝对值不超过一个与 x,y,n 无关的固定数 N. 合适的函数 ϕ_n 可以用各种方法容易地构造出来 [1].

用 $g_n(\xi,\eta)$ 表示 $f_n = \phi_n f$ 的傅里叶变换

$$g_n(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\iint e^{-i(x\xi+y\eta)}\phi_n(x,y)f(x,y)dxdy, \tag{80a}$$

那么

$$\begin{aligned}
|g(\xi,\eta) - g_n(\xi,\eta)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\iint e^{-i(x\xi+y\eta)}(1-\phi_n)f dxdy\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{x^2+y^2>n^2} |(1-\phi_n)f|dxdy \\
&\leq (N+1)\iint\limits_{x^2+y^2<n^2} |f|dxdy.
\end{aligned}$$

由 $|f|$ 在全平面的积分收敛这个假定推知

$$\lim_{n\to\infty} g_n(\xi,\eta) = g(\xi,\eta) \tag{80b}$$

对所有的 (ξ,η) 一致成立. 为了验证 $g(\xi,\eta)$ 也满足形如 (79c) 的不等式, 用莱布尼茨法则我们看到

$$\left|\frac{\partial^3 f_n}{\partial x^3}\right| = \left|\frac{\partial^3}{\partial x^3}\phi_n f\right|$$

$$\leq N\left(\left|\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right| + 3\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right| + 3\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| + |f|\right).$$

---

1) 例如, 定义 $h(S)$:

$$h(S) = \begin{cases} 1, & S \leq 0, \\ (1-S^4)^4, & 0 \leq S \leq 1, \\ 0, & 1 \leq S, \end{cases}$$

则

$$\phi_n(x,y) = h(x-n)h(-n-x)h(y-n)h(-y-n)$$

具有所要求的一切性质.

关于 f_n 对 y 的三阶导数，有类似的估计式成立. 设 I 是 f 和它的阶数 ≤ 3 的导数的绝对值在全平面上的积分中的最大值. 那么

$$\int\int \left(|f_n| + \left|\frac{\partial^3}{\partial x^3} f_n\right| + \left|\frac{\partial^3}{\partial y^3} f_n\right|\right) dxdy$$
$$\leq (1+8+8)NI = 17NI.$$

把不等式 (79c,d) 用到函数 f_n, 我们发现对任意的 n 和所有的 ξ, η, 不等式

$$|g_n(\xi,\eta)| \leq \frac{M}{(1+\xi^2+\eta^2)^{3/2}} \tag{80c}$$

成立，其中

$$M = \frac{51\sqrt{3}}{2\pi} NI.$$

从 (80b) 推出

$$|g(\xi,\eta)| \leq \frac{M}{(1+\xi^2+\eta^2)^{3/2}}$$

对所有的 (ξ,η) 和相同的常数 M 成立.

由于 f_n 有紧支集，早就知道反演公式

$$f_n(x,y) = \frac{1}{2\pi} \iint e^{i(x\xi+y\eta)} g_n(\xi,\eta) d\xi d\eta \tag{80d}$$

是成立的. 对于给定的 (x,y), 一旦 n 充分大： $n^2 > x^2+y^2$, 我们就有 $f_n(x,y) = f(x,y)$. 当 $n \to \infty$, 应用 (80b) 和 (80c), 从 (80d) 我们就得到 f 本身的反演公式 (77b).

二重傅里叶积分的帕塞瓦尔等式的形式是

$$\iint |f(x,y)|^2 dxdy = \iint |g(\xi,\eta)|^2 d\xi d\eta, \tag{81}$$

其中积分展布在全平面. 证明可以把第 624 页节 e 对于单变量函数的帕塞瓦尔等式所用的论证，完全一样地移过来，只要对 f 加上与导出傅里叶积分公式所加的相同的假定. 对第 624 页所用到的表达式作适当的修改，我们考虑积分

$$J_{A,B} = \iint\limits_{x^2+y^2<B^2} |f(x,y) - f_A(x,y)|^2 dxdy,$$

其中

$$f_A(x,y)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\xi^2+\eta^2<A^2} e^{i(x\xi+y\eta)}g(\xi,\eta)d\xi d\eta$$

$$g_B(\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{x^2+y^2<B^2} e^{-i(x\xi+y\eta)}f(x,y)dxdy.$$

这里，代替 (73) 我们得到等式

$$J_{A,B}=\iint\limits_{x^2+y^2<B^2}(|f(x,y)|^2+|f_A(x,y)|^2)dxdy$$

$$-\iint\limits_{\xi^2+\eta^2<A^2}[\overline{g(\xi,\eta)}g_B(\xi,\eta)+g(\xi,\eta)\overline{g_B(\xi,\eta)}]d\xi d\eta.$$

令 $A\to\infty$ 和 $B\to\infty$, 和以前一样推出等式 (81).

练 习 4.13

1. 求下列函数的傅里叶变换

(a) $f(x)=\begin{cases} c, & 当 0<x<a, \\ 0, & 当 x<0 或 x>a. \end{cases}$

(b) $f(x)=\begin{cases} e^{-ax}, & 当 x>0 (a>0), \\ 0, & 当 x<0. \end{cases}$

(c) $J_n(x)/x^n$ (J_n 由 4.12 的练习 8 定义).

4.14 欧拉积分 (伽玛函数)[1]

用包含一个参变量的广义积分所定义的函数的最重要的例子之一，就是伽玛函数 $\Gamma(x)$, 它是我们将要相当详细地加以讨论的.

a. 定义和函数方程

1) E. Artin: The Gamma Function (有 Micheal Butler 的英译本), Holt, Rinehart and Winston: New York, 1964, 给出了与这问题有关的讨论.

在第一卷里，对每个 $x>0$，我们用广义积分

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt \tag{82a}$$

来定义 $\Gamma(x)$.

我们可以把积分分成两个，一个是展布在 t 轴从 $t=1$ 到 $t=\infty$ 这个无界区间上的连续函数积分，另一个是展布在从 $t=0$ 到 $t=1$ 的有界区间上的积分，其中至少对 0,1 之间的 x 而言，被积函数是奇异 (无界的) 的. 第 599 至 600 页所推演的判别法立即表明，积分 (82a) 对任意 $x>0$ 收敛，且在 x 正半轴的任何不含 $x=0$ 的闭区间上一致收敛. 因此 **函数 $\Gamma(x)$ 在 $x>0$ 连续**.

对公式 (82a) 进行形式微商所得到的积分，在任意区间 $0<a\le x\le b$ 也是一致收敛的，因此 (看第 602 页)，$\Gamma(x)$ 有由

$$\Gamma'(x)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}\log t dt, \tag{82b}$$

$$\Gamma''(x)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}\log^2 t dt \tag{82c}$$

给出的连续一阶与二阶导数.

通过简单的变量替换，$\Gamma(x)$ 的积分 (82a) 可以变换成其它常用的形式. 这里，我们仅仅指出变换 $t=u^2$，它把伽玛函数变成

$$\Gamma(x)=2\int_0^{\infty} e^{-u^2}u^{2x-1}du.$$

因此，对于 $\alpha=2x-1$ 有

$$\int_0^{\infty} e^{-u^2}u^{\alpha}du=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1+\alpha}{2}) \tag{82d}$$

[参看公式 (48d)，第 592 页].

正如在第一卷 (第一分册 345 页) 所做的，对分式 (82a) 进行分部积分得到关系式

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x) \tag{83a}$$

对任意 $x>0$ 成立. 这个等式称为**伽玛函数的函数方程**.

显然, $\Gamma(x)$ 并不由这个函数方程的解所具有的性质唯一确定, 因为只要用任意一个周期为 1 的函数乘 $\Gamma(x)$, 就得到了另外的解, 表示式

$$u(x)=\Gamma(x)p(x), \tag{83b}$$

其中

$$p(x+1)=p(x) \tag{83c}$$

表示方程 (83a) 最一般的解, 因为如果 $u(x)$ 是任意解, 则此式

$$p(x)=\frac{u(x)}{\Gamma(x)}$$

[因为 $\Gamma(x)\neq 0$, 总可以这样做] 满足方程 (83c).

代替 $\Gamma(x)$, 考虑函数 $u(x)=\log\Gamma(x)$ 常常更方便; 对于所有正的 x, 这是有定义的, 因为当 $x>0$ 时, $\Gamma(x)>0$. 这函数满足函数方程 (一个 "差分方程")

$$u(x+1)-u(x)=\log x. \tag{83d}$$

把 $\log\Gamma(x)$ 加上任意一个周期为 1 的函数, 我们就得到 (83d) 另外的解. 为了唯一地刻划函数 $\log\Gamma(x)$, 我们必须用其它条件补充函数方程 (83d), 这种形式的一个十分简单的条件由下面的波尔 - 摩尔路波定理给出:

差分方程

$$u(x+1)-u(x)=\log x \tag{84a}$$

在 $x>0$ **的每个凸解恒等于函数** $\log\Gamma(x)$, **至多可能差一个常数.**

b. 凸函数. 波尔 - 摩尔路波定理的证明

一个有二阶连续导数的函数, 如果 $f''\geq 0$, 则称它为凸的 (见第一卷第 402 页). 一个甚至可以用到非二次可微函数上去的更一般的定义是:

定义在一个区间(可以伸展到无穷)上的函数 $f(x)$, 称为凸的, 如果对定义域中任意的 x_1, x_2 和任意满足 $\alpha+\beta=1$ 的正数 α, β, 不等式

$$f(\alpha x_1+\beta x_2) \leq \alpha f(x_1)+\beta f(x_2) \tag{84b}$$

成立. (84b) 在几何上是指, 曲线 $y=f(x)$ 上横坐标为 x_1, x_2 的任意两点, 联接它们的割线永远不能在曲线的下面 (参看图 4.20).

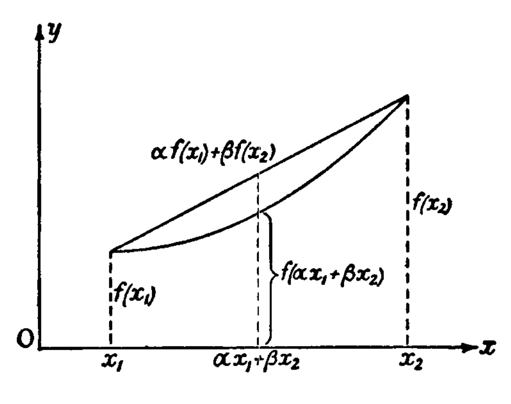


图 4.20　凸函数

对于二次连续可微的函数 f, 应用微分学的中值定理, 以及 α, β 是和为 1 的正数这一事实, 我们发现

$$\begin{aligned}
&\alpha f(x_1)+\beta f(x_2)-f(\alpha x_1+\beta x_2)\\
&=\beta[f(x_2)-f(\alpha x_1+\beta x_2)]\\
&\quad -\alpha[f(\alpha x_1+\beta x_2)-f(x_1)]\\
&=\alpha\beta(x_2-x_1)f'(\xi_2)-\alpha\beta(x_2-x_1)f'(\xi_1)\\
&=\alpha\beta(x_2-x_1)(\xi_2-\xi_1)f''(\eta),
\end{aligned} \tag{84c}$$

其中 ξ_1, ξ_2, η 是满足

$$x_1<\xi_1<\alpha x_1+\beta x_2<\xi_2<x_2, \quad \xi_1<\eta<\xi_2 \tag{84d}$$

的适当的中间值. 如果对 f 的定义域上所有的 η, 有 $f''(\eta) \geq 0$, 则从 (84c) 直接推出 (84b) 成立. 反过来, 利用 (84d), 从 (84b) 、(84c)

就知道 $f''(\eta) \geq 0$. 对于固定的 α, β, 令 $x_2 \to x_1$, 由 f'' 的连续性知对定义域中任意 x_1 有 $f''(x_1) \geq 0$. 因此, 一个二次连续可微函数 f 在(84b)意义下是凸的, 当且仅当 $f'' \geq 0$.

凸函数不必二次可微, 甚至不必一次可微. $f(x) = |x|$ 提供了一个例子. 然而, 一个凸函数在它定义域内的点必须是连续的. 这一点可以从下面的事实推出来: 对于凸函数, 不等式

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3} \tag{84e}$$

对定义域中任意适合

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4$$

的 x_i 成立. 为了证明 (84e), 我们把 x_2 写成

$$x_2 = \alpha x_1 + \beta x_3,$$

其中

$$\alpha = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}, \beta = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}.$$

这样

$$\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$
$$= \frac{\alpha f(x_1) + \beta f(x_3) - f(\alpha x_1 + \beta x_3)}{\alpha\beta(x_3 - x_1)} \geq 0,$$

同时, 类似地

$$\frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3} - \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \geq 0,$$

这就蕴涵了 (84e). 总之, (84e) 说明, 凸函数 f 在不相交的区间上的差商是单调的. 由此推出

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(\xi_2) - f(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} \leq \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3}$$

对任意在 x_2, x_3 之间的 ξ_1, ξ_2 成立. 因此, f 在区间 $x_2 < x < x_3$ 满足 利普希茨条件, 从而在这个区间是连续的. 对于定义域内部的任意 x, 我们总可以找到合适的 x_1, x_2, x_3, x_4, 以证明 f 在 x 连续.

为了证明函数 $\log\Gamma(x)$ 是凸的, 只要证明

$$\frac{d^2\log\Gamma}{dx^2} = \frac{\Gamma''\Gamma - \Gamma'^2}{\Gamma^2} \geq 0 \tag{84f}$$

就够了. 关系式 (84f) 可以从积分形式的柯西 - 施瓦茨不等式 [1] 推出, 这是因为, 用 (82a,b,c), 有

$$\begin{aligned}
\Gamma'^2 &= \left(\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\log t dt\right)^2 \\
&= \left(\int_0^\infty (e^{-\frac{t}{2}}\sqrt{t^{x-1}})(e^{-\frac{t}{2}}\sqrt{t^{x-1}}\log t)dt\right)^2 \\
&\leq \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt \cdot \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\log^2 t dt = \Gamma\Gamma''.
\end{aligned}$$

现在令 $u(x)$ 是函数方程 (84a) 在 $x > 0$ 的任意一个凸解. 我们对 $0 < h < x$ 构造表示式

$$v_h(x) = u(x+h) - 2u(x) + u(x-h).$$

应用凸函数 u 满足的关系式 (84e), 对 $0 < h < k < x$, 我们有

$$\begin{aligned}
v_k(x) - v_h(x) &= [u(x+k) - u(x+h)] - [u(x-h) - u(x-k)] \\
&= (k-h)\left[\frac{u(x+k) - u(x+h)}{k-h} - \frac{u(x-h) - u(x-k)}{-h+k}\right] \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

---

1) 从和的形式的柯西 - 施瓦茨不等式, 我们知道对任意连续函数 $f(x), g(x)$, 以及对他们定义域的任意分划, 这个分划用 x_i 把区间分为长为 Δx_i 的小区间, 有

$$\left(\sum_i f(x_i)g(x_i)\Delta x_i\right)^2 \leq \left(\sum_i f^2(x_i)\Delta x_i\right)\left(\sum_i g^2(x_i)\Delta x_i\right),$$

把分划变细取极限, 我们就得到积分形式的柯西 - 施瓦茨不等式

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right).$$

通过对积分区域取极限, 这个不等式可直接从连续函数的正常黎曼积分推广到广义积分.

因此，对于固定的 $x, v_h(x)$ 是 h 的连续非减函数. 现在，由 u 的函数方程得出

$$\begin{aligned}v_1(x) &= u(x+1) - 2u(x) + u(x-1)\\&= [u(x+1) - u(x)] - [u(x) - u(x-1)]\\&= \log x - \log(x-1).\end{aligned}$$

因此，对 $0 < h < 1 < x$,

$$\begin{aligned}0 &= v_0(x) \le v_h(x)\\&= u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)\\&\le v_1(x) = \log \frac{x}{x-1}.\end{aligned} \tag{84g}$$

由于

$$\lim_{x\to\infty} \log \frac{x}{x-1} = \log 1 = 0,$$

从 (84g) 我们发现，对 (84a) 的每个凸解，有

$$\lim_{x\to\infty}[u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)] = 0 \quad (0 < h < 1).$$

因此，如果 $p(x)$ 是 (84a) 两个凸解之差，也就有

$$\lim_{x\to\infty}[p(x+h) - 2p(x) + p(x-h)] = 0.$$

由于 $p(x)$ 是周期为 1 的周期函数，故函数

$$p(x+h) - 2p(x) + p(x-h)$$

也一样，并且当 $x \to \infty$ 时它以 0 为极限. 显然这样的函数必须恒等于 0. 因此

$$p(x+h) - 2p(x) + p(x-h) = 0 (0 < h < 1). \tag{84h}$$

设 $M = p(\xi)$ 是区间 $1 \le x \le 2$ 上的连续函数 $p(x)$ 的最大值，那么对所有 $x > 0, p(x) \le M$, 并且由 (84h)

$$2M = 2p(\xi) = p(\xi + h) + p(\xi - h) \le 2M \quad (0 \le h < 1).$$

因此

$$p(\xi - h) = p(\xi + h) = M \quad (0 \le h < 1).$$

又由于 p 有周期 1,

$$p(x) = M = \text{常数}\ (\text{对所有}x > 0).$$

这就表明了, (84a) 的任意两个特解至多差一个常数, 从而完成了波尔 - 摩尔路波定理的证明.

c. 伽玛函数的无穷乘积

波尔 - 摩尔路波定理可以用来导出由高斯和魏尔斯特拉斯发现的伽玛函数的无穷乘积表达式.

对于任意给定的函数 $g(x)$, 我们容易验证, 差分方程

$$w(x+1) - w(x) = g(x)$$

的一个特解由无穷级数

$$\begin{aligned} w(x) &= -\sum_{j=0}^{\infty} g(x+j) \\ &= -g(x) - g(x+1) - g(x+2) - \cdots \end{aligned}$$

给出, 假如这个级数是收敛的话. 我们不能把这个结果直接用到取 $g(x) = \log x$ 的方程 (84 a), 因为所得到的级数是发散的. 然而对 (84a) 微分两次所得到的 $w = u''$ 的差分方程却可以用这方法来解. 方程

$$w(x+1) - w(x) = -\frac{1}{x^2} (x > 0) \tag{85a}$$

的一个特解由

$$w(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(x+j)^2} \tag{85b}$$

给出. 在这里, 无穷级数在任何有限区间 $a \le x \le b$(见第一卷第二分册 600 页) 一致收敛, 因为

$$\frac{1}{(x+j)^2} \le \frac{1}{j^2} \quad (x \ge 0),$$

因此，w 在 $x>0$ 连续. 而且级数还可以逐项积分 (见第一卷第二分册 601 页), 从而得出级数

$$v(x)=-\frac{1}{x}+\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^x\frac{d\xi}{(\xi+j)^2}$$
$$=-\frac{1}{x}-\sum_{j=1}^{\infty}(\frac{1}{x+j}-\frac{1}{j}), \tag{85c}$$

其中在这个等式中出现的级数在任何区间 $0\leq x\leq b$ 也一致收敛. 因此，$v(x)+\frac{1}{x}$ 对 $x\geq 0$ 是 x 的连续函数，且 $x=0$ 时函数值为 0. 由前面的构造知

$$v'(x)=w(x)\ (x>0). \tag{85d}$$

因为根据 (85a,d) 有

$$\frac{d}{dx}[v(x+1)-v(x)]=-\frac{1}{x^2}\ (x>0),$$

所以推出

$$v(x+1)-v(x)=\frac{1}{x}+c\ (x>0), \tag{85e}$$

其中 c 是常数. 为了确定 c 的值，我们看到，由 (85e)

$$-c=\lim_{x\to 0}[v(x)+\frac{1}{x}]-\lim_{x\to 0}v(x+1)=-v(1)$$
$$=1+\sum_{j=1}^{\infty}(\frac{1}{1+j}-\frac{1}{j})$$
$$=1+(\frac{1}{2}-1)+(\frac{1}{3}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{3})+\cdots=0.$$

积分 (85c), 得到函数

$$U(x)=-\log x-\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^x(\frac{1}{\xi+j}-\frac{1}{j})d\xi$$
$$=-\log x-\sum_{j=1}^{\infty}[\log(x+j)-\log j-\frac{x}{j}], \tag{85f}$$

其中无穷级数在任何区间 $0 \leq x \leq b$ 也一致收敛．和前面一样，我们断言 $U(x)$ 对 $x > 0$ 是 x 的连续函数，满足

$$U'(x) = v(x), \quad \lim_{x \to 0}(U(x) + \log x) = 0,$$

$$U(x+1) - U(x) - \log x = \text{常数} = C. \tag{85g}$$

这里

$$\begin{aligned} C &= \lim_{x \to 0} U(x+1) - \lim_{x \to 0}[U(x) + \log x] = U(1) \\ &= -\sum_{j=1}^{\infty}[\log(1+j) - \log j - \frac{1}{j}] \\ &= -\lim_{n \to \infty}\sum_{j=1}^{n-1}[\log(1+j) - \log j - \frac{1}{j}] \\ &= \lim_{n \to \infty}(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \log n). \end{aligned}$$

由此可见 C 等于第一卷第二分册所引进的**欧拉常数**

$$C = \lim_{n \to \infty}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n). \tag{85h}$$

根据 (85g), 函数

$$u(x) = U(x) - Cx$$

满足差分方程

$$u(x+1) - u(x) = \log x.$$

此外，根据 (85b)

$$u''(x) = w(x) > 0 \quad (x > 0),$$

因此 $u(x)$ 是**凸的**．还有，由于

$$u(1) = U(1) - C = 0 = \log \Gamma(1),$$

由波尔定理知 $u(x)$ 和 $\log\Gamma(x)$ 恒等:

$$\log\Gamma(x) = -Cx - \log x - \sum_{j=1}^{\infty}(\log\frac{x+j}{j} - \frac{x}{j}). \tag{86a}$$

我们的推导还表明

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -C + v(x) = -C - \frac{1}{x} - \sum_{j=1}^{\infty}(\frac{1}{x+j} - \frac{1}{j}), \tag{86b}$$

$$\frac{d^2\log\Gamma(x)}{dx^2} = w(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(x+j)^2}. \tag{86c}$$

在方程 (86a) 两边取指数，得到 $\frac{1}{\Gamma(x)}$ 的 魏尔斯特拉斯无穷乘积:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{Cx}\prod_{j=1}^{\infty}(1+\frac{x}{j})e^{-\frac{x}{j}}. \tag{86d}$$

我们可以把 (86d) 写成稍为不同的形式, 其中不含欧拉常数 C. 由 (86a), (85h)

$$\begin{aligned}
\log\Gamma(x) &= -\log x + \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(\frac{x}{j} - \log\frac{x+j}{j}) - Cx \\
&= -\log x + \lim_{n\to\infty}[x(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} - C - \log n) \\
&\quad + x\log n - \sum_{j=1}^{n}\log\frac{x+j}{j}] \\
&= -\log x + \lim_{n\to\infty}[x\log n + \sum_{j=1}^{n-1}\log j \\
&\quad - \sum_{j=1}^{n-1}\log(x+j)].
\end{aligned}$$

因而，我们得到公式

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}{x(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+n-1)}n^x, \quad (x>0), \tag{86e}$$

这就是**伽玛函数的高斯无穷乘积**.

不仅对正的 x 值，而且对所有 $x \neq 0, -1, -2, \cdots$, 右边的极限存在. 对于一个给定的 x, 选择正整数 m 充分大，使得 $x+m>0$. 这样，在极限号下用 $n+m$ 代替 n, 我们就得到

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdots(n-1)}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)}n^x \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdots(n+m-1)}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n+m-1)}(n+m)^x \\
&= \lim_{n\to\infty} [\frac{n(n+1)\cdots(n+m-1)(n+m)^x}{x(x+1)\cdots(x+m-1)n^{x+m}}] \\
&\quad \times [\frac{1\cdot 2\cdots(n-1)n^{x+m}}{(x+m)(x+m-1)\cdots(x+m+n-1)}] \\
&= \frac{\Gamma(x+m)}{x(x+1)\cdots(x+m-1)}.
\end{aligned}$$

因此, 我们能够用公式 (86e) 对所有异于 0 与负整数的 x 定义 $\Gamma(x)$. 当 x 趋向这些例外值之一时， $\Gamma(x)$ 变成无穷. 推广了的函数 $\Gamma(x)$ 显然仍然满足函数方程

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \tag{86f}$$

d. 延拓定理

伽玛函数在负数 x 所取的值, 还能够通过所谓的延拓定理, 很容易从它在正数 x 所取的值得到. 我们构造乘积 $\Gamma(x)\Gamma(-x)$, 也就是

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdots(n-1)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}n^x \\
&\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdots(n-1)}{-x(1-x)(2-x)\cdots(n-1-x)}n^{-x},
\end{aligned}$$

把两个极限过程结合为一个，得到

$$\Gamma(x)\Gamma(-x) = -\frac{1}{x^2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left\{1-(\frac{x}{1})^2\right\}\left\{1-(\frac{x}{2})^2\right\}\cdots\left\{1-(\frac{x}{n-1})^2\right\}},$$

只要 x 不是整数. 但是，应用第一卷 (第二分册 678 页) 中的正弦的无穷乘积

$$\frac{\sin\pi x}{\pi x} = \prod_{v=1}^{\infty}(1-(\frac{x}{v})^2),$$

我们得到

$$\Gamma(x)\Gamma(-x) = -\frac{\pi}{x\sin\pi x}.$$

因此

$$\Gamma(-x) = -\frac{\pi}{x\sin\pi x}\frac{1}{\Gamma(x)}.$$

通过计算乘积 $\Gamma(x)\Gamma(-x)$, 我们可以把这个关系式写成稍为不同的形式. 由于 (86f), 有

$$\Gamma(1-x) = -x\Gamma(-x),$$

我们得到 **延拓定理**

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x}. \tag{87a}$$

因此，如果取 $x=\frac{1}{2}$, 便有 $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$. 由于

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^{\infty} e^{-u^2}du,$$

我们在这里得到积分

$$\int_0^{\infty} e^{-u^2}du.$$

取值 $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$(见第 548 页) 这一事实的一个新证明. 此外，我们能够计算自变量 $x=n+\frac{1}{2}$ 的伽玛函数 (其中 n 是任何正整数)：

$$\begin{aligned}\Gamma(n+\frac{1}{2}) &= (n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})\\ &= \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2^n}\sqrt{\pi}.\end{aligned}\tag{87b}$$

e. 贝塔函数

另一个用含参变量的广义积分来定义的重要函数是**欧拉的贝塔函数**. 贝塔函数用

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.\tag{88a}$$

定义. 当 x 或 y 小于 1, 积分是广义的. 然而用第 599 页的判别法, 它对 x 与 y 是一致收敛的，只要我们限制在区间 $x\geq\varepsilon, y\geq\eta$, 其中 ε,η 是任意的正数. 因此它对所有正的 x,y 表示一个连续函数.

利用变换 $t=\tau+\frac{1}{2}$, 我们得到 $B(x,y)$ 稍为不同的表示式

$$B(x,y)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}+\tau)^{x-1}(\frac{1}{2}-\tau)^{y-1}d\tau.\tag{88b}$$

如果现在令 $\tau=t/2s$, 其中 $s>0$, 我们便得到

$$(2s)^{x+y-1}B(x,y)=\int_{-s}^{s}(s+t)^{x-1}(s-t)^{y-1}dt.\tag{88c}$$

最后，如果在公式 (88a) 中令 $t=\sin^2\phi$, 我们就得到

$$B(x,y)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2x-1}\phi\cos^{2y-1}\phi d\phi.\tag{88d}$$

现在我们来证明，利用几个乍看起来有点奇怪的变换怎么能够用伽玛函数把贝塔函数表示出来.

如果不等式 (88c) 的两边乘以 e^{-2s}, 并且对 s 从 0 到 A 积分, 我们就有

$$B(x,y)\int_0^A e^{-2s}(2s)^{x+y-1}ds$$
$$=\int_0^A e^{-2s}ds\int_{-s}^{s}(s+t)^{x-1}(s-t)^{y-1}dt.$$

右边的二重积分可以看作函数

$$e^{-2s}(s+t)^{x-1}(s-t)^{y-1}$$

在 s,t 平面上由直线 $s\pm t=0$ 与 $s=A$ 围成的等腰三角形上的积分. 如果我们应用变换

$$\begin{cases}\sigma=s+t,\\ \tau=s-t,\end{cases}$$

这个积分就变成

$$\frac{1}{2}\iint_R e^{-\sigma-\tau}\sigma^{x-1}\tau^{y-1}d\sigma d\tau,$$

积分区域 R 现在是 σ,τ 平面上由直线 $\sigma=0,\tau=0$ 和 $\sigma+\tau=2A$ 围成的三角形.

如果让 A 无限增加, 由 (82a), 左边趋向函数

$$\frac{1}{2}B(x,y)\Gamma(x+y).$$

因此, 右边也必须收敛, 而且它的极限是 σ,τ 平面上整个第一象限的二重积分, 而这个象限是通过等腰三角形来逼近的. 由于在这区域内被积函数是正的, 而且对于一列单调的区域积分收敛 (用第 4 章第 547 页), 所以这个极限不依赖于逼近这个象限的方式. 特别, 我们可以用边长为 A 的正方形, 从而写成

$$B(x,y)\Gamma(x+y)=\lim_{A\to\infty}\int_0^A\int_0^A e^{-\sigma-\tau}\sigma^{x-1}\tau^{y-1}d\sigma d\tau$$
$$=\int_0^\infty e^{-\sigma}\sigma^{x-1}d\sigma\int_0^\infty e^{-\tau}\tau^{y-1}d\tau.$$

这样我们便得到重要的关系式 [1])

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{89a}$$

从这个关系式我们看到，贝塔函数同二项式系数

$$\binom{n+m}{n}=\frac{(n+m)!}{n!m!}$$

的关系，粗略地说，就像伽玛函数同数 $n!$ 的关系一样．事实上，对于整数 n,m,

$$\binom{n+m}{m}=\frac{1}{(n+m+1)B(n+1,m+1)}. \tag{89b}$$

最后，我们指出，根据 (98a), 定积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^\alpha tdt \quad 与 \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^\alpha tdt$$

等于函数

$$\frac{1}{2}B(\frac{\alpha+1}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{2}B(\frac{1}{2},\frac{\alpha+1}{2}),$$

可以简单地用伽玛函数表出：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^\alpha tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^\alpha tdt=\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\frac{\Gamma(1+\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}. \tag{89c}$$

---

1) 这个关系式也可以从波尔定理得到．我们首先证明 $B(x,y)$ 满足函数方程

$$B(x+1,y)=\frac{x}{x+y}B(x,y),$$

因此函数

$$u(x,y)=\Gamma(x+y)B(x,y)$$

作为 x 的函数满足伽玛函数的函数方程

$$u(x+1)=xu(x).$$

$\log B(x,y)$, 从而 $\log u(x)$ 的凸性可以从柯西 - 施瓦茨不等式用第 638 页上证明 $\log\Gamma(x)$ 同样的方法推出．这样，我们就有

$$\Gamma(x+y)B(x,y)=\Gamma(x)\alpha(y).$$

最后，如果令 $x=1$, 就有 $\alpha(y)=\Gamma(1+y)B(1,y)=\Gamma(y)$.

f. 分数次微商和积分，阿贝尔积分方程

应用我们关于伽玛函数的知识，现在我们来实现推广微商和积分概念的简单过程．我们早已看到 (第 85 页)，公式

$$F(x)=\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)dt=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^x (x-t)^{n-1}f(t)dt \quad \text{(90a)}$$

给出了函数 f 在从 0 到 x 之间的 n 次累次积分．如果用符号 D 表示微分算子，又如果用 D^{-1} 表示算子

$$\int_0^x \cdots dx,$$

它是微分的逆运算，那么我们就可以写出

$$F(x)=D^{-n}f(x). \quad \text{(90b)}$$

这个公式的数学意义是：函数 $F(x)$ 和它的前 $n-1$ 阶微商在 $x=0$ 取值为 0，而 $F(x)$ 的 n 阶微商为 $f(x)$．而现在很自然的是要构造出算子 $D^{-\lambda}$ 的定义，这里正数 λ 甚至不必是整数．**函数 $f(x)$ 在 0 与 x 之间的 λ 次积分**是由表示式

$$D^{-\lambda}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^x (x-t)^{\lambda-1}f(t)dt \quad \text{(90c)}$$

定义的．

这个定义现在可以用来把 (用算子 D^n 或 $\frac{d^n}{dx^n}$ 作为符号来表示的)n 阶微商推广到 μ 阶微商，这里 μ 是一个任意的非负数．令 m 为大于 μ 的最小整数，使得 $\mu=m-\rho$, 其中 $0<\rho\leq 1$. 这样，我们的定义就是

$$D^{\mu}f(x)=D^mD^{-\rho}f(x)=\frac{d^m}{dx^m}\frac{1}{\Gamma(\rho)}\int_0^x (x-t)^{\rho-1}f(t)dt. \quad \text{(91a)}$$

颠倒两个微商的次序将给出 (另一个) 定义

$$D^{\mu}f(x)=D^{-\rho}D^mf(x)=\frac{1}{\Gamma(\rho)}\int_0^x (x-t)^{\rho-1}f^{(m)}(t)dt.$$

运用伽玛函数的公式可以证明

$$D^{\alpha}D^{\beta}f(x)=D^{\beta}D^{\alpha}f(x),$$

其中 α 和 β 是任意实数，这一点留给读者去做 (见练习 12). 读者将看出，这些关系式和微分的推广过程是有意义的，只要函数 $f(x)$ 按普通的意义对所有的 x 有充分高阶的微商，而且当 $x\leq 0$ 时其值为 0. 一般说，如果 $f(x)$ 有直到 m 阶 (包括 m 阶在内) 的连续微商，则 $D^{\mu}f(x)$ 存在.

和这些概念相联系的，我们指出有重要应用的**阿贝尔积分方程**. 由于

$$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi},$$

所以函数 $f(x)$ 的 $\frac{1}{2}$ 阶积分由公式

$$D^{-\frac{1}{2}}f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x\frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}dt=\psi(x) \tag{92}$$

给出.

如果右边的函数 $\psi(x)$ 给定，要解的是未知函数 $f(x)$ 时，公式 (92) 称为阿贝尔积分方程. 如果函数 $\psi(x)$ 连续可微，并且在 $x=0$ 时为零，则方程的解由公式

$$f(x)=D^{\frac{1}{2}}\psi(x) \tag{93a}$$

或

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{\psi(t)}{\sqrt{x-t}}dt \tag{94}$$

给出.

练　习　4.14

1. 对非负整数 n, 验证

$$\Gamma(n+\frac{1}{2})=\frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{n!4^n}.$$

2. 求 $\Gamma(\frac{1}{2}-n)$, 其中 n 是正整数.

3. 证明

$$B(x,x)=2^{1-2x}B(x,\frac{1}{2}).$$

4. 证明

$$I=\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^x}}=\frac{\sqrt{\pi}}{x}\frac{\Gamma(\frac{1}{x})}{\Gamma(\frac{1}{x}+\frac{1}{2})}.$$

5. 建立下面的关系式:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n+1)!}$,

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2}$.

6. 证明由平面 $x=0,y=0,z=0$ 与曲面

$$\frac{x^m}{a^m}+\frac{y^m}{b^m}=\frac{z}{c}\quad (m>0)$$

所围成的正卦限的体积为

$$abh(\frac{h}{c})^{\frac{2}{m}}\frac{\Gamma(1+\frac{1}{m})^2}{\Gamma(2+\frac{2}{m})}.$$

7. 证明

$$\iiint f(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2})x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}dxdydz$$

等于

$$\frac{a^p b^q c^r}{8}\frac{\Gamma(\frac{p}{2})\Gamma(\frac{q}{2})\Gamma(\frac{r}{2})}{\Gamma(\frac{p+q+r}{2})}\int_0^1 f(\xi)\xi^{(p+q+r-2)/2}d\xi,$$

其中三重积分区域是椭球 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1$ 截正卦限的那部分.

(提示: 引入新变量 ξ,η,ζ 如下:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\xi \text{ 或 } x=a\sqrt{\xi(1-\eta)}$$

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\eta \text{ 或 } y=b\sqrt{\xi\eta(1-\zeta)}$$

$$\frac{y^2}{c^2}=\zeta \text{ 或 } z=c\sqrt{\xi\eta\zeta},$$

并分别对 η 和 ζ 积分).

8. 求立体

$$(\frac{x}{a})^{\frac{1}{n}}+(\frac{y}{b})^{\frac{1}{n}}+(\frac{z}{c})^{\frac{1}{n}}\leq 1, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$$

的质心的 x 坐标.

9. 求星形线 $x^{2/3}+y^{2/3}=R^{2/3}$ 所包围的面积对 x 轴的惯性矩.

10. 证明 $n+1$ 重积分

$$\int\cdots\int f(x_0+\cdots+x_n)x_0^{a_0-1}\cdots x_n^{a_n-1}dx_0\cdots dx_n$$

等于

$$\frac{\Gamma(a_0)\cdots\Gamma(a_n)}{\Gamma(a_0+\cdots+a_n)}\int_0^1 f(t)t^{a_0+\cdots+a_n-1}dt,$$

其中多重积分的区域是正卦限 $x_k\geq 0(k=0,1,\cdots,n)$ 内由超平面 $x_0+\cdots+x_n=1$ 所围成的部分.

11. 证明

$$2^{2x}\frac{\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2})}{\Gamma(2x)}=2\sqrt{\pi}.$$

12. (a) 证明对于任意正实数 α 和 β 有

$$D^\alpha D^\beta f(x)=D^\beta D^\alpha f(x),$$

其中微商由 (91a) 定义, 而 f 有通常意义下的直到 $(p+q)$ 阶的微商且在 $x=0$ 等于零, 这里 p 和 q 分别是大于 α 和 β 的最小整数.

(b) 在上述条件下, 是否 $D^\alpha D^\beta f(x)=D^{\alpha+\beta}f(x)$ 总成立?

(c) 把上述结果推广到 α 或 β 可以是负数的情形.

附录：积分过程的详细分析[1)]

A.1. 面积

集合 S 的面积，可以沿着直觉所启示的路线，就像在第 458 页中所解释的那样，严格地定义．本质上人们用平行于坐标轴的直线把平面划分为许多正方形．人们把全体包含在 S 内的正方形的面积加起来，这就得到 S 的面积的一个下界．把所有和 S 有公共点的正方形面积加起来，我们就得到 S 的面积的一个上界．如果当平面的分划无限变细下去时这些上界和下界趋向一个公共值，我们把这公共值看成 S 的面积．区域面积的这种意义，体现了用矩形组成的区域从内部及外部来逼近该区域的同一思想，这种思想曾把我们引导到函数 $f(x)$ 的黎曼积分的概念．

这里定义的面积概念，称为 S 的 **若尔当测度**(这个名称沿用了近代严格分析的开创者之一的名字) 或 S 的 **容量**．这并非引入面积的唯一方法 (一种适用于更一般集合的非常重要的定义产生了所谓的 S 的 **勒贝格测度**)．本附录中我们将只研究若尔当测度，它具有更为直观的优点，而且对于本书范围内的分析学的那些部分来说，它是足够了．

为了简单起见，我们将主要讲平面的情形．然而，我们的论述将适用于高维的情形，只要把术语改一下，例如用 **体积** 代替 **面积**，**立方体** 代替 **正方形** 等等．

a. 平面的分划和相应的内、外面积

为了确定 x, y 平面内的集合 S 的面积，我们用平行于坐标轴的等距平行线，逐次地把平面划分为边长为 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots$ 的正方

1) 在读这个附录以前，读者应好好复习一下第一卷中导致黎曼积分的论证 (见第 216 至 220 页)．

形[1]. 第 n 次划分 (其中 n 是正整数) 是通过直线

$$x=\frac{i}{2^n}, y=\frac{k}{2^n} \tag{1}$$

作出的, 其中 i 和 k 取遍所有的整数. 这样, 平面被分成了许多闭正方形 R_{ik}^n.

$$R_{ik}^n: \frac{i}{2^n} \le x \le \frac{i+1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \le y \le \frac{k+1}{2^n}. \tag{2}$$

现在, 设 S 是平面的任一有界点集[2]. 我们对于将要确定的 S 的面积 A, 从下及从上构造它的逼近, 这就是所有整个包含在 S 内的正方形 R_{ik}^n 的面积的和, 以及所有同 S 有公共点的正方形 R_{ik}^n 的面积的和. 其中边长为 2^{-n} 的正方形 R_{ik}^n 的面积为 2^{-2n}. 利用第 124 页解释过的集合之间的关系的符号表示, 我们便有[3]

$$A_n^- = \sum_{\substack{i,k \\ R_{ik}^n \subset S}} 2^{-2n} A_n^+ = \sum_{\substack{i,k \\ R_{ik}^n \cap S \neq \phi}} 2^{-2n} \tag{3}$$

(看图 4-1).

从定义显然有

$$0 \le A_n^- \le A_n^+. \tag{4}$$

当我们从第 n 次分划转到第 $n+1$ 次分划时, 每个正方形 R_{ik}^n 被分成四个正方形 R_{rs}^{n+1}. 如果 R_{ik}^n 包含在 S 内, 它的部分 R_{rs}^{n+1} 也如此. 另一方面, 如果 R_{ik}^n 中的一个部分 R_{rs}^{n+1} 包含了 S 的一个点, 那么整个正方形也包含该点. 由此推出[4], 逐次的和满足不等式

$$A_n^- \le A_{n+1}^- \le A_{n+1}^+ \le A_n^+. \tag{5}$$

1) 在这里, 用把平面分成正方形这种十分特殊的分划来引进面积, 是有好处的, 以后, 将证明更一般的分划也导致同样的面积.

2) 严格地说, 面积只对于有界集才有定义, 虽然对于某些无界集, 可以用"正常"面积的极限定义它的"广义"面积.

3) 如果没有整个包含在 S 内的正方形 R_{ik}^n, 我们令 $A_n^-=0$.

4) 这里我们用到, 构成 R_{ik}^n 的四个正方形 R_{rs}^{n+1} 的面积和等于 R_{ik}^n 的面积. 这一点可以从算术恒等式 $4\cdot 2^{-2(n+1)}=2^{-2n}$ 推出来.

从 (5) 式看到，和 A_n^- 是一上界为 A_1^+ 的非减序列，因此，它们收敛到一个极限

$$A^- = \lim_{n\to\infty} A_n^-.$$

类似地，和 A_n^+ 是一下界为 A_1^- 的非增序列，因而收敛

$$A^+ = \lim_{n\to\infty} A_n^+.$$

根据 (5), 对所有的 n 都有

$$0 \le A_n^- \le A^- \le A^+ \le A_n^+. \tag{6}$$

我们称 A^- 为 S 的 **内面积**, A^+ 为 **外面积** [1]. 每一个有界集都有一个内面积和一个外面积. 我们用 $A^-(S)$ 和 $A^+(S)$ 来表示它们.

内面积 $A^-(S)$ **取值为**0, **当且仅当** S **没有内点**, 因为一个没有内点的集合不含任何正方形 R_{ik}^n, 因此对所有的 $n, A_n^- = 0$, 从而 $A^- = 0$. 而一个有内点的集合，对充分大的 n, 一定包含某个 R_{ik}^n, 因此对充分大的 n 有 $A_n^- > 0$, 从而 $A^- > 0$.

b. 若尔当可测集及其面积

我们称一个有界集 S 是若尔当可测的，如果 S 的内面积 A^- 和 S 的外面积 A^+ 相等 [2]. 我们用 A 来表示公共值，并称它为 S 的 **面积** 或 **若尔当测度**

$$A^-(S) = A^+(S) = A(S).$$

注意，对于我们定义中用到的正方形 R_{ik}^n, 原来的 "面积" 概念和新的 "面积" 概念，即若尔当测度，是一致的. 每个正方形 R_{ik}^n

1) 术语 **内若尔当测度** 或 **内容量**, 以及相应的 **外若尔当测度** 和 **外容量** 也是常用的.

2) 代替短语 "集合 S 是若当可测的"，我们将简单说成 " S 有面积"，术语 **测度** 有与维数无关的优点，在一维的时候它可以很好地用来表示 **长度**, 二维的时候表示 **面积**, 高维的时候表示 **体积**.

在上述一般定义的意义下有若当测度 2^{-2n}, 因为对 $S = R^n_{ik}$ 以及 $m > n$

$$\begin{aligned} A^-_m(S) &= (2^{m-n})^2 2^{-2m} = 2^{-2n}, \\ A^+_m(S) &= [(2^{m-n})^2 + 4(2^{m-n}) + 4]2^{-2m} \\ &= 2^{-2n} + 2^{2-m-n} + 2^{2-2m}. \end{aligned}$$

更一般地，任何其边平行于坐标轴的矩形 S,

$$S : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d,$$

就像初等几何所要求的那样，具有面积 $(b-a)(d-c)$；因为，给定一个正整数 n, 我们可以找到整数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, 使得

$$\alpha 2^{-n} < a \leq (\alpha + 1)2^{-n}, \beta 2^{-n} \leq b < (\beta + 1)2^{-n},$$

$$\gamma 2^{-n} < c \leq (\gamma + 1)2^{-n}, \delta 2^{-n} \leq d < (\delta + 1)2^{-n}.$$

因此

$$\begin{aligned} A^-_n(S) &= (\beta - \alpha - 1)(\delta - \gamma - 1)2^{-2n} \\ &\geq (b - a - 2^{1-n})(d - c - 2^{1-n}), \\ A^+_n(S) &= (\beta - \alpha + 1)(\delta - \gamma + 1)2^{-2n} \\ &\leq (b - a + 2^{1-n})(d - c + 2^{1-n}), \end{aligned}$$

从而当 $n \to \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} A^-_n(S) = \lim_{n\to\infty} A^+_n(S) = (b-a)(d-c).$$

我们的下一个任务是找出集 S 可测性的判别法. 我们将十分一般地证明：**有界集 S 有面积的充分必要条件是它边界 ∂S 的面积为0.**

在证明中，考虑把平面划分为正方形 R^n_{ik}, 并且像 (3) 中那样构造相应的和 $A^-_n(S)$ 与 $A^+_n(S)$. 显然，$A^+_n - A^-_n$ 表示那样一些正方形面积的和，这些正方形既含有 S 的点也含有不属于 S 的点. 设 σ_n 是这些正方形的集合. σ_n 的每一个正方形含有 S 的一个边界点，因为在连接 R^n_{ik} 中属于 S 的点 P 和不属于 S 的点 Q 的线

段上，一定含有 S 的边界点，因此，σ_n 中的每一个正方形都和 ∂S 有公共点，从而

$$A_n^+(S) - A_n^-(S) \le A_n^+(\partial S).$$

如果 ∂S 面积为 0(或者换句话说，外面积为 0), 那么当 $n \to \infty$ 时，右边趋向于 0, 因而我们发现，$A^+(S) - A^-(S) = 0$ 或说 S 有面积.

反过来，设 S 有面积，这时

$$\lim_{n\to\infty}[A_n^+(S) - A_n^-(S)] = 0. \tag{7}$$

平面上的一点 P, 如果对于固定的 n, P 只属于包含在 S 内的正方形 R_{ik}^n, 则 P 一定是 S 的内点 [1]. 类似地，如果一个点仅属于不含 S 的点的正方形, 则它一定是 S 的外点. 设 P 是 S 的边界点. 如果 P 不位于 σ_n 的任何正方形内，它必定既属于包含在 S 内的一个正方形，又属于不含 S 的点的另一个正方形. 但这是不可能的，因为两个这样的正方形没有公共点. 因此 ∂S 中的每一点包含在 σ_n 的一个正方形 R_{ik}^n 中，这些正方形的总面积是 $A_n^+(S) - A_n^-(S)$. 任何同 ∂S 有公共点的正方形，或者是 σ_n 中的正方形，或者是这样一种正方形的八个邻近正方形中的一个. 因此，同 ∂S 有公共点的正方形 R_{ik}^n 的总面积，不超过 σ_n 的正方形总面积的九倍:

$$A_n^+(\partial S) \le 9[A_n^+(S) - A_n^-(S)].$$

可见，(7) 蕴涵了 $A^+(\partial S) = 0$, 从而 ∂S 面积为 0.

一个在我们的意义下没有面积的集合的例子，是单位正方形的有理点集合，即全体 (x, y) 点的集合，其中 x, y 是 0,1 之间的有理数. 在这里，边界 ∂S 是全体满足 $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$ 的 (x, y) 构成的集合，因而面积为 1. 由我们的定理知 S 不是若尔当可测的.

---

1) 记住，我们的正方形 R_{ik}^n 是闭的，因此，P 有可能属于四个正方形.

c. 面积的基本性质

设 S 和 T 是两个有界集，且 S 包含在 T 内．包含 S 的点的正方形必然包含 T 的点，因此

$$A_n^+(S) \leq A_n^+(T).$$

令 $n \to \infty$, 我们一般地得到

$$A^+(S) \leq A^+(T), \text{当 } S \subset T. \tag{8}$$

在 $A^+(T) = 0$ 的特殊情形，我们推出也有 $A^+(S) = 0$. 因此面积为0的集合的任何子集的面积为0.

对任意两个有界集 S,T, 覆盖 S 和 T 的正方形全体也覆盖它们的并集 $S \cup T$. 因此

$$A_n^+(S \cup T) \leq A_n^+(S) + A_n^+(T).$$

当 $n \to \infty$, 我们得到

$$A^+(S \cup T) \leq A^+(S) + A^+(T). \tag{9}$$

更一般地，对任意有限个集合 $S_1, S_2, \cdots, S_N$, 我们有外面积的有限半可加性, 用公式表示就是

$$A^+\left(\bigcup_{i=1}^{N} S_i\right) \leq \sum_{i=1}^{N} A^+(S_i). \tag{10}$$

如果在 (10) 中所有 S_i 的面积为 0, 则并集也一样:

任何有限个面积为0的集合的并集, 面积为0. 特别地, 任何由有限个点构成的集合面积为0.

按定义，面积为 0 的集合，可以用有限个总面积 A_n^+ 为任意小的正方形所覆盖．更一般地， 一个集合 S 面积为0, 如果对任意

$\varepsilon > 0$, 可以找到有限个集合 $S_1, S_2, \cdots, S_N$, 它们盖住 S, 且外面积的和小于 ε, 因为这时，根据 (8) 和 (9), S 的外面积小于 ε, 而根据 ε 是任意正数，就有 $A^+(S) = 0$.

例如，平面上一条用方程

$$y = f(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

非参数地给出的连续弧 C, 面积为 0. 为了证明这点，我们只须用到这样的事实，即定义在有界闭区间上的连续函数是一致连续的. 因为，给定 $\varepsilon > 0$, 可找到 n 充分大，使得对定义域上的任意两点，只要距离 $< 2^{-n}$, f 的差就小于 ε. 我们可以找到整数 α, β 使得

$$\alpha 2^{-n} \leq a < (\alpha + 1)2^{-n}, \beta 2^{-n} < b \leq (\beta + 1)2^{-n}.$$

函数 $f(x)$ 的图形中，对应于 x 的值满足 $i2^{-n} < x < (i+1)2^{-n}$ 的那一部分，包含在一个其边平行于坐标轴，边长分别为 2^{-n} 与 2ε 的长方形内. 因此， C 包含在其边平行于坐标轴，总面积为

$$(\beta + 1 - \alpha)2^{-n}(2\varepsilon) \leq (b - a + 2^{1-n})2\varepsilon$$

的矩形的并集内. 当 $n \to \infty$, 就有

$$A^+(C) \leq 2(b - a)\varepsilon,$$

由 ε 是任意正数，便知弧 C 的面积为 0.

大多数有实际兴趣的区域，是由有限条形如 $y = f(x)$ 或 $x = g(y)$ 的连续弧所围成的区域. 由于有限个面积为 0 的集合的并集本身面积为 0, 所以这样的区域的边界面积为 0, 从而是若尔当可测的:

设集合 S 的边界包含在有限个弧的并集之内，这些弧的每一条由方程 $y = f(x)$ 或 $x = g(y)$ 给出，其中函数 f 或 g 分别在某

有限闭区间上定义且连续，那么 S 有面积 [1].

现在我们来考虑 S 与 T 的并集及交集，其中 S 与 T 是任意两个若尔当可测集. S 的或 T 的内点是 $S\cup T$ 的内点; S 的同时也是 T 的外点是 $S\cup T$ 的外点. 因此 $S\cup T$ 的边界点一定是 S 或 T 的边界点. 类似地, $S\cap T$ 的边界点必须是 S 或 T 的边界点. 因此 $S\cup T$ 与 $S\cap T$ 的边界在 ∂S 与 ∂T 的并集之内，从而面积为 0, 这是因为边界 ∂S 和 ∂T 的面积为 0. 这就证明了下面的基本事实:

两个若尔当可测集的并集和交集也是若尔当可测的.

应用 (9), 我们有

如果集 S 和 T 有面积，则它们的并集也有面积，且

$$A(S\cup T)\leq A(S)+A(T). \tag{11}$$

此外，如果 S 和 T 不相重叠 (即两集合中任何一个的内点是另一个的外点), 那么我们还知道

$$A(S\cup T)=A(S)+A(T). \tag{12}$$

因为这时正方形 R_{ik}^{n} 不能同时包含在 S 和 T 内. 由此第 n 次划分

$$A_n^-(S\cup T)\geq A_n^-(S)+A_n^-(T).$$

当 $n\to\infty$ 时便得

$$A^-(S\cup T)\geq A^-(S)+A^-(T).$$

由于 S,T 和 $S\cup T$ 是若尔当可测的，这就推出

$$A(S\cup T)\geq A(S)+A(T),$$

1) 更一般地，用同样的办法推得, n 维集合 S 是若尔当可测的，如果它的边界包含在有限块曲面的并集之内，而每一块曲面由形如

$$x_j=f(x_1,\cdots,x_{j-1},x_{j+1},\cdots,x_n)$$

的方程给出，其中 f 在 $x_1,\cdots,x_{j-1},x_{j+1},\cdots,x_n$ 空间的一个有界闭集上连续.

这样从 (11) 便推出 (12).

这个结果可以直接推广到任意有限多个若尔当可测集, 从而构成 **面积的有限可加性**:

如果有限多个集合 $S_1, \cdots, S_N$ **中的每一个有面积, 且没有两个集合是重叠的, 那么** $S_1, \cdots, S_N$ **的并集也有面积, 且**

$$A(S) = A(S_1) + A(S_2) + \cdots + A(S_N). \tag{13}$$

这个加法定理可以用一个 **减法定理** 来补充. 给定两个集合 S, T, 满足 $S \subset T$, 我们用 $T - S$ 表示 T 中不属于 S 的点所构成的集合. 我们将证明, 若 S 与 T 有面积, 且 $S \subset T$, 则 $T - S$ 有面积, 且

$$A(T - S) = A(T) - A(S). \tag{14}$$

容易地再一次看出, $T - S$ 的边界包含在 S 和 T 的边界的并集里, 所以 $T - S$ 有面积. 另外 S 与 $T - S$ 没有公共点, 因此不重叠, 而它们的并集是 T, 于是根据可加性法则 (12),

$$A(T) = A(S) + A(T - S),$$

它等价于 (14).

关于面积的加法与减法规则的一个更对称的组合, 就是对任意两个若尔当可测集 S 与 T 成立的恒等式

$$A(S \cap T) + A(S \cup T) = A(S) + A(T). \tag{15}$$

事实上, 在四个集合 $S, T, S \cap T, S \cup T$ 之中, 有恒等式

$$S \cup T - T = S - S \cap T.$$

由于四个集合都有面积, 我们可以应用 (14), 从而推出 (15).

上述的这些定理允许我们把面积概念从它的定义中由于用到了特殊的正方形 R_{ik}^n 而形成的任何限制中解放出来. 我们将会看

到，面积可以通过很多种对平面的更一般的分划来定义，包括像把平面分为其边平行于坐标轴的矩形的那种分划.

首先，我们注意到，对一个若尔当可测集 S 来说，所有与 S 的边界 ∂S 充分接近的点可以包含在一个面积任意小的集合中，这是因为，由于 ∂S 的面积为 0, 对给定的 $\varepsilon > 0$, 我们可以找到 $n = n(\varepsilon)$, 使得和 ∂S 有公共点的正方形 R_{ik}^n 的集合 σ_n 的总面积 $< \varepsilon/q$. 设 P 是平面上的一个点，它与 ∂S 某点的距离 $< 2^{-n}$. 那么 P 或者属于 σ_n 中正方形的一个，或者属于这种正方形邻近八个正方形中的一个. 那么，由 σ_n 的所有正方形以及与它们邻近的正方形所构成的并集是一个面积 $< \varepsilon$ 的集合，它包含了所有和 ∂S 距离 $< 2^{-n}$ 的点.

现在取一个分划 Σ, 它把全平面分为其边平行于坐标轴的闭矩形. 这些矩形并不需要全等，但我们要求，分划必须使得所有矩形 ρ 的直径 [1] 小于 $2^{-n(\varepsilon)}$. 我们对分划中所有包含在 S 中的矩形 ρ 的面积作和 $A_\Sigma^-(S)$, 以及对所有同 S 有公共点的 ρ 作和 $A_\Sigma^+(S)$. 显然

$$A_\Sigma^-(S) \le A(S) \le A_\Sigma^+(S).$$

此外， $A_\Sigma^+(S) - A_\Sigma^-(S)$ 表示所有既含 S 的点又含非 S 的点的矩形 ρ 的面积之和. 这些矩形必定含有 S 的边界点. 由于它们的直径小于 2^{-n}, 这种矩形 ρ 的每一个点与 ∂S 的某点的距离小于 2^{-n}. 因此这些矩形的总面积小于 ε, 于是

$$A_\Sigma^+(S) - A_\Sigma^-(S) < \varepsilon,$$

从而

$$A(S) - A_\Sigma^-(S) < \varepsilon, A_\Sigma^+(S) - A(S) < \varepsilon.$$

取把平面分成长方形的一个分划序列 Σ_n, 使得 Σ_n 的矩形的最大直径趋向于 0. 我们发现，相应的和 $A_n^+(S)$ 与 $A_n^-(S)$ 趋向于我们的集合的面积 $A(S)$.

---

1) 集合的直径一般地可以定义为集合中任意两点的距离的上确界 (或者，在有界闭集的情形，就是最大值). 对矩形 ρ 来说，就是对角线的长度.

上面用到的论证可以同样好地用到把全平面分成一些集合 ρ 的更一般的分划 Σ_n 上去. 我们只需要求, 单个的集合 ρ 是若尔当可测的、闭的和连通的, 并且分划中集合 ρ 的最大直径, 当 $n \to \infty$ 时趋向于 0.

A.2 多元函数的积分

a. 函数 $f(x,y)$ 的积分的定义

我们首先定义函数在整个 x,y 平面上的积分. 在这一节里我们都假设函数 $f(x,y)$ 对所有的 (x,y) 有定义, 但在某一有界集外等于 0, 也就是说, 对离原点充分远的 (x,y), 有 $f(x,y)=0$(这样的函数称为具有紧支集的). 此外, 还假定 f 是有界的.

在定义这种函数的积分时, 我们采用讨论面积时把平面分成闭正方形 R_{ik}^n 的同一类分划. 设 M_{ik}^n 与 m_{ik}^n 是 f 在正方形 R_{ik}^n 的上、下确界 [1]. 与 f 以及平面的第 n 次分划相联系, 我们作上和

$$F_n^+ = \sum_{i,k} M_{ik}^n 2^{-2n}$$

与下和 [2]

$$F_n^- = \sum_{i,k} m_{ik}^n 2^{-2n}.$$

这些和中只有有限多项是不等于 0 的, 因为对距离远的点 $f=0$. 由 $m_{ik}^n \le M_{ik}^n$, 我们有

$$F_n^- \le F_n^+. \tag{16}$$

在从第 n 次到第 $n+1$ 次分划中, 每一个正方形 R_{ik}^n 都被分成四个面积为 2^{-2n-2} 的正方形 R_{js}^{n+1}. 显然

$$m_{ik}^n \le m_{js}^{n+1} \le M_{js}^{n+1} \le M_{ik}^n.$$

---

1) 见第一卷第一分册 110 页的定义.

2) 因子 2^{-2n} 表示由第 n 次分划所产生的正方形 R_{ik}^n 的面积. 在三维的情形, 我们把空间分为边长为 2^{-n} 的立方体, 这时因子变为 2^{-3n}. 类似地, 在 k 维的情形因子变为 2^{-kn}.

由此得到

$$F_n^- \le F_{n+1}^- \le F_{n+1}^+ \le F_n^+. \tag{17}$$

因为有界单调序列是收敛的 (见第一卷第 106 页), 上和与下和有极限

$$F^- = \lim_{n\to\infty} F_n^-, \quad F^+ = \lim_{n\to\infty} F_n^+, \tag{18}$$

其中当然有

$$F^- \le F^+. \tag{19}$$

我们称 F^+ 为函数 $f(x,y)$ 的 **上积分**, F^- 为下积分.

定义. **函数** $f(x,y)$ **称为可积的**[1], **如果它的上积分** F^+ **与它的下积分** F^- **有相同的值**, **这个值就称为** f **的积分**, **并表示为**

$$\iint f dxdy.$$

由于

$$F^+ - F^- = \lim_{n\to\infty}(F_n^+ - F_n^-),$$

我们直接得到下面的可积性条件: f **可积的充分必要条件是**

$$\lim_{n\to\infty}(F_n^+ - F_n^-) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i,k}(M_{ik}^n - m_{ik}^n)2^{-2n} = 0. \tag{20}$$

与第 n 次分划相联系, 我们可以作 **黎曼和**

$$F_n = \sum_{i,k} f(\xi_{ik}^n, \eta_{ik}^n)2^{-2n},$$

其中 $(\xi_{ik}^n, \eta_{ik}^n)$ 是正方形 R_{ik}^n 内任意一点. 显然

$$F_n^- \le F_n \le F_n^+. \tag{21}$$

---

1) 说准确些, 叫 "黎曼可积". 这里给出的定义只在下面这一点上与通常的定义不同, 这就是只限于考虑分成正方形 R_{ik}^n 的分划, 但它们是等价的.

从 (18) 我们得到结论:

如果 f 可积, 那么黎曼和收敛到 $\iint f dx dy$, 不管 R_{ik}^n 中的中间值 $(\xi_{ik}^n, \eta_{ik}^n)$ 如何选取.

b. 连续函数的可积性与在集合上的积分

对积分概念的应用来说, 下面的定理是基本的:

在某一有界集 S 外为0 的连续函数 f 是可积的.

为了证明, 我们可以假设 S 是正方形

$$|x| \leq N, \quad |y| \leq N,$$

其中 N 是正整数. 这样对第 n 次分划, 当 R_{ik}^n 不包含在 S 中时, $M_{ik}^n = m_{ik}^n = 0$. 有界闭集 S 上的连续函数 f 是一致连续的. 因此, 给定 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对于 S 中距离小于 δ 的任意两点, 相应的 f 值的差小于 ε. 这时

$$M_{ik}^n - m_{ik}^n \leq \varepsilon,$$

只要 n 充分大, 使得

$$\sqrt{2} \ \ 2^{-n} < \delta,$$

于是

$$F_n^+ - F_n^- \leq \Sigma \varepsilon 2^{-2n},$$

其中求和遍历所有使 R_{ik}^n 包含在 S 内的 i, k. 由于这些正方形的面积和等于 S 的面积 $4N^2$, 由此得到

$$F_n^+ - F_n^- \leq 4N^2 \varepsilon$$

对充分大的 n 成立, 从而 f 满足可积性条件 (20).

连续函数并非仅有的可积函数. 我们并不试图去决定最一般的可积函数. 然而, 我们确实要考虑一类重要的间断而可积的函数,

这就是有界若尔当可测集的特征函数. 对于平面上的任意集合, 我们对应一个由

$$\phi_s(x,y) = \begin{cases} 1 & 当(x,y) \in S \\ 0 & 当(x,y) \notin S \end{cases}$$

定义的特征函数.ϕ_s 的间断点正好是 S 的全部边界点.

现在我们取有界集 S, 并研究函数 ϕ_S 的可积性. S 的有界性蕴涵 ϕ_S 在某个有界集的外面为 0. 显然, 对这个函数, 对所有那些同 S 有公共点的正方形 R_{ik}^n 来说, $M_{ik}^n = 1$, 而对其它的正方形 $M_{ik}^n = 0$. 这样上和正好就是全体同 S 有公共点的正方形面积之和. 因此, 函数的上积分 $F^+ = \lim\limits_{n\to\infty} F_n^+$ 等于外面积 $A^+(S)$. 类似地, F_n^- 等于包含在 S 内的正方形的总面积 $A_n^-(S)$, 所以下积分 F^- 就是内面积 $A^-(S)$. 因此, ϕ_s 的可积性等价于 $A^+(S) = A^-(S)$, 也就是说, 等价于 S 的若尔当可测性. 当 ϕ_S 是可积的, 它的积分值自然就是面积 $A(S)$.

因此我们已经证明了.

如果集合 S 的特征函数是可积的, 那么 S 是有面积的, ϕ_S 的积分就是 S 的面积:

$$\iint \phi_S dxdy = A(S).$$

从连续函数与若尔当可测集的特征函数出发, 我们可以用下面的法则构造其它的可积函数:

两个可积函数的乘积是可积的.

设 f 与 g 是可积的, 对我们来说这就蕴涵了它们是有界的, 并且在某有界集的外面等于 0 . 令 $M_{ik}^n, M_{ik}'^n, M_{ik}''^n$ 表示三个函数 fg, f, g 在正方形 R_{ik}^n 的上确界, $m_{ik}^n, m_{ik}'^n, m_{ik}''^n$ 表示下确界. 对任意两点 $(\xi',\eta'), (\xi'',\eta'')$, 我们有

$$\begin{aligned} & f(\xi',\eta')g(\xi',\eta') - f(\xi'',\eta'')g(\xi'',\eta'') \\ & = f(\xi',\eta')[g(\xi',\eta') - g(\xi'',\eta'')] \\ & \quad + g(\xi'',\eta'')[f(\xi',\eta') - f(\xi'',\eta'')]. \end{aligned}$$

用 N 表示 $|f|$ 与 $|g|$ 的上界，便有

$$M_{ik}^{n}-m_{ik}^{n}\le N(M_{ik}^{\prime\prime n}-m_{ik}^{\prime\prime n})+N(M_{ik}^{\prime n}-m_{ik}^{\prime n}).$$

从这里直接推出，若 f 与 g 满足可积性条件 (20), 则 fg 也满足.

给定函数 $f(x,y)$ 与 x,y 平面上的一个集合 S, 如果函数 $f\phi_s$ 在前面所说的意义下是可积的，我们就说 f 在集合 S 上是可积的；并且就用

$$\iint\limits_{S} f dxdy=\iint f\phi_S dxdy \tag{22}$$

定义 f 在 S 上的积分.

从我们的乘积定理有

可积函数 f 是在任意若尔当可测集 S 上可积的. 特别地，每个有紧支集的连续函数在若尔当可测集上是可积的.

如果 f 是在集合 S 上可积的，那么积分

$$\iint\limits_{S} f dxdy$$

的值不依赖于 f 在不属于 S 的点上的值，因为函数 $f\phi_S$ 是由 f 在 S 的点上的值确定的. 甚至无需 f 处处有定义. 只要 S 属于函数 f 的定义域，我们可以定义 $f\phi_S$ 在 S 的点上等于 f, 而在其余的地方等于 0.

对任何可积函数，我们总可以把

$$\iint f dxdy$$

理解为

$$\iint\limits_{S} f dxdy,$$

其中 S 是某一个充分大的正方形，在它外面 f 等于 0.

c. 重积分的基本法则

我们早已看到，两个可积函数 f 与 g 的乘积仍然是可积的. $f+g$ 是可积的则更显然; 这一点，从可积条件 (20), 并注意到对任意集合有

$$\sup(f+g)-\inf(f+g) \\ \leq (\sup f-\inf f)+(\sup g-\inf g),$$

便可推出，从积分可表为黎曼和的极限便可证明

$$\iint (f+g)dxdy = \iint f dxdy + \iint g dxdy. \tag{23}$$

类似于单变量函数的积分学中值定理的一个估计，对积分学的所有工作来说是基本的. 设 S 是若尔当可测集， f 是可积函数. 令 M 与 m 是函数 f 在 S 的上、下界. 我们可以用黎曼和

$$F_n = \sum_{i,k} f(\xi_{ik}^n, \eta_{ik}^n)\phi_S(\xi_{ik}^n, \eta_{ik}^n)2^{-2n}$$

来逼近 $f\phi_S$ 的积分，其中我们注意选取 S 中的点作 $(\xi_{ik}^n, \eta_{ik}^n)$, 如果正方形 R_{ik}^n 包含这样的点的话. 这样一来

$$F_n = \Sigma f(\xi_{ik}^n, \eta_{ik}^n)2^{-2n},$$

其中求和遍历所有使正方形 R_{ik}^n 同 S 有共同点的 i,k. 由 $m \leq f \leq M$, 我们知道

$$mA_n^+(S) \leq F_n \leq MA_n^+(S).$$

当 $n \to \infty$ 时就有

$$mA^+(S) \leq F \leq MA^+(S).$$

由于按假设 S 有面积，我们就推出不等式

$$mA(S) \leq \iint_S f dxdy \leq MA(S) \tag{24}$$

成立.

设 S' 与 S'' 是若尔当可测集, 它们不相重叠 (即一个的内点是另一个的外点); 设 S 是它们的并集, s 是它们的交集. 这些集合的特征函数满足关系式

$$\phi_S + \phi_s = \phi_{S'} + \phi_{S''}.$$

因此, 对任意可积函数 f, 应用 (23), 我们发现

$$\iint f\phi_S dxdy + \iint f\phi_s dxdy = \iint f\phi_{S'} dxdy + \iint f\phi_{S''} dxdy;$$

也就是

$$\iint_S f dxdy + \iint_s f dxdy = \iint_{S'} f dxdy + \iint_{S''} f dxdy.$$

在这里, 根据假设, s 只包含 S' 与 S'' 的边界点, 因而 $A(s) = 0$, 由 (24) 也就有

$$\iint_s f dxdy = 0.$$

这就证明了**积分的可加性法则**:

如果集合 S' 和 S'' 有面积并且不相重叠, 而 f 是可积的, 那么关系式

$$\iint_{S'\cup S''} f dxdy = \iint_{S'} f dxdy + \iint_{S''} f dxdy \tag{25}$$

成立.

更一般的, 如果 S 是若尔当可测集 $S_1, \cdots, S_N$ 的并集, 没有两个是重叠的, 而 f 是可积的, 那么我们有

$$\iint_S f dxdy = \sum_{i=1}^{N} \iint_{S_i} f dxdy. \tag{26}$$

这个性质使我们有可能用比到现在为止曾经考虑过的更为一般的分划的黎曼和来逼近集合 S 上的积分. 为了简单起见, 假定 S 是闭的若尔当可测集, f 是 S 上的连续函数. S 的一个"一般的分划" Σ 就是指把 S 表示为互不重叠的若尔当可测集 $S_1,\cdots S_N$ 的并集. 在每个 S_i 中, 我们取任意一点 (ξ_i,η_i) 并构造广义的黎曼和

$$F_\Sigma=\sum_{i=1}^{N}f(\xi_i,\eta_i)A(S_i). \tag{27}$$

我们来证明, 当分划无限加密时, F 趋向于 f 在集合 S 上的积分. 连续函数 f 在有界闭集 S 上是一致连续的, 给定 $\varepsilon>0$, 我们总能找到 $\delta>0$, 使得对于 S 上距离小于 δ 的任意两点, f 的变化小于 ε. 假定分划 Σ 细密到这种程度, 使得所有 S_i 的直径 $<\delta$, 也就是说, 同一个 S_i 中的任意两点距离小于 δ. 这样

$$f(\xi_i,\eta_i)-\varepsilon\le f(\xi,\eta)\le f(\xi_i,\eta_i)+\varepsilon$$

对 S_i 的所有 (ξ,η) 成立, 从 (24) 就推出

$$[f(\xi_i,\eta_i)-\varepsilon]A(S_i)\le\iint\limits_{S_i}f(\xi,\eta)d\xi d\eta\le[f(\xi_i,\eta_i)+\varepsilon]A(S_i).$$

因此, 由 (26), (27), (13),

$$F_\Sigma-\varepsilon A(S)\le\iint\limits_{S}fdxdy\le F_\Sigma+\varepsilon A(S).$$

这就推出了, 广义黎曼和与函数 f 在 S 上的积分值之差任意小, 对所有充分细密的分划 Σ 都成立.

d. 化重积分为累次单积分

三重积分值的计算, 通常可以化为计算单积分和二重积分 (类似地, 二重积分可以化为单积分, 而一般的, n 维空间的积分可以化为 $n-1$ 维空间的积分), 只要应用下面的定理:

设 $f(x,y,z)$ 是定义在 x,y,z 空间上的可积函数. 假定对于任意固定的 x,y 值, $f(x,y,z)$ 作为 z 的单变量函数是可积的 [1]. 令

$$\int f(x,y,z)dz = h(x,y). \tag{28}$$

则 $h(x,y)$ 作为 x,y 的函数是可积的, 并且

$$\iiint f(x,y,z)dxdydz = \iint h(x,y)dxdy. \tag{29}$$

为了证明这点, 我们考虑把 x,y,z 空间分成立方体 C_{ijk}^n 的第 n 次分划, 其中

$$C_{ijk}^n : \frac{i}{2^n} \leq x \leq \frac{i+1}{2^n}, \frac{j}{2^n} \leq y \leq \frac{j+1}{2^n},$$
$$\frac{k}{2^n} \leq z \leq \frac{k+1}{2^n}.$$

我们构造 f 的三重积分的上和:

$$F_n^+ = \sum_{i,j,k} M_{ijk}^n 2^{-3n},$$

其中 M_{ijk}^n 是 $f(x,y,z)$ 在 C_{ijk}^n 的上确界. 类似地, 构造下和 F_n^-. 现在在正方形 R_{ij}^n

$$R_{ij}^n : \frac{i}{2^n} \leq x \leq \frac{i+1}{2^n}, \frac{j}{2^n} \leq y \leq \frac{j+1}{2^n}$$

中取任意固定点 (x,y), 则 M_{ijk}^n 是 $f(x,y,z)$ 作为 z 的函数在区间

$$I_k^n : \frac{k}{2^n} \leq z \leq \frac{k+1}{2^n}$$

的上界. 由 (24) 和 (26) 推出, 对 $x,y \in R_{ij}^n$ [2]

$$h(x,y) = \int f(x,y,z)dz$$

---

1) 当然, 这里的单积分是取与重积分相同的意义; 是借助把直线分成区间 $i2^{-n} \leq z \leq (i+1)2^{-n}$ 的特殊分划, 取上、下和等等来定义它们的.

2) 在我们的假定中自然包含了, f 在某一有界区域外等于 0, 因此这里只包含了有限多个区间 I_k^n.

$$= \sum_{k} \int_{I_k^n} f(x,y,z)dz \le \sum_{k} M_{ijk}^n 2^{-n}.$$

用 H_n^+ 与 H_n^- 表示在第 n 次分划中 $h(x,y)$ 积分的上和与下和. 由此推出

$$H_n^+ \le \sum_{ij}(\sum_{k} M_{ijk}^n 2^{-n})2^{-2n} = F_n^+.$$

类似地

$$H_n^- \ge F_n^-.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty} F_n^+ = \lim_{n\to\infty} F_n^- = \iiint f(x,y,z)dxdydz,$$

便得到 $h(x,y)$ 是可积的, 且 (29) 成立.

在适当的假设下, 我们可以进一步把二重积分

$$\iint h(x,y)dxdy$$

化为累次单积分

$$\int g(x)dx,$$

其中对每一个固定的 x, 函数 $g(x)$ 由

$$g(x) = \int h(x,y)dy$$

定义. 为了应用这种化法, 只要知道对每个固定的 $x, h(x,y)$ 是 y 的可积函数. 然而, 从公式 (29) 的二维的类似公式便可推出这一点, 只要加上假设: **对每个固定的 $x, f(x,y,z)$ 是 y,z 平面的可积函数**, 从而

$$\iiint f(x,y,z)dxdy = \int h(x,y)dy = g(x).$$

因此, 我们可以用累次单积分来计算原来的三重积分

$$\iiint f(x,y,z)dxdydz = \int \left[\int \left[\int f(x,y,z)dz\right]dy\right]dx. \qquad (30)$$

把柱体上的体积分化为二重积分的公式，提供了从初等微积分起就熟悉了的一个简单应用.

假定 x,y 平面上的闭集 S 有面积，$\alpha(x,y),\beta(x,y)$ 是定义在 S 上满足 $\alpha(x,y)\le\beta(x,y)$ 的连续函数，设 C 表示**柱形**区域

$$C:(x,y)\in S,\alpha(x,y)\le z\le\beta(x,y).$$

C 的边界由两部分组成：曲面 $z=\alpha(x,y)$ 与 $z=\beta(x,y)$(根据第 618 页其体积为 0)，以及 C 中的那些点，对于它们 (x,y) 在 S 的边界 S_b 上、由于 S_b 面积为 0，知后者的体积也是 0. 这就表明，C 是若当可测的. 现在设 $f(x,y,z)$ 是定义在 C 上的连续函数，这时 $f(x,y,z)\phi_c\,(x,y,z)$ 可积，而且

$$\iiint\limits_C f dxdydz=\iiint f(x,y,z)\phi_C(x,y,z)dxdydz$$

存在. 现在对任意固定的 $(x,y)\in S$，表示式 $f(x,y,z)\phi_C(x,y,z)$ 在区间

$$\alpha(x,y)\le z\le\beta(x,y)$$

(它可以收缩为一点) 之外为 0，在区间内是连续的，因此 $f(x,y,z)\phi_C$ (x,y,z) 可积，且有积分

$$\begin{aligned}h(x,y)&=\int f(x,y,z)\phi_C(x,y,z)dz\\&=\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)}f(x,y,z)dz.\end{aligned}$$

在这里我们已经用了区间 3 定积分的通常的记号. 对 $(x,y)\notin S$，我们有 $f(x,y,z)\phi_c(x,y,z)=0$ 对所有 z 成立. 因此，对任意 (x,y)，

$$h(x,y)=\phi_S(x,y)\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)}f(x,y,z)dz.$$

于是，在这里，等式 (29) 给出

$$\iiint\limits_C f(x,y,z)dxdydz=\iint\limits_S\Big[\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)}f(x,y,z)dz\Big]dxdy.\qquad(31)$$

A.3 面积与积分的变换

a. 集合的映射

我们的目的是要得到, 当积分变量改变时重积分的变换规则. 平面上的自变量 x, y 的这种改变是形如

$$\xi=f(x,y), \eta=g(x,y) \tag{32}$$

的映射 T, 其中 f 与 g 定义在映射的定义域 —— 集合 Ω 上 (类似的映射定义了高维的变量改变). Ω 中的每一点 (x, y) 有唯一的像 (ξ, η). 这些像构成了映射 T 的值域 $\omega=T(\Omega)$(见第 261 页). 更一般地, 对 Ω 的任意子集 S, 我们用 $T(S)$ 表示全体 S 的点的像所构成的集合.

对于这里所考虑的映射 T, 我们作如下的假设:

1. T 的定义域 Ω 是 x, y 平面的一个开的有界集.

2. 映射函数 f, g 在 Ω 是连续的且有连续的一阶导数: f_x, f_y, g_x, g

3. 映射的雅可比 Δ 在 Ω 不为 0 :

$$\Delta=\frac{d(\xi, \eta)}{d(x, y)}=\left|\begin{array}{ll}f_x & f_y \\ g_x & g_y\end{array}\right|=f_x g_y-f_y g_x \neq 0. \tag{33}$$

4. 映射是 1-1 的; 也就是说, ω 的每一点都是 Ω 中唯一一点的像.

公式 (33) 有一个重要推论 (见第 286 页), 就是对 Ω 的点 (x_0, y_0) 的每一个 ε 邻域 N_{ε}, 存在像点 (ξ_0, η_0) 的一个包含在 $T(N_{\varepsilon})$ 内的 δ 邻域. 这就推出, Ω 的任何子集 S, S 的内点变到 $T(S)$ 的内点. 因此开集 S 变成开集 $T(S)$[1]. 特别地, 我们的映射的值域是开的.

条件 4 说明, 存在一个逆映射 T^{-1}, 对 ω 内任意的 (ξ, η), 有 Ω 内唯一的 (x, y), 使得在 T 作用下变到 (ξ, η). 逆映射由函数

$$x=\alpha(\xi, \eta), \quad y=\beta(\xi, \eta)$$

1) 我们说 T 是一个开映射.

给出，它们定义在开集 ω 内，连续且有连续的一阶导数

$$\alpha_\xi = g_y/\Delta, \alpha_\eta = -f_y/\Delta, \beta_\xi = -g_x/\Delta, \beta_\eta = f_x/\Delta$$

(见第 286 页). 逆映射的雅可比是

$$\frac{d(x,y)}{d(\xi,\eta)} = \begin{vmatrix} \alpha_\xi & \alpha_\eta \\ \beta_\xi & \beta_\eta \end{vmatrix} = \alpha_\xi\beta_\eta - \alpha_\eta\beta_\xi = \frac{1}{\Delta},$$

当然也不为 0.

因此，简言之，逆变换具有我们对 T 所假定的一切性质.

为了得到集合 S 的像的面积，我们首先考虑 Ω 内的闭正方形 R^n_{ik}, 并估计 $T(R^n_{ik})$ 的面积. 我们假设，在 $R^n_{ik}, |f_x|, |f_y|, |g_x|, |g_y|$ 有上界 $\mu, |\Delta|$ 有上界 M. 我们还假设，量 f_x, f_y, g_x, g_y 在 R^n_{ik} 的任何变化，合起来有上界 ε. 对 R^n_{ik} 的左下角坐标，引入缩写号 $x_i = i2^{-n}, y_k = k2^{-n}$, 在 R^n_{ik} 我们可以用**线性**函数

$$\begin{aligned} f^n_{ik}(x,y) = f(x_i,y_k) + f_x(x_i,y_k)(x-x_i) \\ +f_y(x_i,y_k)(y-y_k), \\ g^n_{ik}(x,y) = g(x_i,y_k) + g_x(x_i,y_k)(x-x_i) \\ +g_y(x_i,y_k)(y-y_k) \end{aligned}$$

来逼近 f 与 g. 用微分学的中值定理 (见第 73 页), 对 R^n_{ik} 的每一点 (x,y), 我们有

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(x_i,y_k) + f_x(x',y')(x-x_i) \\ +f_y(x',y')(y-y_k), \\ g(x,y) = g(x_i,y_k) + g_x(x'',y'')(x-x_i) \\ +g_y(x'',y'')(y-y_k), \end{aligned}$$

其中 (x',y') 与 (x'',y'') 是 (x,y) 与 (x_i,y_k) 连线上适当的中间点. 由此，对 R^n_{ik} 内任意的 (x,y),

$$\begin{aligned} &|f(x,y) - f^n_{ik}(x,y)| \\ &= |[f_x(x',y') - f_x(x_i,y_k)](x-x_i) \\ &\quad +[f_y(x',y') - f_y(x_i,y_k)](y-y_k)| \leq 2\varepsilon 2^{-n}, \end{aligned}$$

而类似地

$$|g(x,y) - g^n_{ik}(x,y)| \leq 2\varepsilon 2^{-n}.$$

现在，线性映射

$$\xi = f_{ik}^n(x,y), \eta = g_{ik}^n(x,y) \tag{34}$$

把正方形 R_{ik}^n 变成顶点为

$$(f,g),(f+2^{-n}f_x, g+2^{-n}g_x),(f+2^{-n}f_y, g+2^{-n}g_y),$$

$$(f+2^{-n}f_x+2^{-n}f_y, g+2^{-n}g_x+2^{-n}g_y)$$

的平行四边形 π_{ik}^n，其中 f,g,f_x,f_y,g_x,g_y 在点 (x_i,y_k) 取值. 这个平行四边形的面积为行列式

$$\begin{vmatrix} 2^{-n}f_x & 2^{-n}f_y \\ 2^{-n}g_x & 2^{-n}g_y \end{vmatrix} = 2^{-2n}\Delta$$

的绝对值 (见第 210 页).$T(R_{ik}^n)$ 内任意点的坐标，与用线性变换所得到的 π_{ik}^n 中的点的对应坐标的差不超过 $2\varepsilon 2^{-n}$. 因此 $T(R_{ik}^n)$ 的每一点，或者在 π_{ik}^n 内，或者与 π_{ik}^n 的一条边的距离不超过 $2^{3/2}\varepsilon 2^{-n}$.$\pi_{ik}^n$ 的每条边的长度不超过 $\sqrt{2}2^{-n}\mu$. 与一条边的距离不超过 $2^{3/2}\varepsilon 2^{-n}$ 的点的集合，面积不超过

$$(4\sqrt{2}2^{-n}\varepsilon)(\sqrt{2}2^{-n}\mu) + \pi(2\sqrt{2}2^{-n}\varepsilon)^2 = 8\varepsilon(\pi\varepsilon+\mu)2^{-2n}.$$

由于 π_{ik}^n 的面积不超过 $M2^{-2n}$，我们发现，$T(R_{ik}^n)$ 包含在一个面积不超过

$$(M + 32\pi\varepsilon^2 + 32\pi\mu\varepsilon)2^{-2n} \tag{35}$$

的集合内.

现在取第 N 次分划中包含在 Ω 内的任意正方形 R_{jr}^N. 在闭集 R_{jr}^N 中，量 $|f_x|,|f_y|,|g_x|,|g_y|$ 有公共的上界 μ. 由于 f_x,f_y,g_x,g_y 在 R_{jr}^N 一致连续，我们可以把它细分为正方形 R_{ik}^n，使得这些函数在每一个正方形 $R_{ik}^n \subset R_{jr}^N$ 上的变化小于 ε. 如果用 M_{ik}^n 表示 $|\Delta|$ 在 R_{ik}^n 的上确界，从 (35) 我们就发现，$T(R_{jr}^N)$ 被一个总面积不超过

$$\sum_{R_{ik}^n \subset R_{jr}^N} (M_{ik}^n + 32\pi\varepsilon^2 + 32\mu\varepsilon)2^{-2n} = F_n^+ + (32\pi\varepsilon^2 + 32\mu\varepsilon)2^{-2N}$$

的集合所覆盖，其中 F_n^+ 是积分

$$\iint\limits_{R_{jr}^N} |\Delta| dxdy$$

对应于第 n 次分划的上和. 当 $n \to \infty$ 时，上和 F_n^+ 趋向于积分值，这是因为函数 $|\Delta|$ 在 R_{jr}^N 是连续的，从而是可积的. 由于 ε 是任意的正数，我们发现正方形 R_{jr}^N 的像的外面积满足不等式

$$A^+[T(R_{jr}^N)] \leq \iint\limits_{R_{jr}^N} |\Delta| dxdy, \tag{36}$$

它是我们计算像集合面积的第一步.

现在取任意若尔当可测集 S, 它和它的边界 ∂S 同时包含在一个开集 Ω 中. 我们可以找到一个闭集 $S' \subset \Omega$, 和一个 N, 使得当 $n > N$ 时，任何边长为 2^{-n} 且与 S 有公共点的正方形都完全包含在 S' 内 [1)]，对 $n > N$, 用 S_n 表示同 S 有公共点的正方形 R_{ik}^n 的并集. S_n 的像就被这些正方形的像所覆盖. 因此，从 (36) 就推出 $T(S)$ 的外面积的估计

$$\begin{aligned} A^+[T(S)] &\leq A^+[T(S_n)] \leq \sum_{R_{ik}^n \subset S_n} A^+[T(R_{ik}^n)] \\ &\leq \sum_{R_{ik}^n \subset S_n} \iint\limits_{R_{ik}^n} |\Delta| dxdy = \iint\limits_{S_n} |\Delta| dxdy. \end{aligned}$$

当 $n \to \infty$ 时，$|\Delta|$ 在 S_n 上的积分趋向于在 S 上的积分，这是因为 $|\Delta|$ 在 S' 有界. 对若尔当可测集 S 来说，同 S 有公共点但不完全包含在 S 内的 R_{ik}^n 的总面积趋向于 0. 这样，我们就证明了

$$A^+[T(S)] \leq \iint\limits_{S} |\Delta| dxdy \tag{37}$$

对任意闭包包含在 Ω 内的若尔当可测集成立.

---

1) 我们只要选择 S' 为所有与 S 有公共点的 R_{jr}^N 的并集即可，其中取 N 充分大.

在 S 的相同假设下，我们也可以把 (37) 应用到 S 的边界 ∂S 上，它是 Ω 的面积为 0 的闭子集. 因此，由 (37)

$$A^+[T(\partial S)] \le \iint\limits_{\partial S} |\Delta| dxdy \le (\max_{\partial S} |\Delta|) A(\partial S) = 0.$$

从而 $T(\partial S)$ 面积为 0. 设 (ξ, η) 是 $T(S)$ 的边界点，考虑 $T(S)$ 内极限为 (ξ, η) 的一串点列 (ξ_n, η_n).(ξ_n, η_n) 是 S 中点 (x_n, y_n) 的像. (x_n, y_n) 有一子序列收敛到点 (x, y)，它在 S 的闭包内，从而在 Ω 内. 映射 T 的连续性保证了 (ξ, η) 是 (x, y) 的像. 这里，(x, y) 不能是 S 的内点，因为否则 (ξ, η) 就一定是 $T(S)$ 的内点而不是边界点了. 可见，(x, y) 是 S 的边界点. 这样一来，$T(S)$ 的边界包含在 S 的边界点的像内，因而是我们已经证明了面积为 0 的集合 $T(\partial S)$ 的子集. 于是，$T(S)$ **边界的面积也为**0, 从而我们证明了，$T(S)$ 是若尔当可测的. 这样，我们就可以在 (37) 中用 $A[T(S)]$ 来代替 $A^+[T(S)]$，并得到 $A[T(S)]$ **存在**，**且对任意的闭包包含在** Ω **内的若尔当可测集** S，**有**

$$A[T(S)] \le \iint\limits_{S} |\Delta| dxdy = \iint\limits_{S} \left| \frac{d(\xi, \eta)}{d(x, y)} \right| dxdy \tag{38}$$

成立.

我们看到，$T(S)$ 的边界包含在 $T(\partial S)$ 内，从而包含在 ω 内. 因此，$T(S)$ 是闭包包含在 $\omega = T(\Omega)$ 内的若尔当可测集. 由于 T 和 T^{-1} 具有相同的性质，我们可以把公式 (38) 应用到逆变换去，从而也有

$$A(S) \le \iint\limits_{T(S)} \left| \frac{d(x, y)}{d(\xi, \eta)} \right| d\xi d\eta = \iint\limits_{T(S)} \left| \frac{1}{\Delta} \right| d\xi d\eta. \tag{39}$$

如果我们把最后这个公式用到包含在 Ω 内的正方形 R_{ik}^n, 我们就发现

$$2^{-2n} = A(R_{ik}^n) \le \iint\limits_{T(R_{ik}^n)} \left| \frac{1}{\Delta} \right| d\xi d\eta \le \frac{1}{m_{ik}^n} A[T(R_{ik}^n)],$$

其中 m_{ik}^n 是 $|\Delta|$ 在 R_{ik}^n 的下确界. 因此

$$A[T(R_{ik}^n)] \geq m_{ik}^n 2^{-2n}.$$

对于任意闭包包含在 Ω 内的若尔当可测集 S, 用 S_n 表示 $R_{ik}^n(\subset S)$ 的并集. 那么

$$A[T(S)] \geq A[T(S_n)] = \sum_{R_{ik}^n \subset S} A[T(R_{ik}^n)] \geq \sum_{R_{ik}^n \subset S} m_{ik}^n 2^{-2n} = F_n^-,$$

其中 F_n^- 是 $|\Delta|$ 在 S 上的积分的下和. 当 $n \to \infty$ 时, 我们就得到

$$A[T(S)] \geq \iint_S |\Delta| dxdy.$$

结合 (38), 我们就证明了下面的基本事实:

设 S 是闭包包含在变换 T 的定义域 Ω 内的若尔当可测集, 那么像 $T(S)$ 也有面积, 并且这个面积由下面的公式给出:

$$A[T(S)] = \iint_{T(S)} d\xi d\eta = \iint_S \left| \frac{d(\xi,\eta)}{d(x,y)} \right| dxdy. \tag{40}$$

b. 重积分的变换

很容易从表示面积变换规律的公式 (40), 转到更一般的积分变换公式. 对映射 T, 我们作同上面一样的假设. 现在设 S 是包含在 Ω 内的**闭的**若尔当可测集, $F(x,y)$ 是对 S 内的 (x,y) 有定义且连续的函数. 由于逆映射 $x=\alpha(\xi,\eta), y=\beta(\xi,\eta)$ 在 ω 内连续, 函数 $F(\alpha(\xi,\eta),\beta(\xi,\eta))$ 在集合 $T(S)$ 有定义且连续. 我们仍用字母 F 表示这个 ξ 与 η 的函数, 积分变换规律就可以写成

$$\iint_{T(S)} F d\xi d\eta = \iint_S F \left| \frac{d(\xi,\eta)}{d(x,y)} \right| dxdy. \tag{41}$$

为了证明，我们用广义黎曼和 (见第 670 页) 来表示连续函数的积分. 我们考虑 S 的一个一般的分划

$$S=\bigcup_{i=1}^{n} S_i,$$

其中 S_i 是 S 的互不重叠的闭的若当可测子集. 像集 $T(S_i)$ 为集合 $T(S)$ 提供了一个相应的分划. 由于变换 T 在闭集 S 上一致连续，当 S_i 的直径趋向于 0 时，像集 $T(S_i)$ 的直径也趋向于 0. 取划分如此之细，使得 f 在每个 S_i 上的变化小于 ε. 设 (x_i, y_i) 是 S_i 的一点，则 $F(x_i, y_i)$ 也就是 $F(\alpha(\xi,\eta),\beta(\xi,\eta))$ 在集合 $T(S_i)$ 上所取的值之一. 我们构造对应于 (41) 左边积分的黎曼和:

$$\begin{aligned}
&\sum_i F(x_i,y_i)A[T(S_i)]=\sum_i \iint_{S_i} F(x_i,y_i)|\Delta(x,y)|dxdy\\
&=\sum_i \iint_{S_i} F(x,y)|\Delta(x,y)|dxdy+r\\
&=\iint_{S} F(x,y)|\Delta(x,y)|dxdy+r,
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
|r|&=\left|\sum_i \iint_{S_i}[F(x_i,y_i)-F(x,y)]|\Delta(x,y)|dxdy\right|\\
&\leq \varepsilon\sum_i \iint_{S_i}|\Delta(x,y)|dxdy=\varepsilon A[T(S)].
\end{aligned}$$

当分划变细时，黎曼和趋向于 F 在集合 $T(S)$ 上的积分. 令 $\varepsilon\to 0$ 我们便得到等式 (41).

A.4 关于曲面面积定义的附注

在第 4.8 节 (第 556 页) 中，我们用多少有点不同于第一卷定

义弧长的方法，定义了曲面的面积. 在弧长定义中，我们从内接多角形出发，而在面积的定义中，我们却用切平面代替内接多面体.

为了看一看为什么不能用内接多面体，我们考虑 x,y,z 空间中，由方程 $x^2+y^2=1$ 给出的圆柱，在平面 $z=0$ 与 $z=1$ 之间的那一部分. 这个圆柱的面积是 2π. 现在，在这个柱面内作一个内接多面形，它的所有的面是全等三角形. 作法如下：首先把单位圆周分成 n 等分，然后在柱面上考虑 m 个等距的水平圆 $z=0, z=h, z=2h, \cdots, z=(m-1)h$, 其中 $h=\dfrac{1}{m}$. 我们划分每一个这样的圆周为 n 等分，使得每一个圆的分点就是前一个的弧的中心. 我们现在考虑内接于圆柱的多面体，它的棱包括各个圆的弦，以及相邻圆周上的相邻分点的连线. 这个多面体的面是全等的等腰三角形，而如果 n 和 m 取得充分大，这个多面体将接近柱面到任意我们需要的程度. 如果让 n 固定，我们就可以取 m 这样大，使得三角形的每一个与 $x-y$ 平面近似平行到任意需要的程度，因而它和柱面成任意陡的角. 这样我们不能再指望三角形面积的和近似于柱面面积. 事实上，每个三角形的底长为 $2\sin\dfrac{\pi}{n}$, 由毕达哥拉斯定理，它的高为

$$\sqrt{\frac{1}{m^2}+\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{m^2}+4\sin^4\frac{\pi}{2n}}.$$

由于三角形的数目显然为 $2mn$, 多面体的面积为

$$\begin{aligned}F_{n,m}&=2mn\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{\frac{1}{m^2}+4\sin^4\frac{\pi}{2n}}\\&=2n\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{1+4m^2\sin^4\frac{\pi}{2n}}.\end{aligned}$$

这个表示式的极限并非与 m,n 趋向于无穷的方式无关. 例如，固定 n 而让 $m\to\infty$, 表示式无界递增. 然而，如果取 m,n 趋向于无穷同时满足 $m=n$, 则表示式趋向 2π. 如果取 $m=n^2$, 我们就得到极限

$$2\pi\sqrt{1+\pi^2/4},$$

等等. 从上述多面体面积的表示式看出，数集 $F_{n,m}$ 的下极限 (最小聚点) 是 2π, 其中 m 以任意方式随同 n 趋向无穷[1]. 这一点可以立刻从 $F_{n,m} \geq 2n\sin\frac{\pi}{n}$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty} 2n\sin\frac{\pi}{n} = 2\pi$ 推出.

最后，我们不加证明地指出一个理论上很有意义的事实，它的一个特殊情形，就是刚刚举过的例子. 如果我们有任意一个趋向于曲面的多面体序列，我们已经看到，多面体的面积并不一定趋向曲面的面积. 但是，多面体面积的极限 (如果它存在)，或者更一般些，这些面积值的任何极限点，永远大于，或至少等于曲面的面积. 如果对每一个这样的多面体序列，我们找到面积的下极限，那么这些数组成一个和曲面面积有关的确定的数集. **曲面的面积可以定义为这个数集的下确界**[2].

1) 有界序列 F_n 的下极限 L(用 $L = \lim\limits_{n\to\infty} \inf F_n$ 来记)，可以用几种等价的方法定义：

a) L 是 F_n 的所有收敛子序列的极限的下确界.

b) 从 F_n 中忽略前 N 项所构成的集合 L 是这个集合的下确界当 $N \to \infty$ 时的极限.

c) L 是 F_n 的最小极限点 (见第一卷第 105 页)，即 L 是具有这样性质的数中的最小数，它的每一个邻域都包含无限多个 F_n.

d) 对每个正数 $\varepsilon, F_n < L - \varepsilon$ 至多对有限个 n 成立，而 $F_n < L + \varepsilon$ 对无限个 n 成立.

序列 F_n 的上极限 $M = \lim\limits_{n\to\infty} \sup F_n$ 可类似定义. 序列收敛当且仅当 $L = M$.

2) 面积这个值得注意的性质称为 **半连续性**，或者说得更精确些，称为 **下半连续性**.

第五章　曲面积分和体积分之间的关系

前章讨论的重积分不是积分概念从一元到多元的唯一可能的推广. 由于多维区域可以包括较低维的流形, 而我们可以考虑这些流形上的积分, 故还可以有其他的推广. 因此, 在两个自变量的情形, 我们不只考虑了二维区域上的积分, 而且考虑了沿着曲线 (它们是一维流形) 的积分. 在三个自变量的情形, 除了在三维区域和曲线上积分以外, 我们还遇到曲面上的积分. 在本章, 我们将介绍曲面积分并讨论在各种不同维数流形 [1] 上的积分之间的相互关系.

5.1　线积分和平面上的重积分之间的联系 (高斯, 斯托克斯和格林的积分定理)

对于一元函数, 表示微分法和积分法之间关系的基本公式 (参看卷一第 213 页) 是

$$\int_{x_0}^{x_1} f'(x)dx = f(x_1) - f(x_0). \tag{1}$$

在二维的情形, 一个类似的公式 —— 高斯定理, 也叫散度定理 —— 成立. 这里也是将一些函数的导数的积分

$$\iint\limits_R f_x(x,y)dxdy \text{ 或 } \iint\limits_R g_y(x,y)dxdy$$

1) 我们使用术语流形但没给它严格定义而是把它作为一个不指定维数的集合的通用名称. 在本书中我们仅仅讨论那些是某个欧氏空间的子集合的流形, 诸如曲线、二维曲面、超曲面和四维欧氏空间中的四维区域等. 更一般地可以脱离周围的欧氏空间来定义流形. 这样的流形局部地类似于欧氏空间的变了形的部分, 而它们的整体结构比欧氏空间要更复杂.

变成一个依赖于这些函数本身在边界上的值的表达式. 我们在这里把集合 R 的边界 C 看成一条定向曲线 $+C$, 它的正向这样选择: 当我们沿 C 走时, 区域 R 总在 "左" 侧 [1]. 于是, 高斯定理可叙述成

$$\iint_R [f_x(x,y) + g_y(x,y)]dxdy = \int_{+C} [f(x,y)dy - g(x,y)dx]. \qquad (2)$$

我们前面讲过的用 R 的边界 C 上的线积分表示 R 的面积 A 的公式是这个定理的一个特殊情形. 我们令 $f(x,y) = x, g(x,y) = 0$ 立即可得

$$A = \iint_R dxdy = \int_{+C} xdy.$$

用同样的方法, 对于 $f(x,y) = 0$ 和 $g(x,y) = y$, 可得

$$A = \iint_R dxdy = -\int_{+C} ydx.$$

正像在第 336 页至第 356 页中阐明的那样, 在微分形式的演算记号中, 散度定理特别富有启发性. 在 (2) 中, 线积分有被积表达式

$$L = f(x,y)dy - g(x,y)dx,$$

这是一个一阶微分形式. 如果我们令 $f = b, g = -a$, 则 L 确实能等于一个最一般的一阶微分形式 $a(x,y)dx + b(x,y)dy$. 由第 342 页上的定义, 这种微分形式的微分是

$$\begin{aligned} dL &= dfdy - dgdx \\ &= (f_x dx + f_y dy)dy - (g_x dx + g_y dy)dx \\ &= f_x dxdy - g_y dydx = (f_x + g_y)dxdy, \end{aligned}$$

---

1) 假定 x, y 坐标系是右手系.

这正好是 (2) 中重积分的被积表达式. 因此公式 (2) 具有形式 [1)]

$$\iint\limits_R dL = \int_{+C} L. \tag{2a}$$

在证明中我们限制 R 是一个开集, 它的边界 C 是一条由有限个光滑弧组成的简单闭曲线, 而且每条平行于一根坐标轴的直线与 C 至多交于两点 [2)]. 我们还要求 f 和 g 在 R 的闭包 (包括 R 和 R 的边界 C) 上连续且有连续的一阶导数.

我们首先假定函数 g 恒等于 0, 于是 f_x 在 R 上的重积分存在且能写成累次积分 [3)]

$$\iint\limits_R f_x(x,y)dxdy = \int dy \int f_x(x,y)dx. \tag{3}$$

在每一条与 x 轴平行的直线上, 变量 y 是常量. 与 R 相交的那些 x 轴的平行线对应于一些 y 值, 这些 y 值构成一个开区间 $\eta_0 < y < \eta_1$, 此即 R 在 y 轴上的投影 [4)]. 与该区间中的每个 y 对应的平行于 x 轴的直线从 R 上截下一个区间 $x_0(y) < x < x_1(y)$, 其端点是平行线与 C 的二个交点的横坐标 (见图 5.1). 公式 (3) 更明确地断言

$$\iint\limits_R f_x dxdy = \int_{\eta_0}^{\eta_1} h(y)dy.$$

---

1) 形成一个集合 R 的边界的过程与微分过程呈现出外形式上的相似. 由于这个原因人们常常用记号 ∂R 表示 R 的边界 $+C$ 而把 (2a) 写成

$$\iint\limits_R dL = \int_{\partial R} L, \tag{2b}$$

这公式实际上更广泛地应用于在 n 维空间中的流形上进行积分的微分形式.

2) 在附录中假定 R 是由一条处处光滑的简单闭曲线围成的开集合的闭包, 在这种假定下证明了这个定理 (及其在高维情形的推广).

3) 集合 R 是由有限条光滑弧的并集所围成, 因此 (第 660 页) 是若尔当可测的. 于是连续函数 f_x 在 R 上的积分是存在的, 而且被定义为 $\phi_R f_x$ 在全平面的积分, 其中 ϕ_R 是集合 R 的特征函数 (即在 R 的点上 ϕ_R 等于 1, 在其它点上 ϕ_R 等于 0). 因为函数 $\phi_R f_x$ 在每条 x 轴的平行线上可积, 故重积分化成累次积分是允许的 (第 671 页); 确实, 每条 x 轴的平行线或与 R 交于一个开区间或不相交, 因此, $\phi_R f_x$ 在一条平行于 x 轴的直线上积分或者是连续函数 f_x 在一个开区间上的积分或者是 0.

4) 因 R 是开集, 且其边界是一个简单闭曲线因而也是连通的, 因此, R 的投影是一个开区间.

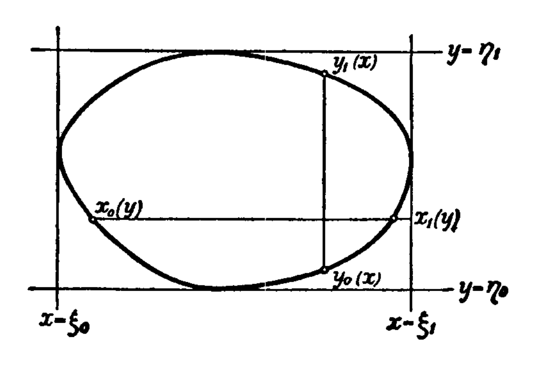


图 5.1

其中

$$h(y) = \int_{x_0(y)}^{x_1(y)} f_x(x,y)dx = f(x_1(y),y) - f(x_0(y),y).$$

因此,

$$\iint_R f_x dxdy = \int_{\eta_0}^{\eta_1} f(x_1(y),y)dy - \int_{\eta_0}^{\eta_1} f(x_0(y),y)dy. \qquad (4)$$

我们来引进二个简单的有向弧 $+C_1, +C_0$, 它们分别由下列参数方程给出

$+C_1 : x = x_1(t), y = t$ 当 $\eta_0 \le t \le \eta_1$ 时,

$+C_0 : x = x_0(t), y = t$ 当 $\eta_0 \le t \le \eta_1$ 时.

这里在每一情形中 t 增加的方向都与弧的定向相对应. 于是公式 (4) 能写成

$$\iint_R f_x dxdy = \int_{+C_1} f dy - \int_{+C_0} f dy.$$

现在 C_1 和 C_0 分别表示 C 的右边部份和左边部份. 其中 C_1 与 C 有相同的定向而 C_0 则与 C 有相反的定向. 用 $-C_0$ 表示将 C_0 的定向反过来得到的弧, 我们便得到

$$\iint_R f_x dxdy = \int_{+C_1} f dy + \int_{-C_0} f dy = \int_{+C} f dy.$$

类似地，我们可将 $+C$ 分解为一个"上"弧

$$+\Gamma_1: x=t, y=y_1(t), \xi_0 \leq t \leq \xi_1$$

和一个"下"弧

$$+\Gamma_0: x=t, y=y_0(t), \xi_0 \leq t \leq \xi_1.$$

其定向按照 t 增加的方向来确定. 这里区间 $\xi_0 < x < \xi_1$ 表示 R 在 x 轴上的投影. 因为 Γ_0 与 C 定向相同，而 Γ_1 与 C 定向相反，于是有

$$\begin{aligned}\iint\limits_R g_y dxdy &= \int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{y_0(x)}^{y_1(x)} g_y dy \\ &= \int_{\xi_0}^{\xi_1} g(x, y_1(x))dx - \int_{\xi_0}^{\xi_1} g(x, y_0(x))dx \\ &= \int_{+\Gamma_1} gdx - \int_{+\Gamma_0} gdx \\ &= -\int_{-\Gamma_1} gdx - \int_{+\Gamma_0} gdx = -\int_{+C} gdx.\end{aligned}$$

将上面得到的二个等式相加，我们便得到一般公式 (2).

我们现在可以把我们的公式推广到更一般的开集 R 上，R 的边界是一条简单闭曲线 C，假设 C 能分解成有限个简单弧 $C_1, \cdots, C_n$，它们中的每一个弧与平行于坐标轴的任一直线至多交于一点 [1)]，为了证明这时也有

$$\iint\limits_R f_x dxdy = \int_{+C} fdy. \tag{5}$$

我们通过所有简单弧 C_i 的端点作平行于 y 轴的直线 (见图 5.2). 用此种方法将 R 分成有限个集合 $R_1, \cdots, R_N$，它们中的每一个，在

1) 这假定不是总能满足的. 假如，边界曲线 C 可能包含曲线 $y = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$ 作为一部份，它与 x 轴相交于无穷多个点并且不能分解成有限个弧，其中每个弧与 x 轴只交于一点.

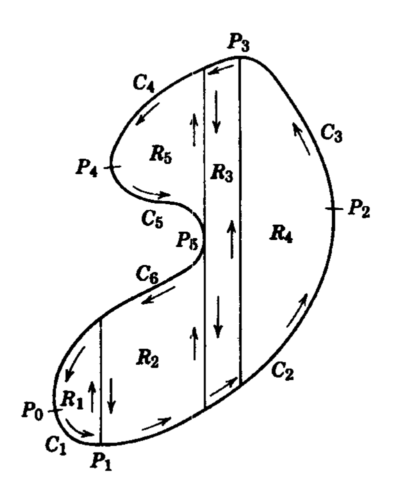


图 5.2

两侧被平行于 y 轴的直线段所围，在上下被弧 C_i 的二个简单子弧所围. 由于每个 R_i 的边界 Γ_i 与平行于 x 轴的直线至多交于二个点，故我们能对 R_i 用公式

$$\iint_{R_i} f_x dx dy = \int_{+\Gamma_i} f dy.$$

这里边界曲线 Γ_i 的定向，在非铅直的部分与 $+C$ 一致，而在右边边界上与 y 增加的方向一致，在左边边界上则与 y 减少的方向一致. 对于 $i=1,\cdots,N$ 将 R_i 上的重积分公式加起来就得到 R 上的重积分. 在 Γ_i 上的线积分中，分布在铅垂的辅助线段上的那部份抵消了，因为每个区间被走过二次，一次向上，一次向下. 因此在曲线 $+\Gamma_i$ 上的线积分加起来就是在整个曲线 $+C$ 上的线积分，于是得到公式 (5). 用同样的方法可以证明

$$\iint_{R} g_y dx dy = -\int_{+C} g dx,$$

只要用通过所有弧 C_i 端点的平行于 x 轴的直线将 R 分成若干部份即可.

同样的论证也可证明可以去掉关于 R 的边界只包含一个闭曲线 C 的假定. 当 C 包含若干个闭曲线时散度定理照样能用, 只要 C 能分解成有限个简单弧, 每个简单弧与平行于坐标轴的直线至多交于一点. 在 $+C$ 上积分时, 我们必须给出使 R 总在左边的 C 的每个封闭部分的定向于是用平行于 y 轴的直线去分解 R 仍然得到边界与 x 轴的平行线交于至多二点的区域 (见图 5.3).

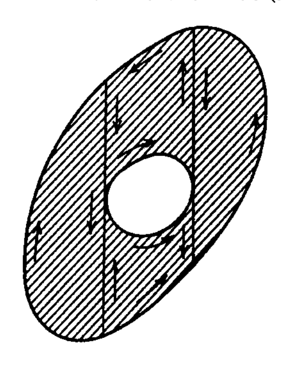


图 5.3

就这样通过把 R 分解为一些区域 (对它们定理已被证明过了) 我们对更一般的区域 R 证明了散度定理. 我们也常常不用这种方法, 而可以把 R 变换成一个区域 (对它已经知道散度定理) 来证明散度定理. 将散度定理写成

$$\iint\limits_R dL = \int_{+C} L$$

我们注意到, 微分形式 dL 和 L 的定义不依赖于坐标, 令

$$x = x(u,v), y = y(u,v)$$

是一个连续可微的 1-1 的变换, 有正的雅可比行列式, 它把 R 变为一个 u, v 平面上的集合 R^*, 其边界为 C^*, 于是

$$\begin{aligned} L =& f dy - g dx = f(y_u du + y_v dv) - g(x_u du + x_v dv) \\ =& (f y_u - g x_u) du + (f y_v - g x_v) dv = A du + B dv, \end{aligned}$$

其中

$$A = fy_u - gx_u, \quad B = fy_v - gx_v.$$

不论是用 x,y 计算还是用 u,v 计算， L 的微分均可由下式给出

$$\begin{aligned} dL =& df dy - dg dx = (f_x + g_y) dx dy \\ =& dA du + dB dv = (B_u - A_v) du dv, \end{aligned}$$

于是有 (也可直接验证)

$$(f_x + g_y)\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = B_u - A_v.$$

设 C 由参数方程

$$x = x(t), y = y(t), \quad a \le t \le b$$

给出，其中 $+C$ 的定向对应于 t 增加的方向. 对于 $+C^*$ 上的对应点也用同一参数值 t, 则 L 在 C 上和 C^* 上的线积分有相同的值

$$\begin{aligned} \int L = \int \frac{L}{dt} dt = & \int_{+C} (f\frac{dy}{dt} - g\frac{dx}{dt}) dt \\ = & \int_{+C^*} (A\frac{du}{dt} + B\frac{dv}{dt}) dt. \end{aligned}$$

类似地，在二个平面上的面积积分也有相同的值

$$\begin{aligned} \iint dL = & \iint_R (f_x + g_x) dx dy \\ = & \iint_{R^*} (f_x + g_y)\frac{d(x,y)}{d(u,v)} du dv \\ = & \iint_{R^*} (B_u - A_v) du dv. \end{aligned}$$

因此 R 上的散度定理

$$\iint_R (f_x + g_y) dx dy = \int_C (f dy - g dx)$$

可以从 R^* 上的相应的公式

$$\iint_{R^*} (B_u - A_v)dudv = \int_{C^*} (Adu + Bdv)$$

推出.

只要一个区域 R 可以变换成一个区域, 其边界由简单弧组成, 每个简单弧与平行于坐标轴的直线交于至多一点, 则在 R 上, 散度定理就是正确的. 例如, 若边界 C 或区域 R 是一个多角形, 我们可以将图形旋转使这多角形没有一边与一个坐标轴平行, 于是散度定理便能用了.

5.2 散度定理的向量形式. 斯托克斯定理

如果我们使用向量分析的符号, 那么高斯定理能用特别简单的方法叙述出来. 为此, 我们把 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 这二个函数看成一个平面向量场 $\mathbf{A}$ 的二个分量. 将公式 (2) 中重积分的被积表达式用 $\mathrm{div}\,\mathbf{A}$ 表示,

$$\mathrm{div}\mathbf{A} = f_x(x,y) + g_y(x,y),$$

并且称其为向量 $\mathbf{A}$ 的散度 (参看 225 页). 为了得到散度定理右端的线积分的向量表示式, 我们引进定向边界曲线 $+C$ 的弧长 s(见第一卷, 391 页). 这里 s 增加的方向与曲线 $+C$ 的定向对应 [1], 于

---

1) 实际上, 关于 s 的这个约定使得形如

$$I = \int_C hds$$

的线积分的值不依赖于 C 的定向, 只要被积函数 h 不依赖于 C 的定向. 若 C 用参数表示成 $x = x(t), y = y(t)$, 其中 $a \le t \le b$, 而 t 增加的方向与 C 的特定的定向相对应, 则

$$I = \int_C hds = \int_a^b h\frac{ds}{dt}dt,$$

其中 $\dfrac{ds}{dt} > 0$. 特别地, 当 h 沿曲线为正时 $I > 0$.

是等式 (2) 的右边变成

$$\int_C [f(x,y)\dot{y} - g(x,y)\dot{x}]ds,$$

其中我们令 $dx/ds = \dot{x}, dy/ds = \dot{y}$.

我们还记得以 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$ 为分量的平面向量 $\mathbf{t}$ 是一个单位向量，它与曲线 C 相切，且指向 s 增加的方向，因此它指向曲线 C 的正向. 以 $\xi = \dot{y}$ 和 $\eta = -\dot{x}$ 为分量的向量 $\mathbf{n}$ 也是单位向量，它垂直于切向量，而且它相对于向量 $\mathbf{t}$ 的位置就和正 x 轴相对于正 y 轴的位置一样 [1). 如果，像通常那样，顺时针旋转 90° 能使正 y 轴转向正 x 轴，那么，通过一个 90° 的顺时针旋转便可从切向量 $\mathbf{t}$ 得到向量 $\mathbf{n}$. 因此，$\mathbf{n}$ 是曲线 C 的法向量，它指向定向曲线 C 的右侧 (卷一第 376 页). 因为在我们这里 C 的定向是使区域 R 落在 $+C$ 的左边，所以 $\mathbf{n}$ 是 C 的单位外法向 (见图 5.4). 如果 $\mathbf{n}$ 和正 x 轴

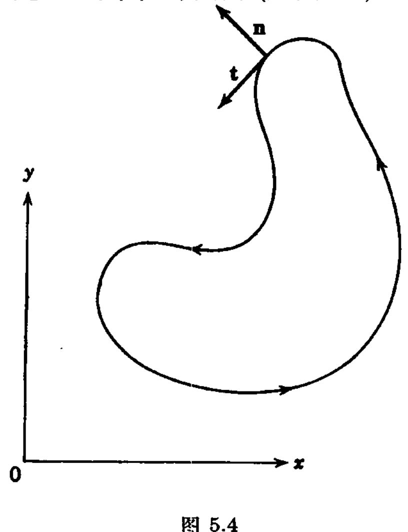


图 5.4

成 θ 角. 则单位向量 $\mathbf{n}$ 的分量 ξ, η 是外法向的方向余弦：

$$\xi = \cos\theta, \eta = \sin\theta.$$

1) 考虑到连续性我们能看出这点：我们可以假定曲线的切向量被作成与 y 轴一致且使 $\mathbf{t}$ 指向 y 增加的方向，于是 $x = 0, y = 1$, 因此分量为 $\xi = 1, \eta = 0$ 的向量具有正 x 轴的方向.

注意下列事实是有用的: $\mathbf{n}$ 的分量也可以写成 x 和 y 在 $\mathbf{n}$ 方向的方向导数

$$\xi = \dot{y} = \frac{dx}{dn}, \eta = -\dot{x} = \frac{dy}{dn},$$

这是因为对任一数量函数 $h(x,y)$ 来讲, h 的沿 $\mathbf{n}$ 的方向导数是

$$\frac{dh}{dn} = h_x \cos\theta + h_y \sin\theta = \xi h_x + \eta h_y$$

(见 48 页).

因此, 高斯定理可写成下列形式

$$\iint\limits_R \operatorname{div}\mathbf{A} dxdy = \int_C (f\frac{dx}{dn} + g\frac{dy}{dn})ds, \tag{6}$$

这里右边的被积函数是以 f, g 为分量的向量 $\mathbf{A}$ 和以 $\frac{dx}{dn}, \frac{dy}{dn}$ 为分量的向量 $\mathbf{n}$ 的数量积 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}$. 因为向量 $\mathbf{n}$ 的长度为 1, 故数量积 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}$ 表示向量 $\mathbf{A}$ 在 $\mathbf{n}$ 方向的分量 A_n. 因此散度定理具有下列形式

$$\iint\limits_R \operatorname{div}\mathbf{A} dxdy = \int_C \mathbf{A}\cdot\mathbf{n} ds = \int_C A_n ds. \tag{7}$$

用话说, 就是**平面向量场的散度在集合** R **上的重积分等于这向量场在** R **的边界** C **的外法向上的分量沿** C **的线积分**.

为了得到平面高斯定理的一种完全不同的向量解释, 我们令

$$a(x,y) = -g(x,y), \quad b(x,y) = f(x,y)$$

于是由 (2) 可得

$$\iint\limits_R (b_x - a_y)dxdy = \int_C (a\dot{x} + b\dot{y})ds = \int_{+C} adx + bdy. \tag{8}$$

若再将函数 a 和 b 看成一个向量场 $\mathbf{B}$ 的分量 (其中, 在每点, $\mathbf{B}$ 是通过将 $\mathbf{A}$ 沿逆时针方向转 90° 而得到的), 我们便可看出 $a\dot{x} + b\dot{y}$ 是 $\mathbf{B}$ 和单位切向量 $\mathbf{t}$ 的数量积:

$$a\dot{x} + b\dot{y} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{t} = B_t,$$

其中 B_t 是向量 $\mathbf{B}$ 的切向分量. (8) 中重积分的被积表达式曾在 212 页作为一个空间向量的旋度的一个分量出现过. 在此为了应用旋度的概念我们设想平面向量场 $\mathbf{B}$ 以某种方式延拓成 x, y, z 空间中的向量场 $\mathbf{B}$ 使得在 x, y 平面上 $\mathbf{B}$ 的 x 分量和 y 分量分别等于 $a(x,y)$ 和 $b(x,y)$. 于是 $b_x - a_y$ 表示 $\mathbf{B}$ 的旋度的 Z 分量 $(\text{curl } \mathbf{B})_z$. 现在散度定理就有下列形式

$$\iint_R (\text{curl } \mathbf{B})_z dxdy = \int_C B_t ds. \tag{9}$$

总之, 我们可以把这个定理叙述如下:

空间向量场的旋度的 z 分量在 x, y 平面上的集合 R 上的积分等于它的切向分量在 R 的边界上的积分. 这个叙述就是平面上的斯托克斯定理.

若我们利用空间向量场的旋度的向量特性, 那么在斯托克斯定理中平面区域 R 可以不必限制在 x, y 平面内, 空间中任何平面在适当的坐标系中都可看作 x, y 平面. 因此我们得到斯托克斯定理的更一般的形式:

$$\iint_R (\text{curl}\mathbf{B})_n dS = \int_C B_t ds, \tag{10}$$

其中 R 是空间中任一由曲线 C 围成的平面区域, 而 $(\text{curl}\mathbf{B})_n$ 是 $\text{curl}\mathbf{B}$ 在 $\mathbf{n}$ 方向上的分量, $\mathbf{n}$ 是包含 R 的平面的法方向, 这里 C 用下面的方法确定定向: 当从 $\mathbf{n}$ 所指向的那一侧看时, 切向量 $\mathbf{t}$ 指向逆时针方向.

若 R 的整个边界由若干条封闭曲线组成, 这些曲线被适当地规定好定向, 使 R 总在它的左边, 如果我们把线积分拓展到每一条这样的曲线上去, 那么这些公式仍然正确.

下面的特殊情形是重要的, 即当函数 $a(x,y), b(x,y)$ 满足可积性条件

$$a_y = b_x \tag{11}$$

时，亦即 $adx + bdy$ 是一个 “封闭” 形式时，这时 R 上的重积分为 0, 而由 (8) 可得

$$\int_c adx + bdy = 0,$$

其中 C 表示区域 R 的整个边界，而在 R 上 (11) 成立. 这又一次推出 (我们在第 104 页上已见过的), 在简单弧上的积分

$$\int adx + bdy$$

对具有相同端点而又可在不离开 R 的情况下互相变形的所有的弧, 都有相同的值.

练　习　5.2

1. 用平面散度定理计算线积分

$$\int_C Adu + Bdv,$$

函数和路径 (关于已知区域取逆时针方向) 如下:

(a) $A = au + bv, B = 0, u \geq 0, v \geq 0, \alpha^2 u + \beta^2 v \leq 1.$

(b) $A = u^2 - v^2, B = 2uv, |u| < 1, |v| < 1.$

(c) $A = v^n \quad B = u^n, u^2 + v^2 \leq r^2.$

2. 导出极坐标系中散度定理的公式

$$\int_{+C^*} f(r,\theta)dr + g(r,\theta)d\theta = \iint\limits_{R^*} \frac{1}{r}\left(\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) dS.$$

3. 假定散度定理的条件成立. 导出在极坐标系中边界为 C 的区域 R 的面积公式

$$\frac{1}{2}\int_{+C^*} r^2 d\theta, -\int_{+C^*} r\theta dr,$$

其中在第二个公式中我们假定 R 不包含原点.

4. 用 x, y 平面中的斯托克斯定理去证明

$$\iint\limits_{R^*} \frac{d(u,v)}{d(x,y)} dS = \int_{+C^*} u(\text{grad} v) \cdot \mathbf{t} dS,$$

其中 $\mathbf{t}$ 是沿 C 的正方向的单位切向量.

5.3 二维分部积分公式. 格林定理. 散度定理

$$\iint_R (f_x + g_y) dxdy = \int_C \left(f \frac{dx}{dn} + g \frac{dy}{dn} \right) ds \tag{12}$$

[见公式 (6)] 与乘积的微分法则结合起来立即可以得到分部积分公式, 它在偏微分方程理论中是基本的公式.

设 $f(x,y) = a(x,y)u(x,y), g(x,y) = b(x,y)v(x,y)$, 其中函数 a, u, b, v 有连续的一阶导数. 因为

$$f_x + g_y = (au_x + bv_y) + (a_x u + b_y v),$$

故我们能将公式 (12) 写成

$$\iint\limits_R (au_x + bv_y) dxdy = \int_C \left(au \frac{dx}{dn} + bv \frac{dy}{dn} \right) ds - \iint\limits_R (a_x u + b_y v) dxdy. \tag{13}$$

为了得到格林第一定理, 我们把这个公式用于 $v = u$ 和 $a = \omega_x$ 与 $b = \omega_y$ 的情形 (我们假定在 R 的闭包上, u 有连续的一阶导数, ω 有连续的二阶导数). 我们得到

$$\iint\limits_R (u_x \omega_x + u_y \omega_y) dxdy = \int_C u \left(\omega_x \frac{dx}{dn} + \omega_y \frac{dy}{dn} \right) ds - \iint\limits_R u(\omega_{xx} + \omega_{yy}) dxdy.$$

对于拉普拉斯算子使用符号 Δ (228 页) 我们可记

$$\omega_{xx}+\omega_{yy}=\Delta\omega.$$

此外，dx/dn 和 dy/dn 是 R 的边界 C 的外法向的方向余弦 (见 692 页)，因此我们有

$$\omega_x\frac{dx}{dn}+\omega_y\frac{dy}{dn}=\frac{d\omega}{dn},$$

这是 ω 的沿 C 的外法向的方向导数 [1]．用这记号格林第一定理变成

$$\iint\limits_R(u_x\omega_x+u_y\omega_y)dxdy=\int_C u\frac{\partial\omega}{\partial n}ds-\iint\limits_R u\Delta\omega dxdy. \tag{14}$$

若再假定 u 有连续的二阶导数，在 (14) 中将 u 和 w 交换一下位置又可得到

$$\iint\limits_R(\omega_x u_x+\omega_y u_y)dxdy=\int_C \omega\frac{\partial u}{\partial n}ds-\iint\limits_R \omega\Delta u dxdy.$$

将这两个关系式相减便得一个关于 u 和 ω 对称的方程叫作格林第二定理：

$$\iint\limits_R(u\Delta\omega-\omega\Delta u)dxdy=\int_C\left(u\frac{d\omega}{dn}-\omega\frac{du}{dn}\right)ds. \tag{15}$$

在研究偏微分方程 $u_{xx}+u_{yy}=0$ [2] (拉普拉斯方程) 时，这二个格林定理是基本的定理.

5.4　散度定理应用于重积分的变量替换

a. 1-1 映射的情形

1) 通常，为简单起见，常称 $d\omega/dn$ 为 ω 的法向导数.

2) 参看位势理论那一节.

对重积分变量替换的基本法则 (见 535 页) 散度定理可给出一个新的证明. 对以 C 为边界的区域 R 散度定理可叙述成下列形式

$$\iint_R dL = \int_{+C} L \tag{16}$$

[见 685 页公式 (2a)] [1]. 这里, 取 $f = b,\ g = -a$,

$$L = a(x,y)dx + b(x,y)dy \tag{17a}$$

$$dL = (b_x - a_y)dxdy. \tag{17b}$$

若曲线 C 有参数表达式

$$x = x(t), y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta,$$

其中 t 增加的方向对应于 $+C$ 的定向, 我们可以把 (16) 中的线积分写成普通的积分

$$\int_{+C} L = \int_{+C} adx + bdy = \int_\alpha^\beta \frac{L}{dt}dt, \tag{17c}$$

其中被积函数为

$$\frac{L}{dt} = a\frac{dx}{dt} + b\frac{dy}{dt}.$$

(见 336 页).

我们现在考虑一个由

$$u = u(x,y), v = v(x,y) \tag{18a}$$

定义的映射. 我们假定这个映射在 $\bar{R}$ 上是 1-1 的且雅可比 $d(u,v)/d(x,y)$ 处处都是正的. 设 R 被映到 u,v 平面中的集合 R' 上, 而 C 被映到 R' 的边界 C' 上. 而且 C' 也包含有限段光滑弧, 每条弧与任一

1) 这里以及后面, 我们常默认在散度定理证明中用到的假定都是满足的, 即 R 是一个开集, 其边界 C 由有限段光滑弧组成, 每条弧与平行于坐标轴的直线至多交于一点, 假定在 R 的闭包上线性形式 L 的系数有连续的一阶导数.

平行于坐标轴的直线至多交于一点. 由于雅可比是正的, 故保持定向; 即当 t 增加时, 由

$$u = u(x(t), y(t)), v = v(x(t), y(t))$$

给出的点 (u, v) 描画出曲线 C', 使得 R' 总在我们的左边. 关于坐标 u, v 我们有

$$\begin{aligned} L =& Adu + Bdv \\ =& A(u_x dx + u_y dy) + B(v_x dx + v_y dy) = adx + bdy, \end{aligned}$$

其中 u, v 坐标系中的系数 A, B 与 x, y 坐标系中的系数 a, b 是通过下列关系

$$a = Au_x + Bv_x \quad b = Au_y + Bv_y$$

相联系的. 沿 L' 有

$$\frac{L}{dt} = a\frac{dx}{dt} + b\frac{dy}{dt} = A\frac{du}{dt} + B\frac{dv}{dt},$$

于是由 (17c) 得

$$\int_{+C} L = \int_\alpha^\beta \frac{L}{dt} dt = \int_\alpha^\beta Adu + Bdv = \int_{+C'} L. \tag{18b}$$

把散度定理 (16) 应用到 u, v 平面上的区域 R', 我们得到

$$\int_{C'} L = \iint_{R'} dL, \tag{18c}$$

这里, 与 (17b) 类似,

$$dL = (B_u - A_v) dudv.$$

人们立即可以验证 [1)]

$$\begin{aligned}b_x - a_y =&(Au_y + Bv_y)_x - (Au_x + Bv_x)_y \\ =&(A_u u_x + A_v v_x)u_y + (B_u u_x + B_v v_x)v_y \\ &- (A_u u_y + A_v v_y)u_x - (B_u u_y + B_v v_y)v_x \\ =&(B_u - A_v)(u_x v_y - u_y v_x).\end{aligned}$$

因此，我们由 (18b, c) 和 (16) 可得结论

$$\begin{aligned}\iint_{R'} dL = \iint_{R'} (B_u - A_v)dudv = \iint_{R'} dL \\ = \iint_{R} (b_x - a_y)dxdy = \iint_{R} (B_u - A_v)\frac{d(u,v)}{d(x,y)}dxdy.\end{aligned} \tag{19}$$

这个公式包含 重积分变量替换的一般法则

$$\iint_{R'} f(u,v)dudv = \iint_{R} f(u(x,y), v(x,y))\frac{d(u,v)}{d(x,y)}dxdy \tag{20}$$

[见 (16b), 535 页], 只须在 (19) 中选择函数 A, B, 使 $A = 0$, $B_u = f(u,v)$ 即可. 这表示对固定的 v, 函数 B 将是 $f(u,v)$ 作为 u 的函数的不定积分:

$$B(u,v) = \int_{g(v)}^{u} f(\omega, v)d\omega + h(v),$$

其中 $h(v)$ 是任意的，而 $g(v)$ 的选择须使点 $(g(v), v)$ 落在 R' 内. 对于特殊的函数 $f = 1$, 公式 (20) 给出一个用重积分表示的像区域

1) 可以不用任何代数计算就推出这公式，假若我们用 629 页证明过的事实的话. 在前面我们证明过：对于形式 L, 可以不用参考任何特殊坐标系就写出 dL, 因此由 317 页 (56c), 有

$$b_x - a_y = \frac{dL}{dxdy} = \frac{dL}{dudv}\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = (B_u - A_v)\frac{d(u,v)}{d(x,y)}.$$

的面积公式:

$$\iint_{R'} dudv = \iint_{R} \frac{d(u,v)}{d(x,y)} dxdy. \tag{20a}$$

实质上公式(20)表明二阶微分 形式 $\omega = fdudv$ 的重积分在自变量的变换下是不变的. 这个事实在这里是这样证的: 把 ω 看成一个一阶微分形式 L 的微分 dL, 用散度定理把重积分化成线积分, 并且用了线积分 $\int L$ 的不变性.

b. 积分的变量替换和映射度

当映射

$$u = u(x,y), v = v(x,y)$$

不再是 1-1 的且当它的雅可比不一定是为正时, 去观察变量替换公式 (20) 会出现什么情况是有趣的. 首先, 我们来看映射是 1-1 的但雅可比在整个 $\bar{R}$ 上都是负的情形. 在导出公式 (20) 的论证中唯一的差别是现在 $+C$ 和 $+C'$ 具有相反的定向: 若在 C' 上当参数值 t 增加时 R' 在左边, 则在 C 上当 t 增加时 R 在右边. 在用散度定量 (16) 时, 我们假定二维区域的边界的定向是这样规定的: 使区域落在边界的正 (左) 侧. 这样公式 (20) 必须换成 [1)]

$$\iint_{R'} fdudv = -\iint_{R} f\frac{d(u,v)}{d(x,y)} dxdy. \tag{20b}$$

当从 (x,y) 到 (u,v) 上的映射是 1-1 的且雅可比有固定的符号时,

---

1) 若二维区域 R 和 R' 本身是定向的流形, 那么公式 (20) 就可不加修改地使用了, 因为在那个情形下, 当流形的定向反过来时, 流形上的积分的符号就改变了. 由映射的雅可比是负的可推出 R 和 R' 具有相反的定向, 因此如果写成

$$\iint_{+R'} fdudv = \iint_{+R} f\frac{d(u,v)}{d(x,y)} dxdy,$$

公式 (20) 仍然是对的, 若不用区域的定向, 我们还可以在 535 页的公式 (16b) 中用雅可比的绝对值来代替雅可比.

我们可以将公式 (20) 和 (20b) 统一成一个公式:

$$\iint f\varepsilon_R dudv = \iint\limits_R f\frac{d(u,v)}{d(x,y)}dxdy \tag{21}$$

在这里左边的积分展布在整个 u,v 平面上, 而函数 $\varepsilon_R = \varepsilon_R(u,v)$ 定义为:

$$\varepsilon_R(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{若}(u,v)\text{不是}R\text{中一点的像} \\ \operatorname{sign}\dfrac{d(u,v)}{d(x,y)} & \text{若}(u,v)\text{是}R\text{中一点的像}. \end{cases}$$

更一般地, 我们考虑 R 的映射不一定是 1-1 的情形. 假定 R 可以分成若干子集 R_i, 每个 R_i 被 1-1 地映过去且在每个子集中雅可比有固定符号 ε_{Ri}, 于是有

$$\iint\limits_R f\frac{d(u,v)}{d(x,y)}dxdy = \sum_i \iint\limits_{R_i} f\frac{d(u,v)}{d(x,y)}dxdy$$

$$= \sum_i \iint f\varepsilon_{R_i} dudv = \iint f\chi_R dudv.$$

这里最后一个积分展布在整个 u,v 平面上, 而函数 χ_R 代表

$$\chi_R(u,v) = \sum_i \varepsilon_{R_i}(u,v).$$

当 (u,v) 是 R_i 的一点的像时, 每一项 $\varepsilon_{R_i}(u,v)$ 等于在这点的雅可比的符号. 因此, 函数 $\chi_R(u,v)$, 叫作在点 $(u,v)R$ 的**映射度**, 它是那些像点为 (u,v) 而 $\dfrac{d(u,v)}{d(x,y)} > 0$ 的 R 中的点的数目减去像点为 (u,v) 而 $\dfrac{d(u,v)}{d(x,y)} < 0$ 的 R 中的点的数目的差. 有了这个 $\chi_R(u,v)$ 的定义, 积分变量替换公式就变成

$$\iint f(u,v)\chi_R(u,v)dudv = \iint\limits_R f(u(x,y),v(x,y))\frac{d(u,v)}{d(x,y)}dxdy. \tag{22}$$

取 f 为常数 1, 我们得到公式

$$\iint\limits_R \frac{d(u,v)}{d(x,y)}dxdy = \iint \chi_R(u,v)dudv, \tag{23}$$

它把公式 (20a) 推广到具有非零雅可比，但不一定是 1-1 的映射.

作为一个例子，考虑映射

$$u = e^x\cos y, \quad v = e^x\sin y. \tag{24a}$$

对这映射，对所有的 (x,y), 都有

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = e^{2x} > 0.$$

使用在 u,v 平面上由 $u = r\cos\theta, v = r\sin\theta$ 所定义的极坐标 r,θ, 我们看到点 (x,y) 的像点是具有极坐标 $r = e^x, \theta = y$ 的点. 现设 R 是矩形

$$0 < x < \log 2, \quad -\frac{3}{2}\pi < y < \frac{3}{2}\pi. \tag{24b}$$

则像点落在环形 $1 < r < 2$ 中 (见图 5.5). 环中满足 $u < 0$ 的点被 R 的像点覆盖二次 (这些点可由在 $\frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{3\pi}{2}$ 之间或 $-\frac{\pi}{2}$ 和 $-\frac{3\pi}{2}$ 之间的极角来确定). 环中的其它点则只覆盖一次. 因此,

$$x_R(u,v) = \begin{cases} 0, & 对于 0 \le r \le 1 或 r \ge 2, \\ 2, & 对于 1 < r < 2 和 u < 0, \\ 1, & 对于 1 < r < 2 和 u \ge 0. \end{cases}$$

这里，由于环 $1 < r < 2$ 的每一半都有面积 $\frac{3\pi}{2}$, 故我们有

$$\iint \chi_R(u,v)dudv = 2\left(\frac{3}{2}\pi\right) + \frac{3}{2}\pi = \frac{9}{2}\pi.$$

换一种方法，由直接计算也得

$$\begin{aligned}\iint\limits_R \frac{d(u,v)}{d(x,y)}dxdy &= -\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} dy \int_0^{\log 2} e^{2x}dx \\ &= 3\pi\int_0^{\log 2} e^{2x}dx = \frac{9}{2}\pi.\end{aligned}$$

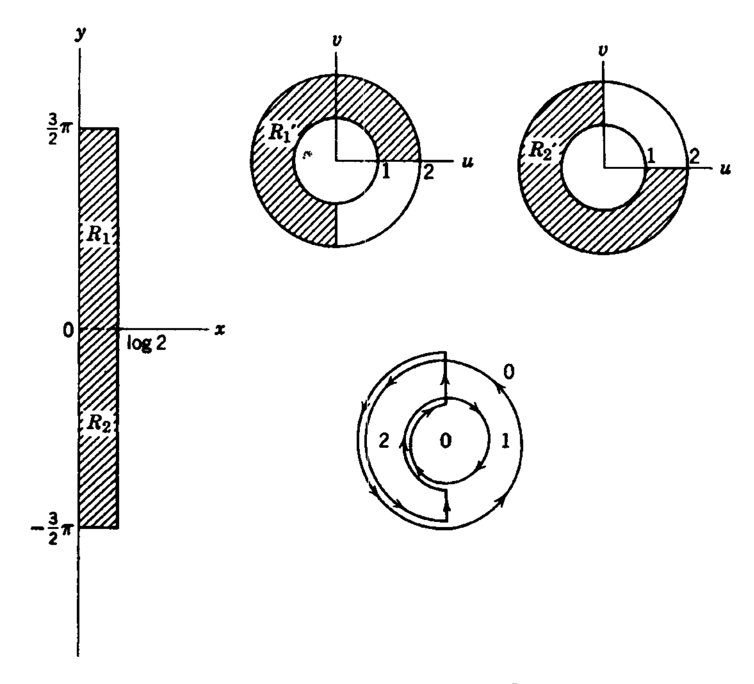


图 5.5　应用于矩形 $0 < x < \log 2, |y| < \dfrac{3}{2}\pi$ 上的映射.
$u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$ 的度

在 R 的像 R' 覆盖点 (u,v) 的 (带符号的) 次数 $\chi_R(u,v)$ 和 C 的像 C' 围绕 (u,v) 绕的圈数 $\mu_C(u,v)$ 之间，我们有值得注意的恒等式

$$\chi_R(u,v) = \mu_C(u,v) \tag{25a}$$

这里绕的圈数按照第一卷 448 页中给出的定义来确定. 假设 x, y 和 u, v 坐标系都是右手系，我们规定 C 关于 R 的正向，它对应于让 R 在我们的左边. 若在 C 的任何部份 γ 上这个正向是使某参数 t 增加，我们也按 t 增加来规定 C' 的对应部分 γ' 的正向. 于是 C' 围绕一个不在 C' 上的点 (u_0, v_0) 绕的圈数就是 C' 按照给它指定的定向沿着 C' 从右到左穿过射线 $u = u_0, v > v_0$ 的次数与 C' 从左到右穿过这射线的次数之差 —— 在这里这个差用 $\mu_C(u_0, v_0)$ 表示.

显然，由定义知方程 (25a) 的两边都是 **可加的**，即将 R 分成

有限个边界曲线为 C_i 的子区域 R_i 我们有

$$\chi_R(u,v)=\sum_i \chi_{R_i}(u,v),\quad \mu_C(u,v)=\sum_i \mu_{C_i}(u,v).$$

因此，为证明 (25a) 只要证明

$$\chi_{R_i}(u,v)=\mu_{C_i}(u,v) \tag{25b}$$

对 R 的任何部分 R_i 均成立就够了. 其中 R_i 被 1-1 地映到 u,v 平面并且雅可比 $d(u,v)/d(x,y)$ 有一个固定符号 ε_{R_i}. 设 R_i 的边界曲线为 C_i, 并设 R_i' 是 R_i 的像， C_i' 是 C_i 的像. 显然，对任何不在 C_i 上的点 (u,v)

$$\chi_{R_i}(u,v)=\begin{cases}\varepsilon_{R_i}, & \text{对}R_i\text{内的}(u,v),\\ 0, & \text{对}R_i\text{外的}(u,v).\end{cases}$$

此外，C_i 是一个简单闭曲线，$\varepsilon_{R_i}>0$ 时它的正向是逆时针方向，$\varepsilon_{R_i}<0$ 时是顺时针方向 (见 3.3e 节， 284 页). 因此 C_i 围绕点 (u,v) 绕的圈数当 (u,v) 在 C_i 内部时也是 ε_{R_i} 而当 (u,v) 在 C_i 外部时是 0, 这就证明了 (25b).

在 703 页的例子中，通过检验立即知道 $\chi_R(u,v)$ 和 $\mu_C(u,v)$ 是恒等的 (见图 5.5).

5.5 面积微分，将 Δu 变到极坐标的变换

在 518 页我们定义了三重积分的空间微分的概念. 在二维的情形，我们来讲述一个相应的重积分

$$M(R)=\iint_R \rho(x,y)dxdy \tag{26}$$

的面积微分的概念. 这里假定 $\rho(x,y)$ 是在 x,y 平面上开集 S 内定义的连续函数. 于是我们可以通过公式 (26) 把 S 的任一 (若尔当

可测闭) 子集 R 与值 $M=M(R)$ 联系起来. 我们用 $A(R)$ 表示 R 的面积:

$$A(R)=\iint_R dxdy,$$

由中值定理 530 页我们知道比值

$$\frac{M(R)}{A(R)}$$

介于 $\rho(x,y)$ 在 R 内的上确界和下确界之间, 由此推知在 S 的一点 (x_0,y_0) 处

$$\rho(x_0,y_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{M(R_n)}{A(R_n)}, \tag{27}$$

其中 R_n 是 S 的任一子集序列, 它有面积 $A(R_n)$、包含点 (x_0,y_0) 且当 $n\to\infty$ 时其直径趋于 0, 这个极限类似于这一维情形中的微商, 我们称 ρ 为 M 关于 A 的 **面积导数**.

在物理上, 我们 (至少对 $\rho>0$ 的情况) 可以把微分形式 $\rho(x,y)dxdy$ 解释成平面上某个质量分布的质量元, 积分 $M(R)$ 表示包含在集合 R 中的 **总质量**. 于是方程 (27) 表示 $\rho(x,y)$ 可以作为 R_n 的质量除以它们的面积当 R_n 收缩到点 (x,y) 时的极限而得到. 在称 $M(R_n)/A(R_n)$ 为集合 R_n 中质量分布的 **平均密度** 的同时, 我们就定义 $\rho(x,y)$ 为点 (x,y) 处的密度, 或定义为点 (x,y) 处 **单位面积中的质量**. 在不限于 $\rho>0$ 的另一物理解释中, 我们可以把 $\rho dxdy$ 设想为电荷元, 把 $M(R)$ 设想成 R 中的 **总电荷** 并设想 $\rho(x,y)$ 是 **电荷密度或单位面积上的电荷**.

在一个从平面上点 (x,y) 到 $(\bar{x},\bar{y})$ 的映射

$$\bar{x}=\bar{x}(x,y),\bar{y}=\bar{y}(x,y)$$

之下, 集合 R 的像 $\bar{R}$ 的面积由

$$A(\bar{R})=\iint_{\bar{R}} d\bar{x}d\bar{y}=\iint_R \frac{d(\bar{x},\bar{y})}{d(x,y)}dxdy$$

给出 [见公式 (20)]. 这里雅可比

$$\frac{d(\bar{x},\bar{y})}{d(x,y)}=\lim_{n\to\infty}\frac{A(\bar{R}_n)}{A(R_n)}$$

显然是像区域面积关于原区域面积的面积导数.

现设想平面被可变形的弹性材料所覆盖，其中 (x,y) 是材料质点在某个时刻 t 的位置，而 $(\bar{x},\bar{y})$ 是同一个质点在后一时刻 $\bar{t}$ 的位置. 令 $\rho(x,y)$ 表示这材料在时刻 t 在点 (x,y) 的密度而 $\bar{\rho}(\bar{x},\bar{y})$ 表示在时刻 $\bar{t}$ 在点 $(\bar{x},\bar{y})$ 处的密度. 若我们假定在时刻 t 充满集合 R 的质点的总质量和同一批质点在时刻 $\bar{t}$ 时当他们充满集合 $\bar{R}$ 时的质量相等，则

$$M(\bar{R})=\iint\limits_{\bar{R}}\bar{\rho}d\bar{x}d\bar{y}=M(R)=\iint\limits_{R}\rho dxdy,$$

由此推出

$$\begin{aligned}\bar{\rho}&=\lim_{n\to\infty}\frac{M(\bar{R}_n)}{A(\bar{R}_n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{M(\bar{R}_n)}{A(R_n)}\cdot\frac{A(R_n)}{A(\bar{R}_n)}\\&=\frac{\rho}{d(\bar{x},\bar{y})/d(x,y)}.\end{aligned}$$

因此，在映射 $(\bar{x},\bar{y})\to(x,y)$ 下，质量密度按照下列规则

$$\rho=\bar{\rho}\frac{d(\bar{x},\bar{y})}{d(x,y)} \tag{28}$$

来改变. 这方程，写成微分形式之间的关系 (见 337 页), 正好表示质量元的守恒律:

$$\rho dxdy=\bar{\rho}d\bar{x}d\bar{y}. \tag{28a}$$

应用面积微分的概念使我们能把表示式 $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}$ 变换到新的坐标系中去，譬如变到极坐标系 (r,θ) 中去. 为此，我们利用公式

$$\iint\limits_{R}\Delta udxdy=\int_C\frac{du}{dn}ds$$

在格林定理中令 $\omega=1$ 就可得到这公式 (见 (15), 697 页). 若我们用一串边界为 C_n 的收缩到点 (x,y) 的集合 R_n 去求面积微商，则得

$$\Delta u=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{A(R_n)}\int_{C_n}\frac{du}{dn}ds. \tag{29}$$

为了把 Δu 变到其他坐标，我们只需要将相应的变换用到简单的线积分 $\int\frac{du}{dn}ds$ 上去，然后用面积去除，并且取极限就行了. 这比直接计算优越之处在于不需要进行那些相当复杂的 u 的 **二阶** 微商的计算，因为线积分中只出现一阶微商.

作为一个重要的例子，我们来算出将 Δu 变到极坐标 (r,θ) 的变换. 我们选极坐标网的一个小网格作 R_n [1)]，它在圆周 r 和 $r+h$ 以及直线 θ 和 $\theta+k$ 之间，我们知道，它的面积等于

$$A(R_n)=kh\left(r+\frac{1}{2}h\right).$$

一阶导数按公式

$$u_r=\frac{\partial}{\partial r}u(r\cos\theta,r\sin\theta)=\frac{1}{r}(xu_x+yu_y)$$

$$u_\theta=\frac{\partial}{\partial\theta}u(r\cos\theta,r\sin\theta)=-yu_x+xu_y$$

来改变. 在圆周 $r=$ 常数上，法向 (指向 r 增加的方向) 的方向余弦是 $x/r,y/r$, 因此 $du/dn=u_r$, 而 $ds=rd\theta$. 在射线 $\theta=$ 常数上. 法向 (指向 θ 增加的方向) 的方向余弦是 $-y/r,x/r$, 因此 $du/dn=u_\theta/r$ 而 $ds=dr$. 因此，将 u(沿 R_n 的边界 C_n) 的外法向导数在 C_n 上

1) 这里假定当 $n\to\infty$ 时，h 和 k 趋于 0.

积分，我们得

$$\int_{C_n} \frac{du}{dn} ds = \int_{\theta}^{\theta+k} [(r+h)u_r(r+h,\theta) - ru_r(r,\theta)] d\theta$$
$$+ \int_{r}^{r+h} \frac{1}{r} [u_\theta(r,\theta+k) - u_\theta(r,\theta)] dr$$
$$= \int_{\theta}^{\theta+k} d\theta \int_{r}^{r+h} [ru_r(r,\theta)]_r dr$$
$$+ \int_{r}^{r+h} dr \int_{\theta}^{\theta+k} \left[\frac{1}{r} u_\theta(r,\theta)\right]_\theta d\theta$$
$$= \iint_{R_n} \left[\frac{1}{r}(ru_r)_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}u_\theta\right)_\theta\right] r dr d\theta.$$

由此根据极坐标下的面积公式

$$A(R_n) = \iint_{R_n} r dr d\theta.$$

我们从 (29) 求得

$$\Delta u = \frac{1}{r}(ru_r)_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}u_\theta\right)_\theta = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}, \tag{30}$$

这就是所要的变换公式.

这公式能提供拉普拉斯微分方程 $\Delta u = 0$ 的一些重要的特解. 从 (30) 知这方程的仅仅依赖于 r —— 即具有形式 $u = f(r)$ 的解必满足条件

$$\frac{1}{r}[rf'(r)]_r = 0,$$

这导致 $rf'(r) =$ 常数 $= a$ 或

$$u = f(r) = a\log r + b = a\log\sqrt{x^2+y^2} + b, \tag{31a}$$

其中 a 和 b 是常数, 类似地我们求得拉普拉斯方程的只依赖于 θ 的通解具有形式

$$u = c\theta + d = c\arctan\frac{y}{x} + d, \tag{31b}$$

其中 c 和 d 是常数.

5.6 用二维流动解释格林和斯托克斯公式

用在 x,y 平面内流动的流体的运动可以最自然地解释我们的积分定理. 在每个时刻的流体运动可用其速度场来描写 [1). 在时刻 t 占据位置 (x,y) 的质点具有速度向量 $\mathbf{v}=(v_1,v_2)$.

若流体的速度不依赖于 x,y,t, 则在时间区间 t 到 $t+dt$ 内通过一个线段 I 的流体在时刻 $t+dt$ 将充满一个面积为 $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})sdt$ 的平行四边形, 其中 s 是 I 的长度而 $\mathbf{n}$ 是 I 的单位法向量 (指向流体流向的那一侧) (见图 (5.6))[2). 如果我们代替上述 $\mathbf{n}$ 任取 I 的二个

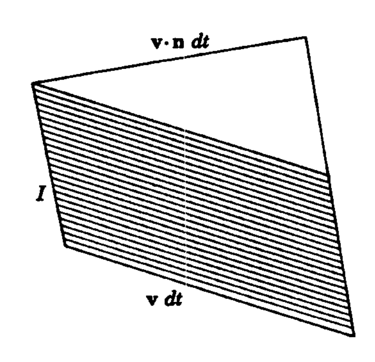


图 5.6　在时间 dt 内通过线段 I 的速度为 $\mathbf{v}$ 的均匀流体的总量

单位法向量中的一个作 $\mathbf{n}$, 那么 $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})sdt$ 是从 t 到 $t+dt$ 这段时间区间内通过 I 的流体所填满的区域的面积, 若流体通过 I 时指向 $\mathbf{n}$ 所指的那一侧, 则它是正的, 否则是负的. 若 ρ 是流体的密度, 则 $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\rho sdt$ 是通过 I 流向 $\mathbf{n}$ 所指的那一侧的流体的 **质量**.

1) 在 x,y 平面内的运动可以想像成在 x,y,z 空间中的运动的一部份, 在运动中任何一个质点的速度平行于 x,y 平面且与 z 坐标无关.

2) 这平行四边形由那些点 $(\bar{x},\bar{y})$ 组成, 以 $(\bar{x},\bar{y})$ 和

$$(x,y)=(\bar{x}-v_1dt,\bar{y}-v_2dt)$$

为端点的线段与 I 有公共点.

设 C 是 x,y 平面内的一条曲线. 沿 C 我们任意选定二个可能的单位法向量中的一个，且用 $\mathbf{n}$ 表示它. 在速度和密度都依赖于 x,y,t 的流动中，积分

$$\int_C (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\rho ds \tag{32a}$$

表示在单位时间内通过 C 流向 $\mathbf{n}$ 所指的那一侧的流体的质量. 这结果通过用多边形逼近 C 和用常速度地流过多边形各边的流体来逼近这里的流体就可立即得到.

若 C 是区域 R 的边界而 $\mathbf{n}$ 是外法向，则上述积分表示单位时间内流出 R 的流体的质量[1]. 应用散度定理，我们能将穿过 C 的流量用重积分表示:

$$\int_C (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\rho ds = \int_C (\rho\mathbf{v})\cdot\mathbf{n} ds = \iint_R \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) dxdy. \tag{32b}$$

我们可以把通过 C 流出 R 的质量与包含在 R 中的质量的改变量作一比较. 在时刻 t 包含在 R 中的流体的总质量是[2]

$$\iint_R \rho dxdy,$$

因此，在单位时间内在 R 中质量的损失为

$$-\frac{d}{dt}\iint_R \rho(x,y,t) dxdy = -\iint \rho_t(x,y,t) dxdy.$$

若我们假定质量是守恒的，则质量只能由于通过边界 C 流出 R 而损失. 因此，由 (32 b), 我们必有

$$\iint_R \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) dxdy = -\iint_R \rho_t dxdy. \tag{32c}$$

---

1) 若净流量是进入 R 的，这将是一个负量.

2) 一般讲这是 t 的函数，因为 $\rho=\rho(x,y,t)$ 是允许随 t 变化的. 区域 R 和它的边界 C 在现在的考虑中是保持固定的.

这等式对任意区域 R 均成立. 用 R 的面积去除它一下, 并令 R 收缩到一点 (即求面积微商), 在极限情形下我们求得

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \tag{33}$$

(参看第 4.6 节, 习题 15). 这个微分方程 [1] 和积分关系式 (32c) 表示流动中的质量守恒律. 利用速度向量的分量 v_1, v_2 , 我们可以将 (33) 写成

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_2 \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) = 0. \tag{33a}$$

当我们研究不可压缩均匀介质 (它的密度 ρ 为不依赖于位置和时间的常数) 时, 便提出了这方程的一个重要特殊情况, 在那情况下, 方程 (33) 或 (33a) 可化成一个只含速度向量的方程:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0. \tag{34}$$

从它和 (32b) 可推出在单位时间内通过封闭曲线 C 的不可压缩流体的总量是 0:

$$\int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = 0. \tag{35}$$

应用于向量 $\mathbf{v}$ 的斯托克斯定理 (9) (693 页) 也可以用流体的流动来解释. 展布在封闭的定向曲线 C 上的积分

$$\int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} ds$$

(其中 $\mathbf{t}$ 是与 C 的定向对应的单位切向量) 叫作流体绕 C 的 **环量**. 由斯托克斯定理, 这环量等于在 C 所围成的区域 R 上的重积分

$$\iint_R (\operatorname{curl} \mathbf{v})_z dx dy$$

---

1) 在力学中常称其为连续性方程.

因此，被称为运动的旋度的量

$$(\text{curl v})_z = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \tag{36}$$

在下列意义下能度量在点 (x, y) 环量的密度，即旋度在区域上的面积分给出绕边界的环量.

假若一个流动的旋度处处为 0，即

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0, \tag{37}$$

那么称这流动为无旋的. 由斯托克斯定理知，若闭曲线 C 是一个区域的边界，在这区域中运动是无旋的，则绕 C 的环量为 0. 因为 (37) 是 $v_1dx + v_2dy$ 成为全微分的条件 (见 113 页) 故在每个单连通区域上对无旋运动必存在一个函数 $\varphi = \varphi(x, y, t)$ 使

$$v_1 = -\varphi_x, v_2 = -\varphi_y. \tag{38}$$

数量函数 φ(它在差一个常数的范围内被确定) 叫作速度势. 用向量记号，(38) 可被一个方程

$$\mathbf{v} = -\text{grad}\varphi \tag{38a}$$

所代替.

不可压缩均匀流体的无旋运动同时满足方程 (37) 和 (34)，将从 (38) 得到的 v_1, v_2 的表达式代入 (34)，我们发现速度势是拉普拉斯方程

$$\Delta\varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$$

的一个解.

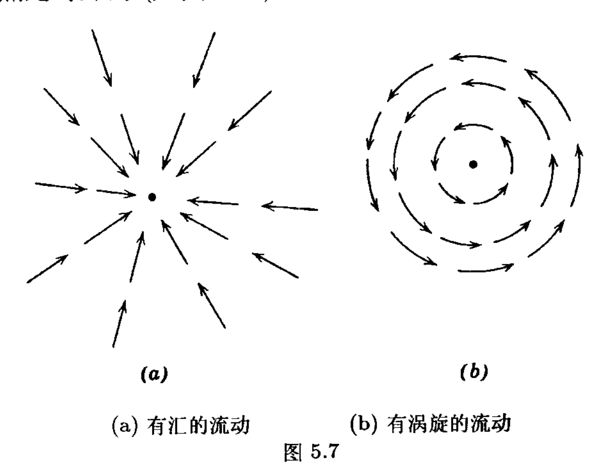
作为一个例子，我们考虑与拉普拉斯方程的下列解.

$$\varphi = a\log r = a\log\sqrt{x^2 + y^2}$$

对应的流动 [参看 (31a), 709 页]. 由 (38) 知速度向量 $\mathbf{v}$ 有分量

$$v_1 = -\frac{ax}{r^2}, \quad v_2 = -\frac{ay}{r^2},$$

它在原点是奇异的 (见图 5.7a).



(a) 有汇的流动　　　(b) 有涡旋的流动

图 5.7

当 $a > 0$ 时所有的速度向量都指向原点, 而当 $a < 0$ 时则都离开原点. 在此例中, 虽然在不同点有不同的速度, 但流体在已知点的速度不随时间变化, 我们称这种流动为**稳定流动**. 因为

$$\int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} ds = \int_C v_1 dx + v_2 dy = -\int_C d\varphi = 0,$$

故绕任一不经过原点的闭曲线 C 的环量为 0, 另一方面, 在单位时间内穿过封闭曲线 C 向外流的流体的总量是

$$\begin{aligned}\rho \int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds =& \rho \int_C \left(v_1 \frac{dx}{dn} + v_2 \frac{dy}{dn} \right) ds = \rho \int_C v_1 dy - v_2 dx \\ =& -a\rho \int_C \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = -a\rho \int_C d\theta,\end{aligned}$$

其中 θ 是从原点引出的极角. 因为

$$\frac{1}{2\pi} \int_C d\theta$$

是一个整数，它能度量 C 围绕原点绕的圈数. 我们知道，若闭曲线 C 是简单的，不穿过原点，且按逆时针方向定向，那么

$$\rho\int_C \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}ds=\begin{cases}0, & \text{若}C\text{不围绕原点},\\ -2\pi a\rho, & \text{若}C\text{围绕原点}.\end{cases}$$

因此，在单位时间内，穿过每个围绕原点的简单闭曲线 C, 有同样多的总质量流过. 当 $\mathbf{a}>0$ 时，原点是一个汇，这时质量以每单位时间 $2\pi a\rho$ 个单位的速率消失. 当 $\mathbf{a}<0$ 时，在原点有一个质量源.

若我们考虑具有速度势

$$\varphi=c\theta=c\arctan\frac{y}{x}$$

的稳定流，则会遇到相反的情况，这里 φ 本身是一个多值函数，而相应的速度场有单值分量

$$v_1=\frac{cy}{r^2},\quad v_2=-\frac{cx}{r^2}.$$

向量 $\mathbf{v}$ 垂直于从原点引出的向径 (图 5.7b). 这速度场在原点也是奇异的.

绕闭曲线 C 的环量等于

$$\int_C v_1dx+v_2dy=-\int_C d\varphi=-c\int_C d\theta.$$

因此，对于不包围原点的简单闭曲线这环量是 0, 对于沿逆时针方向绕过原点的简单闭曲线这环量是 $-2\pi c$, 这相当于一个集中在原点的强度为 $-2\pi c$ 的涡旋. 另一方面，在单位时间内穿过任何一条不经过原点的闭曲线 C 的质量流为 0, 因为在此有

$$\begin{aligned}\rho\int_C \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}ds&=\rho\int_C v_1dy-v_2dx\\&=c\rho\int_C\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}\\&=c\rho\int_C\frac{dr}{r}=0.\end{aligned}$$

由此可见，原点不是质量的源或汇.

5.7 曲面的定向

三个自变量的积分理论不只包括前面已讨论过的三重积分和线积分，而且还包括 曲面积分 的概念. 为了说明曲面积分的概念，我们从考虑一个一般的性质开始，它同时有助于完善前面讲到的关于重积分的概念. 在处理一条平面曲线或空间曲线 C 上微分 (形式) 和积分时 (99 页) 我们发现不只要把 C 考虑成一个空间点集，而且要给它规定某种方向或 定向. 当我们考虑三维或更高维空间中曲面上的微分形式的积分时，上述事实同样成立. 类似地，在三维流形上给三阶微分形式的积分下定义就需要定义这些流形的定向. 在讨论定向这一拓扑概念时，我们将限于讨论最简单的曲线、曲面，以及位于任意维欧氏空间中，且在任一点的充分小的邻域内均具有光滑的参数表示式的那些曲线和曲面.

a. 三维空间中二维曲面的定向

在第 3.4 节中，我们曾用参数表示式描写三维空间中的曲面，在下面我们使用一个比较完善的曲面概念，即把曲面看成空间中的一个点集，它的存在不依赖于任何特殊的参数表示式，但对它的完整的描写甚至可能需要几个参数系. 我们把二维曲面 S 定义为 x, y, z 空间中的一个点集，它有用二个参数表示的 正则局部 表示式. 亦即，在 S 的任一点 P_0 的邻域中， S 上点 P 的定位向量 $\mathbf{X} = \overrightarrow{OP} = (x, y, z)$ 可以表示成下列形式

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(u, v) \tag{39a}$$

其中参数 u, v 在 u, v 平面内的一个开集 γ 上变化，且不同的 (u, v) 对应于 S 上不同的点. 此外，我们还要求表示式 (39a) 在下述意义下是 正则 的，即向量 $\mathbf{X}(u, v)$ 在 γ 内有对 u, v 的导数 $\mathbf{X}_u = (x_u, y_u, z_u)$

和 $\mathbf{X}_v=(x_v,y_v,z_v)$, 它们是连续的且是线性无关的 [1]. 向量 $\mathbf{X}_u$ 和 $\mathbf{X}_v$ 的无关性在代数上用条件 [见 (40d), 306 页]

$$\mathbf{X}_u\times\mathbf{X}_v\neq 0 \tag{39b}$$

或者用

$$\Gamma(\mathbf{X}_u,\mathbf{X}_v)=\begin{vmatrix}\mathbf{X}_u\cdot\mathbf{X}_u & \mathbf{X}_u\cdot\mathbf{X}_v\\ \mathbf{X}_v\cdot\mathbf{X}_u & \mathbf{X}_v\cdot\mathbf{X}_v\end{vmatrix}=|\mathbf{X}_u\times\mathbf{X}_v|^2>0 \tag{39c}$$

表示, 其中 Γ 表示向量 $\mathbf{X}_u,\mathbf{X}_v$ 的格拉姆行列式.

在 S 上一点 $P=\mathbf{X}(u,v)$ 处参数为 u,v 的向量 $\mathbf{X}_u(u,v)$ 和 $\mathbf{X}_v(u,v)$ 在点 P 与 S 相切且在 P 点 "张成" S 的切平面 $\pi(P)$, 即切平面上的每一点有下列形式的定位向量

$$\mathbf{X}(u,v)+\lambda\mathbf{X}_u(u,v)+\mu\mathbf{X}_v(u,v),$$

其中 λ,μ 为适当的常数 (见 155 页). 我们通过在连续的方式下给 S 的每个切平面确定定向来规定 S 的定向. 下面我们将给这个说法以确切的意义. 在平面 $\pi(P)$ 上指定无关向量 $\boldsymbol{\xi}(P)$ 和 $\boldsymbol{\eta}(P)$ 的一个有序对就可得到一个有向的切平面 $\pi^*(P)$. π^* 的定向就是有序对 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$ 的定向, 或者, 用符号表示 [2]

$$\Omega(\pi^*(P))=\Omega(\boldsymbol{\xi}(P),\boldsymbol{\eta}(P)). \tag{40a}$$

若在 P 点的任何其他无关切向量的有序对 $\boldsymbol{\xi}',\boldsymbol{\eta}'$ 满足

$$[\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta};\boldsymbol{\xi}',\boldsymbol{\eta}']=\begin{vmatrix}\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi}' & \boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\eta}'\\ \boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\xi}' & \boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\eta}'\end{vmatrix}>0, \tag{40b}$$

则 $\boldsymbol{\xi}',\boldsymbol{\eta}'$ 与 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$ 确定相同的定向. 更一般地,

$$\Omega(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})=\operatorname{sgn}[\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta};\boldsymbol{\xi}',\boldsymbol{\eta}']\Omega(\boldsymbol{\xi}',\boldsymbol{\eta}'). \tag{40c}$$

---

1) 甚至对于像球面那样简单的曲面, 我们也不能希望对整个曲面找到一个单一的正则参数表示式. 由于这原因, 我们只要求对 S 存在一个局部的表示式, 附带还排除那些有棱有角的曲面, 它们不可能有正则局部表示式 (例如立方体). 更一般地, n 维 $(x_1,\cdots,x_n)$ 空间中一个 (简单的)m 维曲面定义为一个点集, 它具有下列形式的局部表示式

$$\mathbf{X}=\mathbf{X}(u_1,\cdots,u_m),$$

其中向量 $\mathbf{X}$ 对于变量 u_k 的一阶导数是连续的且线性无关.

2) 我们可以按照在平面 $\pi(P)$ 内旋转的方向把 $\Omega(\pi^*(P))$ 画出来, 也就是说可按照转一个小于 180° 的角使 $\boldsymbol{\xi}$ 方向变成 $\boldsymbol{\eta}$ 方向的方向画出 $\Omega(\pi^*(P))$ 来.

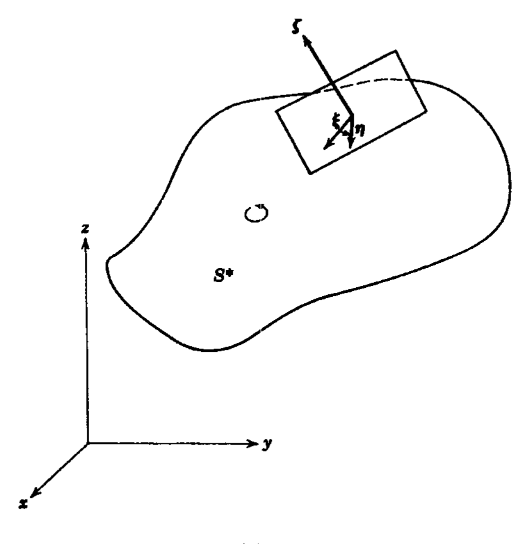


图 5.8

借助于单位向量 (见图 5.8)

$$\boldsymbol{\zeta}=\frac{\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{\eta}}{|\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{\eta}|} \tag{40d}$$

可以更容易地描写定向 $\Omega(\pi^*)$. 这向量 $\boldsymbol{\zeta}$, 垂直于 $\boldsymbol{\xi}$ 和 $\boldsymbol{\eta}$, 因而也垂直于切平面 $\pi(P)$. 它不依赖于个别的切向量的有序对 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$, 只依赖于由这些切向量所决定的定向. 从向量积的一般的恒等式 [1)]

$$(\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{\eta})\cdot(\boldsymbol{\xi}'\times\boldsymbol{\eta}')=\begin{vmatrix}\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi}' & \boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\eta}'\\ \boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\xi}' & \boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\eta}'\end{vmatrix}=[\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta};\boldsymbol{\xi}',\boldsymbol{\eta}'] \tag{40e}$$

可以推知这点. 若这里切向量的有序对 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$ 和 $\boldsymbol{\xi}',\boldsymbol{\eta}'$ 给出 π 的同一个定向, 那么由 (40b) 知相应的单位法向量 $\boldsymbol{\zeta}$ 和 $\boldsymbol{\zeta}'$ 必满足

$$\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{\zeta}'=\frac{[\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta};\boldsymbol{\xi}',\boldsymbol{\eta}']}{|\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{\eta}||\boldsymbol{\xi}'\times\boldsymbol{\eta}'|}>0. \tag{40f}$$

又因只有 $\boldsymbol{\zeta}$ 和 $-\boldsymbol{\zeta}$ 是可能的单位法向量, 故由 (40f) 知 $\boldsymbol{\zeta}'=\boldsymbol{\zeta}$.

---

1) 这恒等式可以通过用 (包含于其中的) 向量的分量来表示而直接验证, 也可以参看 219 页练习 2.4, 习题 6. 公式 (39c) 是 $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}'=\mathbf{X}_u,\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}'=\mathbf{X}_v$ 的特殊情形.

现在，如果由 (40d) 给出的单位法向量 ζ 连续依赖于 P, 我们就说由 (40a) 用切向量对 $\boldsymbol{\xi}(P),\boldsymbol{\eta}(P)$ 决定的定向 $\Omega(\pi^*(P))$ 随 P 连续变化. 我们把具有连续定向切平面 $\pi^*(P)$ 的曲面 S 定义为定向曲面 S^*. 如果 π^* 的定向由 (40a) 给出，那么我们可用符号表示:

$$\Omega(S^*)=\Omega(\pi^*)=\Omega(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}). \tag{40g}$$

在 S 上点 P 处的任一单位法向量 ζ 决定切平面 $\pi(P)$ 的一个定向，即由 $\Omega(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ 给出的那一个定向，其中 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$ 是任意二个切向量，对它们，$\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{\eta}$ 与 ζ 同方向. 由 196 页的公式 (71c),

$$\det(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta})=\boldsymbol{\zeta}\cdot(\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{\eta})=|\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{\eta}|>0. \tag{40h}$$

因此 (见 201 页) ζ 是 S 在点 P 的那个单位法向量，对于 ζ，三个向量 $\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$ 关于坐标轴是正定向的，即

$$\Omega(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})=\Omega(x,y,z). \tag{40i}$$ [1]

于是 S 的一个定向就在于以连续的方式在 S 的所有点上选择一个单位法向量 ζ, 这里 ζ 由 (40d) 给出，而对定向曲面 S^* 来讲总有 $\Omega(S^*)=\Omega(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$. 我们说 ζ 是**指向定向曲面** S^* **的正的一侧**的那个单位法向量，或者说，是 S^* 的**正单位法向量**[2].

设 S 是一个连通曲面，即有这样性质的曲面：S 的任何二点均能被完全落在 S 上的曲线所联接. 于是，容易看出，或者 S 根本不能定向，或者恰好有两种不同的给 S 定向的方法[3]. S 的二种

1) 公式 (40i) 表明 $\Omega(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ 与对应的平面 π 的旋转方向联系在一起，当从 ζ 所指的 π 的那一侧观看时表现出逆时针方向，只要 x,y,z 坐标系是右手系的话. 须注意在 $\Omega(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ 和 ζ 的方向之间的联系依赖于所用坐标系的定向，因为向量积 $\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{\eta}$ 依赖于坐标系的定向.

2) 更一般地，对任何起点在 P 的非切向量 ζ, 若 (40i) 成立，就说它指向 S^* 的正侧. 对于一个 "物质的" 定向曲面，例如一个薄金属板，曲面的两侧可以涂上不同的颜色. 在正的一侧的颜料层只充满那样一些点，当从曲面上一点 P 开始并在曲面的正法线方向上移动一个短距离时就能达到这些点.

3) S 是连通的这一假定是本质的，因若一个曲面包含若干不相交的连通部分，则每个部分可以独立于其他部分而确定定向. 在 724 页将要指出根本不能确定定向的曲面是存在的.

不同的定向对应于 S 上单位法向量 $\boldsymbol{\zeta}(P)$ 和 $\boldsymbol{\zeta}'(P)$ 的两种选法. 这里, 必然有 $\boldsymbol{\zeta}'=\varepsilon\boldsymbol{\zeta}$, 其中 $\varepsilon=\varepsilon(P)$ 取 $+1$ 或 -1 二个值中的一个. 因为, 由假定, 向量 $\boldsymbol{\zeta}$ 和 $\boldsymbol{\zeta}'$ 随 P 连续变化, 故同样的事实对数量函数 $\varepsilon(P)=\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{\zeta}'$ 也成立. 因此, ε 是 S 上的一个假定只取 $+1$ 或 -1 的连续函数. 若对 S 上任意二点 $P,Q,\varepsilon(P)\neq\varepsilon(Q)$, 由中间值定理将推出在 S 上连接 P 和 Q 的一条曲线上某处有 $\varepsilon=0$, 这和 ε 的定义矛盾. 由此推出, 在 S 的所有点上 ε 有同样的值. 因此, S 的任一定向或者是用法向量 $\boldsymbol{\zeta}(P)$ 描写的那一个, 或者是用 $-\boldsymbol{\zeta}(P)$ 描写的那一个. 若 S^* 是带有正法向 $\boldsymbol{\zeta}$ 的定向曲面, 我们就用 $-S^*$ 记具有 S 的另一定向的那个曲面, 因而有

$$\Omega(-S^*)=-\Omega(S^*). \tag{40j}$$

显然, 对于连通曲面, 在一个点 P 的正法向 $\boldsymbol{\zeta}$ 的指向唯一地决定了 S 上任何其它点 Q 的正法向, 因而决定了 S 的定向. 我们只需要用 S 上的一条曲线 C 联接 Q 和 P 并沿 C 规定一个 S 的单位法向量使其在 P 点与 $\boldsymbol{\zeta}$ 一致并且沿 C 连续地变化, 那么这法向量在 Q 也就与正法向一致.

要决定空间中一个三维区域 R 的边界构成的曲面 S 的定向是特别简单的 (这里 S 不必是连通的, 如在球壳 R 的情形中那样), 在 S 的每一点 P, 我们能区分一个**内法向**(指向 R 内) 和一个**外法向**(指向离开 R 的方向), 它们都随 P 连续变化. 取外法向作正法向, 就给 S 定义了一个定向. 这时, 我们说对应的定向曲面 S^* **关于** R **定向为正**[1].

1) 如这里所定义的, 区域 R 的边界 S 的正定向依赖于 x,y,z 坐标系的定向, 或依赖于由这坐标系所决定的三维空间的定向. 常常更方便的是去设想 R 也有个定向, 并且明确地去定义在三维空间中定向连通区域 R^* 的定向边界 S^*. 这里 R^* 的定向包含 x,y,z 坐标系的特殊选择, 这坐标系按定义:

$$\Omega(R^*)=\Omega(x,y,z)$$

是关于 R 定向为正的. 我们用 $\Omega(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})=\Omega(R^*)$ 来定义 R^* 的定向为正的边界面 S^*(常用 ∂R^* 表示), 其中 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$ 总是 S 上点 P 处的切向量, 满足 $\Omega(S^*)=\Omega(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$, 而 $\boldsymbol{\zeta}$ 是 P 点的单位外法向.

例如，若 R 是球壳

$$a \leq |\mathbf{X}| \leq b, \tag{40k}$$

则 R 的定向为正的边界 S^* 具有正单位法向量

$$\boldsymbol{\zeta} = -\mathbf{X}/a \;\; \text{对于} \;\; |\mathbf{X}| = a, \boldsymbol{\zeta} = \mathbf{X}/l \;\; \text{对于} \; |\mathbf{X}| = b. \tag{40l}$$

设定向曲面 S^* 的一部分具有正则参数表示式 $\mathbf{X} = \mathbf{X}(u, v)$, 其中 u, v 在 u, v 平面上的一个开集 γ 中变化，于是，对 γ 中的 (u, v)

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v}{|\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v|} \tag{40m}$$

确定了一个单位法向量. 若 $\boldsymbol{\zeta}$ 是 S^* 的正单位法向量，我们便有

$$\boldsymbol{\zeta} = \varepsilon \mathbf{Z}, \tag{40n}$$

其中 $\varepsilon = \varepsilon(u, v) = \pm 1$, 因为 $\boldsymbol{\zeta}$ 和 $\mathbf{Z}$ 都是连续的，故 ε 也是连续的，因此 ε 在 γ 的任何连通部分都是常数. 对 $\varepsilon = 1$, 亦即，对于

$$\Omega(S^*) = \Omega(\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v) \tag{40o}$$

我们说 S^* 是**关于参数** u, v **定向为正的**, 且记作

$$\Omega(S^*) = \Omega(u, v). \tag{40p}$$

若 S^* 的同一部分有第二个参数表示式，它是用在区域 γ' 上变化的参数 u', v' 表示的. 那么由公式 (42), 我们有

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v &= \left(\frac{d(y, z)}{d(u, v)}, \frac{d(z, x)}{d(u, v)}, \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right) \\ &= \frac{d(u', v')}{d(u, v)} (\mathbf{X}'_{u'} \times \mathbf{X}'_{v'}), \end{aligned} \tag{40q}$$

因此，对应于二个参数表示式的单位法向量 $\mathbf{Z}$ 和 $\mathbf{Z}'$ 之间有下面的关系

$$\mathbf{Z} = \operatorname{sgn} \frac{d(u', v')}{d(u, v)} \mathbf{Z}'. \tag{40r}$$

因此，如果 S^* 关于参数 u,v 定向为正，则只要

$$\frac{d(u',v')}{d(u,v)} > 0 \tag{40s}$$

S^* 关于参数 u',v' 定向亦为正.

作为例子, 我们考虑球心在原点的关于它的内部定向为正的单位球面 S^*, 对 $z \neq 0$ 用 $u = x, v = y$ 作参数，我们有

$$\mathbf{X} = (u, v, \varepsilon\sqrt{1 - u^2 - v^2}), \tag{40t}$$

其中 $\varepsilon = \text{sgn}z$. 由 (40m) 定义的相应的法向量在此是

$$\mathbf{Z} = (\varepsilon x, \varepsilon y, \varepsilon z) = \varepsilon\boldsymbol{\zeta},$$

其中 $\boldsymbol{\zeta}$ 是单位外法向. 因此 S^* 当 $z > 0$ 时关于 x, y 定向为正，而当 $z < 0$ 时关于 x, y 定向为负 (见图 5.9).

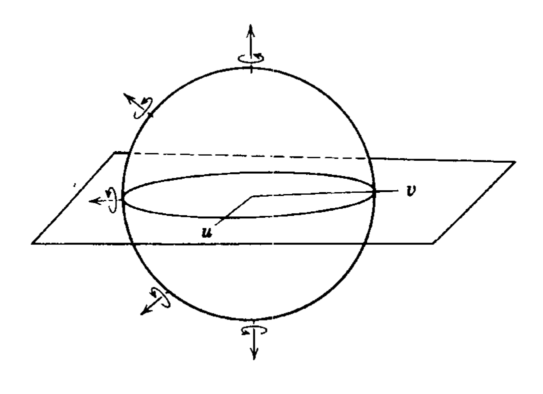
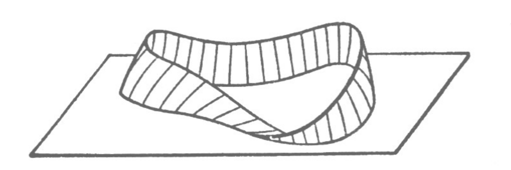


图 5.9

在三维空间中，一个各侧之间没有区别的曲面，或者沿它不能选出一个连续变化的单位法向量的曲面，是不能确定定向的. 这种类型的 “单侧” 曲面的最简单的例子，如图 5.10(a) 所示，叫作梅比乌斯带 (按其发现者的名字命名). 我们很容易做这样一个曲面，只要用一个矩形纸条，将其一端旋转 180° 之后将其两端扣紧在一起即可. 如果我们从 u,v 平面上的矩形 $0 < u < 2\pi, -a < v < a$(其中



(a) 梅比乌斯带



(b) M.C. 埃歇画的梅比乌斯带

图 5.10

$0 < a < 1$) 开始，将每个线段 $u=$ 常数作刚体移动，使它的中心移动到 x,y 平面上单位圆周上的点 $(\cos u, \sin u, 0)$, 且使它变得垂直于那个圆周并且与正 z 轴的夹角为 $u/2$ (假设 $a<1$ 使曲面不会自交) 那么我们就可以得到一个梅比乌斯带. 这带子具有参数表示式

$$\mathbf{X}=\left(\left(1+v\sin\frac{u}{2}\right)\cos u,\left(1+v\sin\frac{u}{2}\right)\sin u, v\cos\frac{u}{2}\right), \tag{40u}$$

其中 v 在区间 $-a<u<a$ 中，u,v 平面上的点 $(u,v),(u+4\pi,v),(u+2\pi,-v)$ 都对应于曲面上同一个点. 如果对 S 上任一点 P_0, 我们选定一组可能的参数 u_0,v_0, 那么公式 (40u) 就给出 S 的一个正则的局部参数表示式，其中 u,v 限制在由

$$u_0-\pi<u<u_0+\pi, \quad -a<v<a$$

给出的矩形中. 沿曲面的中心线 $v=0$, 方程 (40m) 定义一个单位法向量

$$\mathbf{Z}=\left(\cos u\cos\frac{u}{2},\sin u\cos\frac{u}{2},-\sin\frac{u}{2}\right),$$

它随 u 连续变化. 从在 S 上与 $u=0$ 对应的点 (1,0,0) 处的单位法向量 $\mathbf{Z}=(1,0,0)$ 开始，让 u 从 0 增加到 2π, 我们沿曲面的中心线就画出一个完整的回路而回到点 (1,0,0), 但具有相反的单位法向量 $\mathbf{Z}=(-1,0,0)$. 类似地，我们发现，在 $\mathbf{Z}$ 的运动中，$\mathbf{Z}$ 带着一个小的定向切线一起运动，当它又回到同一点时具有相反的定向. 因此，不可能用前后一致的方法选出一个连续变化的单位法向量，或选出 S 的一侧，或在 S 上选择一种旋转方向，梅比乌斯带的单侧性在 M.C. 埃歇画的虫子沿带子爬的图中表现得很明显. 这张图复制在图 5.10(b) 中. 至此，我们看到，一个曲面不是自动地具有可定向这一性质的.

我们已通过在连续的方式下给曲面的切平面定向来给曲面定向. 切平面 $\pi^*(P)$ 的定向是通过无关切向量的有序对 $\boldsymbol{\xi}(P),\boldsymbol{\eta}(P)$ 来描述的. 当到了定义 $\Omega(\pi^*)=\Omega(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ 的 "连续性" 的时候，我们用了按 (40d) 构成的法向量 $\boldsymbol{\zeta}$ 而且要求 $\boldsymbol{\zeta}$ 是连续的. 最好是不依

靠法向量或矢量积来定义定向 $\Omega(\boldsymbol{\xi}(P),\boldsymbol{\eta}(P))$ 的连续性. 当到了定义高维空间中流形的定向时, 比方说, 在四维欧氏空间中定义二维曲面的定向时, 这一点显得特别重要. 这里每个切平面的定向仍然可以用独立切向量 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$ 的有序偶来描写, 但是没有与 S 对应的 S 的唯一的单位法向量或 S 的 "侧". 我们也不能要求描述 $\Omega(\pi^*)$ 的切向量 $\boldsymbol{\xi}(P),\boldsymbol{\eta}(P)$ 有定义且在 S 上所有的点 P 处均连续 [1]. 下面我们简短地讨论一下三维空间中曲面定向的二个定义, 它们与上面给出的定义等价, 但 (定义中) 不包含法向量, 因此能够推广到高维的情形.

在三维空间中, 曲面 S 的一部分的任一正则参数表示式 $\mathbf{X}=\mathbf{X}(u,v)$ 在该部分都能通过公式 (40m) 决定一个连续变化的单位法向量. 设对 S 的不同部分给了若干个正则参数表示式. 只要在 S 的任一点附近至少有一个参数表示式是有效的, 且从任何二个在点 P 有效的参数表示式得到的单位法向量 $\mathbf{Z}$ 是同一个, 那么这些正则参数表示式就在整个 S 上定义一个连续变化的单位法向量, 因此定义了 S 的一个定向. 由 (40r) 知只要具有参数 u,v 和 u',v' 的二个正则参数表达式满足

$$\frac{d(u',v')}{d(u,v)}>0 \tag{41a}$$

就能知道从任何二个在点 P 有效的参数表示式得到的单位法向量 $\mathbf{Z}$ 是同一个法向量, 于是这曲面关于每一个已给的参数表示式定向是正的.

例如, 单位球面 S 的各部分有正则参数表示式

$$\mathbf{X}=(\sin u\cos v,\sin u\sin v,\cos u), \tag{41b}$$

$$\text{对于}\quad 0<u<\pi, v_0-\pi<v<v_0+\pi$$

$$\mathbf{X}=(u',v',\sqrt{1-u'^2-v'^2}), \text{对于} u'^2+v'^2<1, \tag{41c}$$

---

1) 甚至对于像三维空间中的球面那样简单的曲面, 也不能找到在曲面所有点上连续的非零切向量 $\boldsymbol{\xi}(P)$, 然而, 我们总可以选向量 $\boldsymbol{\xi}(P),\boldsymbol{\eta}(P)$, 使其在一个给定点的邻域中连续变化.

$$\mathbf{X} = (v'', u'', -\sqrt{1-u''^2-v''^2}), \text{对于} u''^2+v''^2<1. \tag{41d}$$

容易看出, 这些表示式的全体确定了 S 的一个定向. 例如, 将 (41b) 和 (41d) 用于半球 $z<0$ 上, 从而在 $z<0$ 上有

$$\frac{d(u'',v'')}{d(u,v)} = \frac{d(\sin u \sin v, \sin u \cos v)}{d(u,v)} = -\sin u \cos u > 0.$$

从所有这些参数表示式得到的单位法向量 $\mathbf{Z}$ 都是外法向, 而且 S 的定向是关于内部为正的那一个定向.

要讲到的第二种方法是直接用向量 $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}$ 来表示 $\Omega(\boldsymbol{\xi}(P), \boldsymbol{\eta}(P))$ 的连续性的条件. 设 $\boldsymbol{\zeta}(P)$ 是通过 (40d) 与 $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}$ 联系在一起的单位法向量. 在 S 的给定点 P_0 的邻域中, 正则参数表示式 $\mathbf{X} = \mathbf{X}(u,v)$ 成立, 它通过 (40m) 定义了一个连续变化的法向量 $\mathbf{Z}$. 那么关于某个 $\varepsilon(P) = \pm 1$ 有 $\boldsymbol{\zeta}(P) = \varepsilon(P)\mathbf{Z}(P)$. 在 P_0 处向量 $\boldsymbol{\zeta}(P)$ 的连续性显然等价于条件 $\varepsilon(P) =$ 常数 (在 P_0 附近) 或条件

$$\boldsymbol{\zeta}(P) \cdot \boldsymbol{\zeta}(P_0) = \varepsilon(P)\varepsilon(P_0)\mathbf{Z}(P) \cdot \mathbf{Z}(P_0) > 0$$

对所有充分靠近 P_0 的 P 成立. 现在, 用恒等式 (40e), 我们发现

$$\boldsymbol{\zeta}(P) \cdot \boldsymbol{\zeta}(P_0) = \frac{[\boldsymbol{\xi}(P), \boldsymbol{\eta}(P); \boldsymbol{\xi}(P_0), \boldsymbol{\eta}(P_0)]}{|\boldsymbol{\xi}(P) \times \boldsymbol{\eta}(P)||\boldsymbol{\xi}(P_0) \times \boldsymbol{\eta}(P_0)|}.$$

由此推出, 假如对 S 上每点 P_0

$$[\boldsymbol{\xi}(P), \boldsymbol{\eta}(P); \boldsymbol{\xi}(P_0), \boldsymbol{\eta}(P_0)] > 0 \tag{41e}$$ [1]

对所有 S 上充分靠近 P_0 的点 P 成立, 那么定向 $\Omega(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ 是连续变化的且定义了曲面 S 的一个定向.

例如, 设 S 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$. 对 S 上任一不是极点 $(0,0,\pm 1)$ 的点 (x,y,z), 向量

$$\boldsymbol{\xi} = (xz, yz, z^2-1), \boldsymbol{\eta} = (-y, x, 0)$$

---

1) 人们可以直接从 215 页的公式 (85c) 推出 (41e) 仅是 $\Omega(\pi^*(P))$ 和 $\Omega(\pi^*(P_0))$ 之间的一个关系而不依赖于用来表示这些切平面的定向的特殊向量 $\boldsymbol{\xi}(P), \boldsymbol{\eta}(P), \boldsymbol{\xi}(P_0), \boldsymbol{\eta}(P_0)$.

是独立的切向量，因为它们垂直于定位向量 (x,y,z). 在极点 $(0,0,\varepsilon)$, 其中 $\varepsilon=\pm1$, 补充选择 $\boldsymbol{\xi}=(1,0,0),\boldsymbol{\eta}=(0,\varepsilon,0)$. 则定向 $\Omega(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ 在 S 的每一点 P_0 均连续变化. 当 P_0 不是极点时，这是显然的，因为这时 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$ 本身是连续函数且不是零向量因此我们只要在 P_0 是极点时验证条件 (41e). 例如对于 "北极"$P_0=(0,0,1)$ 和 "北半球" 的任一点 $P=(x,y,z)$, 除了 $P=P_0$ 以外，均有

$$[\boldsymbol{\xi}(P),\boldsymbol{\eta}(P);\boldsymbol{\xi}(P_0),\boldsymbol{\eta}(P_0)]=\begin{vmatrix}\boldsymbol{\xi}(P)\cdot\boldsymbol{\xi}(P_0) & \boldsymbol{\xi}(P)\cdot\boldsymbol{\eta}(P_0)\\ \boldsymbol{\eta}(P)\cdot\boldsymbol{\xi}(P_0) & \boldsymbol{\eta}(P)\cdot\boldsymbol{\eta}(P_0)\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}xz & yz\\ -y & x\end{vmatrix}=(x^2+y^2)z>0.$$

但对 $P=P_0$ 当然也有

$$[\boldsymbol{\xi}(P_0),\boldsymbol{\eta}(P_0);\boldsymbol{\xi}(P_0),\boldsymbol{\eta}(P_0)]=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1>0.$$

b. 在定向曲面上曲线的定向

我们已经看到在一个有某种定向坐标系的空间中的一个定向曲面 S^* 是可能区分其正侧和负侧的. 用同样的方法，我们可以定义一条落在一个定向曲面 S^* 上的定向曲线 C^* 的正侧和负侧. 设 $\boldsymbol{\xi}$ 是一个向量，它与曲线在点 P 相切，并且指向由 C^* 的定向决定的方向 [1]:

$$\Omega(\boldsymbol{\xi})=\Omega(C^*).\tag{41f}$$

设 $\boldsymbol{\eta}$ 是一个向量, 它与曲面在点 P 相切, 并且与 $\boldsymbol{\xi}$ 线性无关, 若

$$\Omega(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi})=\Omega(S^*),\tag{41g}$$

我们便说 $\boldsymbol{\eta}$ 指向 C^* 的正侧. 反过来，我们可以通过要求一个不与 C(C 是一条落在定向曲面 S^* 上的曲线) 相切的已知向量 $\boldsymbol{\eta}$ 指向 C

1) 若 $\mathbf{X}=\mathbf{X}(t)$ 是 C^* 的一个参数表示式而 $\Omega(C^*)$ 与 t 增加对应，则向量 $\boldsymbol{\xi}$ 必与 $\dfrac{d\mathbf{X}}{dt}$ 同向.

的正侧 [1] 来规定曲线 C 的定向.

当 C 是一个区域 σ(它落在一个定向曲面 S^* 上) 的边界的一部分时，有一种自然的方法来规定 C 的定向即要求 σ 落在定向曲线 C^* 的负侧，更确切地说，如果一个在 C^* 上点 P 处与 S^* 相切且指向远离 σ 的方向的向量 $\boldsymbol{\eta}$ 指向 C^* 的正侧，则我们称 C^* 关于 σ 是正定向的. 反过来，我们可以通过在 S^* 上取一个区域 σ 且标上它的边界曲线的正定向来用图形表示曲面 S^* 的定向 (见图 5.11) [2].

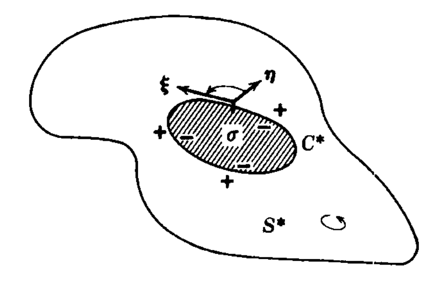


图 5.11　在定向曲面 S^* 上的定向曲线 c^*

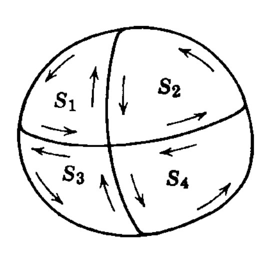


图 5.12

若一个定向曲面 S^* 被分成若干部分 $S_1, S_2, \cdots, S_n$, 那么任一个隔开 S_i 与 S_k 的弧 C 如果关于 S_i 和 S_k 都是正定向的，则它从 S_i 和 S_k 得到相反的定向. 这立即可从下列事实推出：任意一个在 C 上的点 P 处与 S 相切且指向 S_i 内部的向量 $\boldsymbol{\eta}$, 指向远离 S_k 的方向 (见图 5.12).

练　习　5.7

1. 设 S 是四维空间中的二维曲面 (“二个圆的乘积”), 它由

$$\mathbf{X} = (\cos u, \sin u, \cos v, \sin v)$$

1) 为了与高维情形有更多的一致性，一条曲线的正和负侧的表示法已经与在卷一 (376 页) 中用过的那一种有所不同. 考虑特殊情形，其中 S^* 是平面，当从某一侧观看时，具有通常的逆时针定向. 若 C^* 是一个定向弧，具有切向量 $\boldsymbol{\xi}$, 它指向曲线 C^* 的定向所给出的方向，则由 (41g) 知若沿逆时针旋转一个小于 180° 的角，能将向量 $\boldsymbol{\eta}$ 变为 $\boldsymbol{\xi}$, 则 $\boldsymbol{\eta}$ 指向 C^* 的正侧，即若我们向 $\boldsymbol{\xi}$ 所指的方向看去， $\boldsymbol{\eta}$ 指向 C^* 的右侧.

2) 像这样通过曲面 S^* 上一条曲线 C^* 的定向来表示曲面 S^* 的定向时，我们必须明确地指出集合 σ,(C^* 关于这 σ 是正定向的.) 通常， C^* 是一个 “小” 的简单闭曲线，它将 S 分成二部分，其中一部分恰好也是小的而且就取它作 σ.

给出. 证明向量

$$\boldsymbol{\xi} = (-x_2, x_1, -x_4, x_3),$$
$$\boldsymbol{\eta} = (-x_2, x_1, x_4, -x_3)$$

在 S 上决定一个定向.

2. 设 S^* 是具有在第 3 章 (313 页) 中给出的参数表示式的环面, 且关于参数 θ, φ 是正定向的, 试证明 S^* 关于它的内部是正定向的.

3. 设 S 是梅比乌斯带, 它用像 (40u) 那样的参数式表出.

(a) 证明线 $v = a/2$ 将 S 分成一个可定向的和一个不可定向的集合.

(b) 证明线 $v = 0$ 不能分割 S, 也就是说, 从 S 上去掉所有满足 $v = 0$ 的点, 得到的点集 S_1 仍是连通的.

(c) 证明 S_1 是可定向的.

4. 设 $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}$ 是平面 π 中的独立向量. 令 $a = |\boldsymbol{\xi}|^2, b = \boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\eta}, c = |\boldsymbol{\eta}|^2$, 并对任意 t 构造向量

$$\mathbf{R}(t) = \left(\cos t - \frac{b}{\sqrt{ac - b^2}}\sin t\right)\boldsymbol{\xi} + \frac{a\sin t}{\sqrt{ac - b^2}}\boldsymbol{\eta}.$$

证明 $\mathbf{R}(t)$ 是由在 π 内将向量 $\boldsymbol{\xi}$ 按由定向 $\Omega(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ 给出的方向旋转角 t 而得到的.

5.8 曲面上微分形式和数量函数的积分

a. 定向平面区域上的重积分

在单重和多重积分原先的定义中, 比如说作为黎曼和的极限, 定向是不起作用的. 函数 f 的积分是建立在初等图形的长度、面积、体积等量的应用的基础上的, 而用正数来表示这种量当然是足够的了. 但是, 如果我们想得到积分的简单运算法则, 那么使用带

有符号的量，相当于引入定向，立刻就会收到效果[1]. 当 $a < b$ 时，定积分

$$\int_a^b f(x)dx$$

定义为黎曼和的极限. 如果我们要求加法法则

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

不管 a, b, c 的相对位置怎样都成立的话，就必须用公式

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \tag{42a}$$

来定义 $a \geq b$ 时的积分

$$\int_a^b f dx$$

(见卷一 154 页). 几何上，有序数对 a, b 决定了 x 轴上 "始" 点 a 和 "终" 点 b 的一个定向区间 I^*. 当 I^* 的定向对应于 x 增加的方向，即 $a < b$ 时，积分

$$\int_a^b f dx = \int_{I^*} f dx \tag{42b}$$

的值由黎曼和的极限给出 (对于正的 f 积分值是正值). 对 $a > b$ 积分值是这个极限值的负值. 交换 I^* 的端点把 I^* 变成与 I^* 的定向相反的区间 $-I^*$, 于是公式 (42a) 也可写作

$$\int_{-I^*} f dx = -\int_{I^*} f dx. \tag{42c}$$

对于 xy 平面上定向 (若尔当) 可测集 R^* [2] 上的积分也有类似的情形. 当 R^* 关于 xy 坐标定向为正时， $\Omega(R^*) = \Omega(x, y)$, 重

1) 一般说，如果我们只能利用正的量，例如用正距离来代替带有符号的距离，数学就将变得难以忍受的笨拙. 在简单定理的叙述和证明中就需要去区别数不清的情形. 在数学对象间不等式关系的构成中，正性是一个本质的要素，但却使大多数等式的构成复杂了，这些等式通常是根据量不受限制的代数运算建立起来的.

2) 这里 R^* 定向的定义和曲面定向的一般定义一致. 这里由 R^* 的每一个点处的定向决定的 (例如，由一对向量描述的定向)，定向逐点连续地变化. 对连通集来说，只可能有两个不同的定向.

积分

$$\iint\limits_{R^*} f(x,y)dxdy$$

按第四章定义的意义来理解. 即积分就是把平面分割成面积为 2^{-2n} 的正方形上所得到的和数的极限. 对于非负的 f, 积分值为非负. 在 $\Omega(R^*) = -\Omega(x,y) = \Omega(y,x)$ 的情形里, 我们用

$$\iint\limits_{R^*} fdxdy = -\iint\limits_{R^*} fdydx$$

来定义 f 在 R^* 上的积分, 其中

$$\int_{R^*} fdydx$$

具有作为和数的极限的普通的意义. 因此, 我们有规则

$$\iint\limits_{-R^*} fdxdy = -\iint\limits_{R^*} fdxdy, \tag{43}$$

其中 $-R^*$ 是通过改变 R^* 的定向得到的. 按照这种约定, 只要雅可比 $\dfrac{d(x,y)}{d(u,v)}$ 在 T^* 上或者处处为正或者处处为负, 那么对于从 T^* 到 R^* 上的 1-1 光滑映射

$$x = \phi(u,v), \quad y = \psi(u,v),$$

在形式上变量替换法则

$$\iint\limits_{R^*} f(x,y)dxdy$$
$$= \iint\limits_{T^*} f(\phi(u,v),\psi(u,v))\frac{d(x,y)}{d(u,v)}dudv \tag{43a}$$

成立. 这里, T^* 的定向必须是 R^* 的定向在上述映射下所对应

的定向 [1]. 例如, 如果 $\Omega(R^*) = -\Omega(x,y)$ 又若 $\dfrac{d(x,y)}{d(u,v)} < 0$, 则 $\Omega(T^*) = \Omega(u,v)$. 我们可以说 R^* 的定向给予微分形式 $dxdy$ 一个确定的符号: 如果 x,y 坐标系具有 R^* 的定向, 则是正号, 否则取负号. 由 T^* 的定向而得到的微分形式 $dudv$ 的符号是和关系式

$$dxdy = \frac{d(x,y)}{d(u,v)}dudv.$$

相一致的符号.

用同样的方法我们可以在 x,y,z 空间中的定向集合上定义三重积分

$$\iiint\limits_{R^*} f(x,y,z)dxdydz,$$

而且可以类似地在高维空间中定义定向集合上的多重积分.

b. 二阶微分形式的曲面积分

现在我们可以给出任何二阶微分形式 ω 在空间中定向曲面 S^* 上的积分的一般定义. 设 ω 由表达式

$$\omega = a(x,y,z)dydz + b(x,y,z)dzdx + c(x,y,z)dxdy \tag{44}$$

给出. 首先假定所考虑的整个曲面 S^* 能表为参数形式

$$x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v), \tag{45}$$

(u,v) 在 $u-v$ 平面上的一个集合 R^* 上变化. 这里 R^* 有一个由 S^* 的定向所确定的某个定向 (见 721 页) [2] .

---

1) 为了求得那个定向, 按照 (40o,p) 我们构造向量

$$\mathbf{X}_u = (x_u, y_u), \mathbf{X}_v = (x_v, y_v)$$

且令

$$\Omega(R^*) = \varepsilon\Omega(\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v) = \varepsilon\left(\operatorname{sgn}\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}\right)\Omega(x,y),$$

其中 $\varepsilon = \pm 1$, 由

$$\Omega(R^*) = \Omega(T^*) = \varepsilon\Omega(u,v)$$

决定.

2) 给 R^* 定向的规则如下: 如果 $\Omega(S^*) = \varepsilon\Omega(\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v)$, 则 $\Omega(R^*) = \varepsilon\Omega(u,v), \varepsilon = \pm 1$ 其中 $\mathbf{X} = (x,y,z)$ 是定位向量.

我们可以把 ω 写成形式

$$\omega = K du dv,$$

其中

$$K = \frac{\omega}{dudv} = a\frac{d(y,z)}{d(u,v)} + b\frac{d(z,x)}{d(u,v)} + c\frac{d(x,y)}{d(u,v)} \tag{46}$$

并且定义

$$\begin{aligned}\iint\limits_{S^*} \omega &= \iint\limits_{R^*} K du dv \\ &= \iint\limits_{R^*} \left(a\frac{d(y,z)}{d(u,v)} + b\,\frac{d(z,x)}{d(u,v)} + c\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right) du dv,\end{aligned} \tag{46a}$$

这样得到的在定向曲面 S^* 上的 ω 的积分值和 S^* 的特殊参数表示无关. 如果曲面还可以用参数 u', v' 表示出来, 我们有 (见 337 页)

$$\omega = K' du' dv',$$

其中

$$K' = K\frac{d(u,v)}{d(u',v')},$$

则在 u', v' 平面中积分区域 R'^* 的定向使得替换法则 (43a) 是适用的, 并且

$$\iint\limits_{R^*} K du dv = \iint\limits_{R'^*} K\frac{d(u,v)}{d(u',v')} du' dv' = \iint\limits_{R'^*} K' du' dv.'$$

例如, 设 S^* 可以非参数地表为形式 $z = f(x,y), x, y$ 在 S^* 到 x, y 平面的垂直投影 R^* 上变化. S^* 的定向决定 R^* 的一个定向. 当空间的定向是 x, y, z 坐标系的定向时, 可以用规定 S^* 的指向正侧的法向来描述 S^* 的定向. 当法向和 z 轴正向构成一个锐角时, R^* 的定向就是 x, y 坐标系的定向, 否则就是 y, x 坐标系的定

向[1]. 在随便哪种情形，我们有

$$\iint_{S^*} \omega = \iint_{S^*} (adydz + bdzdx + cdxdy)$$
$$= \iint_{R^*} (c - af_x - bf_y)dxdy.$$

现在就容易去掉要求整个曲面都有一个单一的参数表示这个特殊的假设了. 我们假定定向曲面 S^* 可以剖分成有限个定向部分 S_1^*, S_2^*, $\cdots$, S_N^*, 使得每一个部分具有前面讨论过的类型的参数表示. 根据前述定义我们构成每一部分上形式 ω 的曲面积分，而且把 S_i^* 上积分的和定义为 S^* 上的积分. 当然必须证明这样定义的 S^* 上的积分不依赖于 S^* 剖分成 S_i^* 的特殊的分法. 为使得这一事实是真的所需要的确切的假定以及证明见本章附录.

c. 定向曲面上微分形式的积分和非定向曲面上数量函数的积分之间的关系

在第四章 557 页中我们引进了空间曲面 S 的面积，而丝毫未牵涉到曲面的定向. 如果 S 有参数表示

$$x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v),$$

又如果 ξ, η, ζ 表示法向量的分量

$$\xi = \frac{d(y,z)}{d(u,v)}, \eta = \frac{d(z,x)}{d(u,v)}, \zeta = \frac{d(x,y)}{d(u,v)}, \tag{46b}$$

则 S 的面积由

$$A = \iint_R \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} dudv$$

给出，这里积分是展布在与 S 对应的 u, v 平面上的集合 R 上的. 积分了解为原来意义的重积分，在其中曲面元素

$$dS = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} dudv$$

---

1) 在第一种情形， S^* 与参数 x, y 有关，正法向 ζ 具有向量 $(-f_x, -f_y, 1)$ 的方向，因此， $\det(\zeta, \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v) > 0$.

是作为正量来处理的，或者等价地，在重积分中 R 是关于 u,v 坐标系的正定向给出的 [1)]. 对于 A 的定义而言，S 的可定向性是非本质的. 例如，读者容易用一个积分来表示由 724 页给出的参数表示的不可定向的曲面梅比乌斯带的总面积.

更一般地，对定义在曲面 S 上的函数 $f(x,y,z)$，我们可以建立 f 在该曲面上的积分

$$\iint_S f dS = \iint_R f\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}dudv. \tag{47a}$$

积分值不依赖于 S 所采用的特定的参数表示，而且也不包含曲面 S 的任何定向. 对于正的 f 积分值是正的.

为了把在定向曲面 S^* 上二阶微分形式

$$\omega = a(x,y,z)dydz + b(x,y,z)dzdx + c(x,y,z)dxdy$$

的积分和刚才定义过的在非定向曲面 S 上函数的积分联系起来，我们引进 S^* 的正法向的方向余弦

$$\cos\alpha = \frac{\varepsilon\xi}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}},$$
$$\cos\beta = \frac{\varepsilon\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}},$$
$$\cos\gamma = \frac{\varepsilon\zeta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}.$$

其中 ξ,η,ζ 由 (46b) 给出，而 $\varepsilon=\pm1, \Omega(S^*)=\varepsilon\Omega(\mathbf{X}_u,\mathbf{X}_v)$. 于是，由 (46)

$$K = \frac{\omega}{dudv} = \varepsilon(a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma) \times \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}.$$

---

1) 如果我们引进定位向量 $\mathbf{X}=(x,y,z)$，量 $\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$ 表示向量 $\mathbf{X}_u$ 和 $\mathbf{X}_v$ 的向量积的长度. 由 561 页 (30b) 它也可写作

$$\begin{aligned}\sqrt{EG-F^2} &= \sqrt{(\mathbf{X}_u\cdot\mathbf{X}_u)(\mathbf{X}_v\cdot\mathbf{X}_v)-(\mathbf{X}_u\cdot\mathbf{X}_v)^2}\\ &= \sqrt{[\mathbf{X}_u,\mathbf{X}_v;\mathbf{X}_u,\mathbf{X}_v]}.\end{aligned}$$

作为一个二阶替换微分形式，在正雅可比的参数替换下的微分 dS 具有同样的不变性质，但在负雅可比的替换下 (微分 dS) 改变符号.

现在，由 (46a),

$$\iint_{S^*} \omega = \iint_{R^*} K dudv = \varepsilon \iint_{R} K dudv,$$

因此，由 (47a) 得到等式

$$\begin{aligned}\iint_{S^*} \omega &= \iint_{S^*} adydz + bdzdx + cdxdy \\ &= \int_S (a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma) dS \\ &= \iint_R (a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma) \\ &\quad \times \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} dudv,\end{aligned} \tag{47b}$$

这把定向曲面 S^* 上微分形式 ω 的积分表示为非定向曲面 S 或者参数平面上非定向区域 R 上的积分. 然而在这里被积函数依赖于 S^* 的定向，因为 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 是 S^* 的指向 S^* 的正侧的法向 $\mathbf{n}$ 的方向余弦 (利用了关于 x, y, z 坐标系的正的空间定向).

如果定向曲面是由几个部分曲面 S_K^* 组成，允许每一个部分 S_K^* 有一个形为 (45) 的参数表示，我们把恒等式 (47b) 用到每一部分上去，并且把各个部分上的积分加起来，就得到在整个曲面 S^* 上 ω 的积分的同样的恒等式.

可以把指向 S^* 正侧的法向 $\mathbf{n}$ 的方向余弦与 x, y, z 在 $\mathbf{n}$ 方向上的导数等同起来:

$$\cos\alpha = \frac{dx}{dn},$$

$$\cos\beta = \frac{dy}{dn},$$

$$\cos\gamma = \frac{dz}{dn}.$$

因此

$$\iint_{S^*} \omega = \iint_S \left(a\frac{dx}{dn} + b\frac{dy}{dn} + c\frac{dz}{dn} \right) ds. \tag{47c}$$

用向量的记号，公式简化为

$$\iint\limits_{S^*} \omega = \iint\limits_{S} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} ds, \tag{47d}$$

其中 $\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 是位于 S^* 正侧的单位法向量，而 $\mathbf{V}$ 是分量为 a, b, c 的向量.

可以直观地用不可压缩流体的流动 (这次是三维空间中的流动) 来解释曲面积分的概念, 流体的密度取作 1. 设向量 $\mathbf{V} = (a, b, c)$ 是这种流动的速度向量. 那么在曲面 S^* 的每一点上积 $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$ 给出了在曲面法向 $\mathbf{n}$ 上的流体流动速度的分量. 所以，可以把表达式

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = (a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma) dS$$

与在单位时间内从 S^* 的负侧通过曲面元素 dS 流向正侧的流量 (当然这个量可以是负的)[1] 等同起来. 所以，曲面积分

$$\iint\limits_{S^*} (a dy dz + b dz dx + c dx dy) = \iint\limits_{S} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS \tag{48}$$

表示在单位时间内通过曲面 S^* 从负侧流向正侧的总流量. 这里我们注意到在流体运动的数学描述中曲面的正侧和负侧的区别, 也就是引入定向，起了重要的作用.

在另一种物理应用中，向量 $\mathbf{V}$ 表示作用在点 (x, y, z) 处的力场引起的力. 于是向量 $\mathbf{V}$ 的方向就给出了力的作用线的方向，而 $\mathbf{V}$ 的大小就给出了力的大小. 在这样解释时，积分

$$\iint\limits_{S^*} (a dy dz + b dz dx + c dx dy)$$

被称为从负侧到正侧通过曲面的总力流.

---

1) 参看 771 页上类似的二维解释. 这里我们考虑在一点的邻域曲面用一个面积为 ΔS 的平片来逼近, 而用一个常向量来代替速度向量 $\mathbf{V}$. 取适当的极限就得到通过 S^* 的流量的积分表示.

5.9 空间情形的高斯定理和格林定理

a. 高斯定理

曲面积分的概念能把我们在 685 页对二维情形证明过的高斯定理推广为三维高斯定理. 在二维定理的陈述中, 本质之点在于: 把平面区域上的积分化为围绕着区域边界的一个线积分. 现在我们考虑在 x, y, z 空间中由曲面 S 包围的一个闭有界三维区域, 每条和坐标轴平行的直线最多和曲面 S 交于两个点. 最后这个假定以后可以去掉.

设三个函数 $a(x,y,z), b(x,y,z), c(x,y,z)$ 及其一阶偏导数在 R 中连续. 我们考虑关于 x, y, z 坐标系定向为正的区域 R 上的积分

$$\iiint\limits_R \frac{\partial_c(x,y,z)}{\partial z} dxdydz,$$

区域 R 可以用不等式

$$z_0(x,y) \leq z \leq z_1(x,y)$$

来描述, 其中 (x,y) 在 R 在 x, y 平面上的投影 B 上变化, 我们假定 B 有面积以及 $z_0(x,y)$ 和 $z_1(x,y)$ 在 B 中连续且有连续的一阶导数. 我们可以借助于公式 (见 671 页)

$$\iiint\limits_R f dxdydz = \iint\limits_B dxdy \int_{z_0}^{z_1} f dz$$

来变换 R 上的体积分. 因为在这里 $f = \dfrac{\partial c}{\partial z}$, 关于 z 的积分可以积出来, 得到

$$\int_{z_0}^{z_1} \frac{\partial c}{\partial z} dz = c(x,y,z_1) - c(x,y,z_0) = c_1 - c_0,$$

所以

$$\iiint\limits_R \frac{\partial c(x,y,z)}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_B c_1 dxdy - \iint\limits_B c_0 dxdy.$$

如果我们假定边界 S 关于区域 R 是定向为正的，那么由定向边界曲面 S^* 中 $z=z_0(x,y)$ 上的点所组成的那部分曲面，当投影在 x,y 平面上时关于 x,y 坐标是定向为负的 [1)]，而由曲面的其余的点组成的 $z=z_1(x,y)$ 的部分具有正的定向. 因此把最后两个积分结合起来就构成在整个曲面 S^* 上的积分.

$$\iint\limits_{S^*} c(x,y,z)dxdy,$$

因此我们得到公式

$$\iiint\limits_{R} \frac{\partial c(x,y,z)}{\partial z}dxdydz = \iint\limits_{S^*} c(x,y,z)dxdy.$$

如果 S^* 包含垂直于 x,y 平面的柱面，那么公式仍然成立，因为柱面对于积分没有贡献. 例如，如果 S^* 的柱面部分 S'^* 具有表达式 $y=f(x)$, 我们就有 S'^* 的参数表示

$$x=u, \quad y=\phi(u), \quad z=v,$$

因此确实有

$$\iint\limits_{S^*} cdxdy = \iint c\frac{d(x,y)}{d(u,v)}dudv = \iint c\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \phi' & 0 \end{vmatrix}dudv = 0.$$

如果我们对分量 a 和 b 推导相应的公式并把三个公式加起来，我们就得到一般的公式

$$\iiint\limits_{R} \left[\frac{\partial a(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial b(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial c(x,y,z)}{\partial z}\right]dxdydz$$

$$= \iint\limits_{S^*} [a(x,y,z)dydz + b(x,y,z)dzdx + c(x,y,z)dxdy], \qquad (49)$$

---

1) 见 733 页，在 $z=z_0(x,y)$ 上正法向 (指向外边的法向) 是往下的.

这就叫做高斯定理. 利用 736 页的公式 (47b), 我们也可把这个公式写成

$$\iiint\limits_R (a_x + b_y + c_z)dxdydz = \iint\limits_S (a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma)dS$$
$$= \iint\limits_S \left(a\frac{dx}{dn} + b\frac{dy}{dn} + c\frac{dz}{dn}\right) dS. \tag{50}$$

这里, 相应于 S^* 关于 R 的正定向, 我们有外法向 $\mathbf{n}$ 和坐标轴正向的夹角 α, β, γ.

容易把这个公式推广到更一般的区域. 我们只要求区域 R 可以剖分成由有限个具有连续转动的切平面的子区域 R_i, 而每个 R_i 具有上面假定的性质 (特别是构成 R 的边界的曲面块或者和平行于坐标轴的直线最多交于两点或者是一个母线平行于某个坐标轴的柱面的一部分). 对每个区域 R_i 高斯定理成立. 把它们加起来, 在左端得到整个区域上的三重积分; 在右端, 某些曲面积分组合起来构成定向曲面 S^* 上的积分, 而其余的曲面积分 (也就是把 R 分割开来的那些曲面上的积分), 就像我们在平面情形中已经看到的那样 (688 页) 互相抵消了 [1].

作为高斯定理的一种特殊情形, 我们得到由关于 R 定向为正的曲面 S^* 包围的区域 R 的体积公式. 例如, 我们在 (49) 中令 $a = 0, b = 0, c = z$, 我们立即得到体积的表达式

$$V = \iiint\limits_R dxdydz = \iint\limits_{S^*} zdxdy.$$

---

1) 我们在这里对于一般区域 R 给出的证明中利用了闭曲面 S 上积分的定义, 实际上并没有证明积分不依赖于那种把 S 剖分成具有简单的参数表示的小曲面的特殊方法. 对于光滑的 S, 在附录 779 页中将证明 S 上的积分不依赖于剖分. 但是把高斯定理推广到上述更一般的区域 R 上时, 我们必须利用有棱而且不都是光滑的曲面 S_i 界住的子区域. 因此, 利用一种完全不同的证明技巧更方便, 这种技巧不是把 R 分解成不相交的子集合 R_i, R_i 不可能有光滑的边界. 单位分解方法就是这样一种方法, 事实上, 在单位分解方法中, R 表示成具有光滑边界的互相搭接的区域 R_i 的并集, 而对每个 R 可以直接利用定理. 见本章附录, 第 783 页至 786 页.

用同样方法，我们求得 [1)]

$$v = \iint_{S^*} xdydz = \iint_{S^*} ydzdx.$$

如果 $\mathbf{A}$ 是分量为 a, b, c 的向量， $\mathbf{A}$ 的散度为 $a_x + b_y + c_z$，而向量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{n}$ 的数积为

$$a\frac{dx}{dn} + b\frac{dy}{dn} + c\frac{dz}{dn}, \tag{51}$$

也就是向量 $\mathbf{A}$ 的法向分量. 因此，用向量的记号，高斯定理就变成 [2)]

$$\iiint_R div\mathbf{A}dxdydz = \iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}ds = \iint_S A_n dS. \tag{52}$$

用外微分形式构成高斯定理 (49) 更加引起人们的兴趣. 二阶微分形式

$$\omega = a(x,y,z)dydz + b(x,y,z)dzdx + c(x,y,z)dxdy$$

的导数 [见 (58c), 343 页] 正好是三阶形式

$$d\omega = (a_x + b_y + c_z)dxdydz.$$

用 S^* 来记关于 R 定向为正的 R 的边界，我们简单地有

$$\iiint_R \partial\omega = \iint_{S^*} \omega. \tag{53}$$

---

1) 值得指出在 V 的表达式中循环交换 x, y, z 不改变符号，与由一根定向曲线 C^* 包围的二维区域相应的面积公式

$$A = \int_{C^*} xdy = -\int_{C^*} ydx$$

大不相同.

这是因为在二维的情形把 x 正向和 y 正向互换后改变了平面的定向： $\Omega(x,y) = -\Omega(y,x)$ 而在三维空间中坐标的循环互换保持空间的定向

$$\Omega(x,y,z) = \Omega(y,z,x) = \Omega(z,x,y).$$

2) 注意在曲面积分中赋予 S 的定向只影响到被积函数.

到现在为止，我们假定三维区域 R 关于 x,y,z 坐标是定向为正的. 注意到 (53) 中的 ω 表示一个任意的二阶微分形式而且 ω 和 $d\omega$ 间的关系和所采用的坐标无关，我们就能去掉这个假定. 用 R^* 来表示空间的一个定向区域而用 ∂R^* 来记关于 R^* 定向为正的边界. 我们总能选一个使 R^* 是定向为正的 x,y,z 坐标系，所以 (53) 成立，其中 $S^* = \partial R^*$(见 731 页). 根据这个约定，对于 R^* 的任何定向，我们有

$$\iiint_{R^*} d\omega = \iint_{\partial R^*} \omega. \tag{53a}$$

我们将看到，实际上，对于更一般的任意维数的集合说来类似的公式是成立的 [1)].

练　习　5.9 a

1. 计算半个椭球面 $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1, z > 0$ 上的曲面积分

$$\iint \frac{z}{p} dS,$$

其中 $\frac{1}{p} = \frac{lx}{a^2} + \frac{my}{b^2} + \frac{nz}{c^2}, l, m, n$ 是外法向的方向余弦.

2. 计算中心在原点半径为 1 的球面上的曲面积分

$$\iint H dS,$$

其中 $H = a_1x^4 + a_2y^4 + a_3z^4 + 3a_4x^2y^2 + 3a_5y^2z^2 + 3a_6x^2z^2$.

b. 高斯定理在流体流动中的应用

---

1) 一般，对于 n 或更高维欧氏空间中一个 n 维定向集合，记号 ∂R^* 表示关于 R^* 定向为正的 R^* 的边界；即，∂R^* 这样定向，使得

$$\Omega(R^*) = \Omega(B, A^1, \cdots, A^{n-1}),$$

其中 $A^1, \cdots, A^{n-1}$ 是 ∂R^* 的边界上某点处的切向量，使得

$$\Omega(\partial R) = \Omega(A^1, A^2, \cdots, A^{n-1}),$$

其中 B 是一个向量切于该点且指向 R^* 的外部.

和平面情形一样，把向量 $\mathbf{A}=(a,b,c)$ 看作是密度为 ρ 的流体流动中的动量向量，其速度向量是 $\mathbf{V}=(u,v,w)$，我们可以得到空间中高斯定理的一个物理解释．这里 ρ 和速度分量 u,v,w 依赖于 (x,y,z) 和所考虑的时间 t.(单位体积内的) 动量向量由 $\mathbf{A}=\rho\mathbf{V}$ 确定．如果 R 是空间中由曲面 S 包围的一个固定的区域，则在单位时间内通过面积为 ΔS 的 S 的微元 (小曲面) 从 R 的内部流向外部的流体总质量由表达式 $\rho V_n\Delta S$ 近似地给出，其中 V_n 是速度向量 $\mathbf{V}$ 在微元某一点上的外法向 $\mathbf{n}$ 上的分量．因此，单位时间内通过 R 的边界 S 由内到外所流过的流体总量由在整个边界 S 上的积分

$$\iint\limits_S \rho V_n dS=\iint\limits_S A_n dS$$

给出．由高斯恒等式 (52) 在单位时间内 R 中通过 R 的边界流出的流量为

$$\iiint\limits_R \operatorname{div}\mathbf{A}dxdydz=\iiint\limits_R \operatorname{div}(\rho\mathbf{V})dxdydz. \tag{54}$$

另一方面，任何时刻 R 中的流体的总质量由三重积分

$$\iiint\limits_R \rho(x,y,z,t)dxdydz$$

给出，并且单位时间内 R 中流体质量的减少为

$$-\frac{d}{dt}\iiint\limits_R \rho(x,y,zt)dxdydz=-\iiint\limits_R \rho_t(x,y,z,t)dxdydz.$$

如果质量守恒定律成立，又若在 R 中没有质量的源和汇，那么从曲面 S 流出的 R 流体总量一定正好等于 R 中流体质量的减少．于是，任何时刻任何区域 R 上一定有

$$\iiint\limits_R \operatorname{div}(\rho\mathbf{V})dxdydz=-\iiint\limits_R \rho_t dxdydz.$$

等式两端除以 R 的体积并且让 R 收缩到一点 (也就是说，应用空间微商)，我们得到三维 连续性 方程

$$\operatorname{div}(\rho\mathbf{V}) = -\rho_t,$$

或

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0, \tag{55}$$

这是用微分方程的形式来表示的流体运动的 质量守恒定律.

如果质量守恒定律不成立，表达式

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{V})$$

是单位时间单位体积内所产生 (或者当这个量为负的时候，减少) 的总质量.

均匀不可压缩流体特别令人感兴趣，对这种流体，在每个空间位置上密度 ρ 的值相同并且不随时间变化. 由于 ρ 是常数，如果质量是守恒的，从 (55) 推得

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{56}$$

每当曲面 S 包围区域 R 时，从 (52) 得到

$$\iint_S \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}dS = 0. \tag{57}$$

特别地，考虑由空间中同一根定向曲线 c^* 界住的两个曲面 S_1 和 S_2，它们合在一起构成了三维区域 R 的边界. 从 (57)，我们发现

$$0 = \iint_S \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}dS = \iint_{S_1} \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}dS + \iint_{S_2} \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}dS, \tag{58}$$

其中在 S_1 和 S_2 上， $\mathbf{n}$ 都表示指向 R 外侧的法向量. 我们可以用如下方法使 S_1 和 S_2 成为定向曲面 S_1^* 和 S_2^*，使得关于 S_1^* 和 S_2^*, c^* 的定向都是正的. 在这两个曲面上，令 $\mathbf{n}^*$ 是指向正侧的单

位法向量. (对于空间右手系定向来说, 这就意味着 $\mathbf{n}^*$ 指向使 c^* 的定向为逆时针的 S 的那一侧). 那么在曲面 S_1, S_2 的一个上, 必须有 $\mathbf{n}^* = \mathbf{n}$, 而在另一曲面上有 $\mathbf{n}^* = -\mathbf{n}$ [1]. 从 (58) 得到

$$\iint_{S_1} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}^* dS = \iint_{S_2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}^* dS. \tag{59}$$

总之, 如果流体是均匀不可压缩的而且质量是守恒的, 那么流过具有相同边界曲线 c^* 的两个曲面 S_1,S_2 的流体的流量是相同的, 其中 S_1 和 S_2 合起来就包围空间中的一个三维区域. 流量不依赖于曲面的确切形式, 边界曲线 c^* 单独地决定流量这一点看来是似是而非的 [2]. 我们要问只通过曲线 c^* 怎么表示流体的 总量. 在下节 755–756 页通过斯托克斯定理来回答这个问题.

c. 高斯定理在空间力和曲面力上的应用

作用在连续体上的力既可以看作是空间力 (例如万有引力, 电力) 也可以看作是曲面力 (例如压力, 牵引力). 高斯定理给出了这两种看法之间的关系.

我们只考虑密度为 $\rho = \rho(x, y, z)$ 的流体中这样一种特殊类型的力, 在这种流体中存在压力 $p(x, y, z)$, 一般说 p 依赖于点 (x, y, z). 这就意味着由流体的一部分 R 的其余部分作用在 R 上的力可以看作是作用在 R 的表面 S 每一点的力, 力的方向沿内法线方向, 而单位表面面积上的大小为 p. 用 $\frac{dx}{dn}, \frac{dy}{dn}, \frac{dz}{dn}$ 表示 R 的表面 S 的点上 外法向 的方向余弦, 单位面积上力的分量由

$$-p\frac{dx}{dn}, -p\frac{dy}{dn}, -p\frac{dz}{dn}$$

1) 如果我们要求, 例如说, $\mathbf{n}$ 指向 S 的正侧, 那么法向量 $\mathbf{n}$ 在整个曲面 S 上决定一个定向. 关于 $\mathbf{n}$ 给 S_1, S_2 定了向, 如果我们要求曲线 C 关于 S_1 或 S_2 定向为正的, 那么曲线 C 就得到相反的方向 (见 728 页). 但是, 由于 C^* 关于 S_1 和 S_2 都具有正方向, 由此推出由 $\mathbf{n}^*$ 和 $\mathbf{n}$ 给出的定向只可能在两个曲面 S_1 和 S_2 中的一个上一致.

2) 如果我们进一步假定流动是 稳定的, 即速度向量 $\mathbf{V}$ 与时间无关, 则在单位时间内通过由闭曲线 C^* 界住的曲面的流量与时间无关.

给出. 因此作用在 R 上的表面力的合力是分量为

$$X=-\iint\limits_{S} p\frac{dx}{dn}dS,\quad Y=-\iint\limits_{S} p\frac{dy}{dn}dS,\quad Z=-\iint\limits_{S} p\frac{dz}{dn}dS$$

的力.

由 740 页的高斯定理 (50), 我们可以把 X,Y,Z 写成体积分

$$X=-\iiint\limits_{R} p_x dxdydz,\ Y=-\iiint\limits_{R} p_y dxdydz,\ Z=-\iiint\limits_{R} p_z dxdyd.$$

用向量记号, 合力 $\mathbf{F}$ 由

$$\mathbf{F}=-\iiint\limits_{R} \mathrm{grad} p dxdydz, \tag{60}$$

给出.

我们可以把这个结果表示如下. 由于压力 p 引起的流体中的力一方面可以看作是密度为 $p(x,y,z)$ 通过点 (x,y,z) 垂直作用于每个曲面微元上的表面力 (压力), 另一方面可以看作是体力, 也就是体密度为 $-\mathrm{grad}\, p$ 作用在每个体元上的力.

如果在由于压力引起的力和万有引力的作用下流体处于平衡中, 向量 $\mathbf{F}$ 必须和作用在 R 内的全部引力 $\mathbf{G}$ 相平衡:

$$\mathbf{F}+\mathbf{G}=0.$$

如果作用在点 (x,y,z) 处的单位质量上的引力用向量 $\Gamma(x,y,z)$ 给出, 则我们有

$$G=\iiint\limits_{R} \Gamma\rho dxdydz.$$

从对于流体的任何部分都成立的关系式, 通过空间微商, 我们推出对于被积函数相应的关系式也成立, 也就是在流体的每一点处, 方程

$$-\mathrm{grad} p+\rho\Gamma=0 \tag{61}$$

成立. 因为数量函数的梯度垂直于该数量函数的等位面, 我们得出结论: 对于在压力和重力作用下处于平衡的流体来说, 作用在压力为常数的曲面 (等压面) 每一点上的引力垂直于该曲面. 如果我们作出通常的假定, 在地球表面附近, 作用在单位质量上的重力由向量 $\Gamma = (0, 0, -g)$ 给出, 其中 g 是重力加速度, 我们从 (61) 得到 [1)]

$$p_x = 0, p_y = 0, p_z = -g\rho. \tag{62}$$

特别, 考虑一个由压力为 0 的 自由表面 包围的密度 ρ 为常数的均匀液体. 沿着自由表面, 根据 (62), 我们有

$$0 = dp = p_x dx + p_y dy + p_z dz = -g\rho dz.$$

因此, $dz = 0$, 这就是说 自由表面一定是一张平面 $z =$ 常数 $= z_0$. 对于液体中的任何一点 (x, y, z), 压力值为

$$p(x, y, z) = -\int_z^{z_0} p_z(x, y, \zeta) d\zeta = g\rho(z_0 - z).$$

因此在深度 $z_0 - z = h$ 处压力值为 $g\rho h$. 对于一个部分或全部浸没在液体中的固体, 令 R 表示固体的位于自由表面以下的那部分. 为了确定作用在固体上的总压力 [2)], 我们把公式 (60) 用到区域 R 上去. 从 (60) 和 (62) 我们得到, 作用在固体上的压力的合力等于分量为

$$X = 0, Y = 0, Z = \iiint\limits_R g\rho dx dy dz$$

的一个力 (浮力 buoyancy), 这个力是垂直向上的而且其大小等于被排开的同体积的液体的重量 (阿基米德原理).

1) 这个公式是在卷一 254 页中, 在说明大气中的压力变化时, 推导出来的.

2) R 的位于平面 $z = z_0$ 中的边界的任何部分不作出贡献, 因为根据假定, 在那里 $p = 0$.

d. 分部积分和三维空间中的格林定理

正如两个自变量的情形 (696 页) 一样，把 740 页的高斯定理 (50) 用到积 au, bv, cw 上去就导出了一个分部积分公式:

$$\iiint_R (au_x + bv_y + cw_z)dxdydz$$

$$= \iint_S \left(au\frac{dx}{dn} + bv\frac{dy}{dn} + cw\frac{dz}{dn}\right) dS$$

$$- \iiint_R (a_x u + b_y v + c_z w)dxdydz. \tag{63}$$

如果这里 $u = v = w = U$ 又若 a, b, c 的形式是 $a = V_x, b = V_y, c = V_z$, 其中 V 是某个数量函数，则我们得到第一格林定理

$$\iiint_R (U_x V_x + U_y V_y + U_z V_z)dxdydz$$

$$= \iint_S U\frac{dV}{dn}dS - \iiint_R U\Delta V dxdydz. \tag{64}$$

这里我们用到了由

$$\Delta V = V_{xx} + V_{yy} + V_{zz}$$

定义的熟悉的 Laplace 算子的符号 Δ, 并且用 $\frac{dV}{dn}$ 来表示 V 的外法向导数

$$\frac{dV}{dn} = V_x\frac{dx}{dn} + V_y\frac{dy}{dn} + V_z\frac{dz}{dn}.$$

在公式 (64) 中交换 U 和 V, 并与 (64) 相减，得到第二格林定理

$$\iiint_R (U \Delta V - V \Delta U)dxdydz$$

$$= \iint_S \left(U\frac{dV}{dn} - V\frac{dU}{dn} \right) dS. \qquad (65)$$

e. 应用格林定理把 $\triangle U$ 变换成球坐标的形式

如果我们在格林定理 (65) 中令 $V=1$, 我们得到

$$\iiint_R \triangle U dxdydz = \iint_S \frac{dU}{dn} dS = \iint_S (\text{grad } U) \cdot n dS. \qquad (66)$$

正如平面情形那样, 我们可以利用这个公式把 $\triangle U$ 变换到另一个坐标系中去, 特别是变换到由

$$x = r\cos\phi\sin\theta, y = r\sin\phi\sin\theta, z = r\cos\theta$$

定义的球坐标 r, ϕ, θ 中去, 我们把公式 (66) 应用到由形为

$$r_1 < r < r_2, \phi_1 < \phi < \phi_2, \theta_1 < \theta < \theta_2 \qquad (67)$$

的不等式表示的楔形区域 R 上去. R 的边界 S 由六个面组成, 在每一个面上坐标 r, ϕ, θ 中的一个等于常数. 应用三重积分的变换公式把方程 (66) 的左端写成形式

$$\iiint_R \triangle U dxdydz = \iiint \triangle U \frac{d(x,y,z)}{d(r,\theta,\phi)} drd\theta d\phi$$

$$= \iiint \triangle U r^2 \sin\theta drd\theta d\phi. \qquad (68)$$

其中在 r, θ, ϕ 空间中的积分是展布在区域 (67) 上. 为了变换 (66) 中的曲面积分, 我们引进定位向量

$$\mathbf{X} = (x, y, z) = (r\cos\phi\sin\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\theta)$$

并注意到它的一阶导数满足关系

$$\mathbf{X}_r \cdot \mathbf{X}_\theta = 0, \mathbf{X}_\theta \cdot \mathbf{X}_\phi = 0, \mathbf{X}_\phi \cdot \mathbf{X}_r = 0 \qquad (68a)$$

$$\mathbf{X}_r \cdot \mathbf{X}_r = 1, \mathbf{X}_\theta \cdot \mathbf{X}_\theta = r^2, \mathbf{X}_\phi \cdot \mathbf{X}_\phi = r^2 \sin^2\theta. \tag{68b}$$

从这些关系得出，在每一点处向量 $\mathbf{X}_r$ 是垂直于通过该点的坐标曲面 $r=$ 常数的，向量 $\mathbf{X}_\theta$ 垂直于曲面 $\theta=$ 常数，而向量 r_ϕ 垂直于曲面 $\phi=$ 常数，更确切地说，在曲面 $r=$ 常数 $=r_i$(其中 i 的取值或为 1 或为 2) 中的一个曲面上的单位外法线向量 $\mathbf{n}$ 就是 $(-1)^i\mathbf{X}_r$. 因此，在这些面上

$$(\mathrm{grad}U)\cdot\mathbf{n} = (-1)^i(\mathrm{grad}U)\cdot\mathbf{X}_r = (-1)^i\frac{\partial U}{\partial r}.$$

而且，沿曲面 $r=r_i$ 利用 θ 和 ϕ 作为参数，我们有面积元的表达式 [见 562 页 (30e)]

$$\begin{aligned} dS =& \sqrt{EG-F^2}d\theta d\phi \\ =& \sqrt{(X_\theta\cdot X_\theta)(X_\phi\cdot X_\phi)-(X_\theta\cdot X_\phi)^2}d\theta d\phi \\ =& r^2\sin\theta d\theta d\phi, \end{aligned}$$

由此得到两个面 $r=r_1$ 和 $r=r_2$ 对 $\dfrac{dU}{dn}$ 在 S 上的积分的贡献是用表达式

$$\iint_{r=r_2} r^2\sin\theta\frac{\partial U}{\partial r}d\theta d\phi - \iint_{r=r_1} r^2\sin\theta\frac{\partial U}{\partial r}d\theta d\phi$$

表示出来的，其中积分是在矩形

$$\theta_1<\theta<\theta_2, \quad \phi_1<\phi<\phi_2$$

上求积的. 我们可以把这两个积分的差写成展布在区域 (67) 上的三重积分

$$\iiint \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial U}{\partial r}\right)drd\theta d\phi.$$

类似地，我们在面 $\theta=$ 常数 $=\theta_i$ 上求得

$$\begin{aligned} &\mathbf{n} = (-1)^i\frac{1}{r}\mathbf{X}_\theta, dS = r\sin\theta d\phi dr, \\ &\frac{dU}{dn} = \frac{(-1)^i}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}, \end{aligned}$$

而在面 $\phi=$ 常数 $=\phi_i$ 上

$$\mathbf{n}=(-1)^i\frac{1}{r\sin\theta}\mathbf{X}_\phi, dS=rdrd\theta,$$
$$\frac{dU}{dn}=\frac{(-1)^i}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\phi}.$$

这里也把对面的 $\theta=$ 常数或 $\phi=$ 常数的面上的贡献结合进去，我们求得整个曲面积分的表达式

$$\iint_S\frac{dU}{dn}dS=\iiint\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial U}{\partial r}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\phi}\right)\right]drd\theta d\phi.$$

与 (68) 式相比较，除以楔 R 的体积，并令 R 收缩到一点，就导致我们所要的球坐标形式的 Laplace 算子

$$\triangle U=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial U}{\partial r}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\phi}\right)\right\}. \tag{69}$$

练 习 5.9 e

1. 设方程

$$x_i=x_i(p_1,p_2,p_3)\quad(i=1,2,3)$$

确定一个任意的正交坐标系 p_1,p_2,p_3; 即，如果我们令

$$a_{ik}=\frac{\partial x_i}{\partial p_k},$$

则方程

$$a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}+a_{13}a_{23}=0,$$

$$a_{11}a_{31}+a_{12}a_{32}+a_{13}a_{33}=0,$$

$$a_{11}a_{31}+a_{12}a_{32}+a_{13}a_{33}=0$$

都成立.

(a) 证明

$$\frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(p_1,p_2,p_3)}=\sqrt{e_1e_2e_3}.$$

其中

$$e_i=a_{1i}^2+a_{2i}^2+a_{3i}^2.$$

(b) 证明

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_k}=\frac{1}{e_i}\frac{\partial x_k}{\partial p_i}=\frac{1}{e_i}a_{ki}.$$

(c) 利用高斯定理，用 p_1,p_2,p_3 把

$$\triangle u=u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}+u_{x_3x_3}$$

表示出来.

(d) 把 $\triangle u$ 用 280 页 3.3d 节练习 9 中定义的焦点 (focal) 坐标 t_1,t_2,t_3 表示出来.

5.10 空间斯托克斯定理

a. 定理的叙述和证明

我们早就知道二维的斯托克斯定理 (694 页). 三维中类似的定理把一个向量的旋度的法向分量在曲面上的积分和这个向量的切向分量在这个曲面的边界曲线上的积分联系起来. 在二维情形中，通过改变表示方法，高斯定理和格林定理互相转化，但在三维情形这是两个本质上不同的定理.

设 S 是三维空间中的一个由闭曲线界住的可定向曲面. 选择 S 的一个定向把 S 变成一个定向曲面 S^*. 设 C^* 是 S^* 的关于 S^* 正定向的边界曲线. 假定空间关于 x,y,z 坐标系是正定向的，令 $\mathbf{n}$

表示在 S^* 上每一点处指向 S^* 正侧的单位法向量 [1] 设 $\mathbf{t}$ 是 C^* 上的指向与 C^* 的定向相对应的切向量. 设 $\mathbf{A}=(a,b,c)$ 是一个定义在 $\mathbf{S}$ 附近的向量, 斯托克斯定理断言 [2]

$$\iint_S (\mathrm{curl}\mathbf{A})\cdot\mathbf{n}dS=\int_C \mathbf{A}\cdot\mathbf{t}dS. \tag{70}$$

用 $\frac{dx}{dn},\frac{dy}{dn},\frac{dz}{dn}$ 来记向量 $\mathbf{n}$ 的分量, 而用 $\frac{dx}{dS},\frac{dy}{dS},\frac{dz}{dS}$ 来记 $\mathbf{t}$ 的分量, 我们把斯托克斯定理写成形式 [3]

$$\iint_S\left[(c_y-b_z)\frac{dx}{dn}+(a_z-c_x)\frac{dy}{dn}+(b_x-a_y)\frac{dz}{dn}\right]dS$$
$$=\int_c\left(a\frac{dx}{dS}+b\frac{dy}{dS}+c\frac{dz}{dS}\right)dS. \tag{71}$$

利用公式 (47c), 736 页, 等价地, 我们有公式

$$\iint\limits_{s^*}(c_y-b_z)dydz+(a_z-c_x)dzdx+(b_x-a_y)dxdy$$
$$=\int_{C^*}adx+bdy+cdz. \tag{72}$$

引进一阶微分形式

$$L=adx+bdy+cdz \tag{73a}$$

和

$$\omega=(c_y-b_z)dydz+(a_z-c_x)dzdx+(b_x-a_y)dxdy, \tag{73b}$$

我们注意到 (见 321 页) ω 正好是 L 的导数:

$$\omega=dL. \tag{73c}$$

---

1) 事实上这就意味着, 当我们把 S^* 上的一个点这样地 —— 使得 $\mathbf{n}$ 和正 z 轴重合 —— 移动到原点的时候, S 上的旋转方向将是取正 x 轴到正 y 轴的 $90°$ 旋转的方向.

2) 对 $S,C,\mathbf{A}$ 确切的正则性假定 —— 在这种假定下能够证明该定理 —— 在本章附录中给出.

3) 见 227 页 (94c) 向量的旋度的定义.

如果 ∂S^* 是 S^* 的正定向边界 [1)]，斯托克斯定理简单地变为

$$\iint_{S^*} dL = \int_{\partial S^*} L. \tag{74}$$

这种形式完全类似于 741 页写成公式 (53) 的高斯定理.

从平曲面的情形的斯托克斯定理早就得到证明这一事实，马上可以作出结论: 斯托克斯定理的正确性似乎是没有问题的了. 因此, 如果 S 是由平面多角形组成的多面角曲面，使得边界曲线是一个多角形，我们可以把斯托克斯定理应用到每个平面部分，并把相应的公式加起来. 在这过程中，沿多面体内棱上的线积分消去了，我们立即得到对于多面角曲面的斯托克斯定理. 为了得到斯托克斯定理的一般陈述，对于由任意曲线 C 界住的任意曲面 S, 通过做一个近似的多面角曲面，只要取极限就行了.

但是这种取极限的严格的证明将是麻烦的，所以，在做了这些启发性的注解后，我们这样来完成证明，通过把整个曲面变换到一张平曲面上去并且指出在这种变换下定理还对.

我们假定 S 有一个参数表示 [2)]

$$x = \phi(u,v), y = \psi(u,v), z = \chi(u,v).$$

其中 ϕ, ψ, χ 是有连续的一阶导数的函数. 对于 ϕ, ψ, χ, 分量为

$$\xi = \frac{d(y,z)}{d(u,v)}, \eta = \frac{d(z,x)}{d(u,v)}, \zeta = \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \tag{75}$$

的向量不等于零向量. 假定 u, v 平面上存在一个由一根闭有向曲线 Γ^* 界住的有向集合 Σ^*, 使得 Σ^* 被双方单值地映射到曲面 S^* 上，并且 Γ^* 被映射到 C^* 上 [3)].

1) 对于 $n = 2$ 的情形，这和第 727 页脚注的一般定义一致.

2) 在本章的附录里将对更一般的 S 证明这个定理，那里 S 可以由几块具有所提到的类型的参数表示的曲面拼接而成.

3) 若 (ξ, η, ζ) 具有 $-\mathbf{n}$ 的方向，则我们有 $\Omega(\Sigma^*) = \Omega(u,v)$; 若 (ξ, η, ζ) 具有 $\mathbf{n}$ 的方向，则我们有 $\Omega(\Sigma^*) = -\Omega(u,v)$. 在任何一种情形下曲线 Γ^* 关于 Σ^* 都是正定向的见 728 页.

于是 L 决定了 du 和 dv 的一个微分形式:

$$\begin{aligned}L =&a(x_u du + x_v dv) + b(y_u du + y_v dv) + c(z_u du + z_v dv)\\ =&(ax_u + by_u + cz_u)du + (ax_v + by_v + cz_v)dv\end{aligned}$$

并且

$$\int_{C^*} L = \int_{\Gamma^*} L.$$

其中右边的 L 取作由 du 和 dv 表示出来的形式. 类似地, ω 产生了一个用 du 和 dv 表示的二阶形式,

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{\omega}{dudv}dudv\\ &= [(c_y - b_z)\xi + (a_z - c_z)\eta + (b_x - a_y)\zeta]dudv\end{aligned}$$

并且再一次有

$$\iint_{S_*} \omega = \iint_{\Sigma_*} \omega,$$

而且, 如同我们在 353 页所证明的那样, 关系式 $\omega = dL$ 不依赖于自变量 x, y, z 或 u, v 的选取 [1). 因此, 恒等式 (74) 的证明已被化为包含 du 和 dv 的一阶微分形式 L 和一个在 u, v 平面上边界为 Γ^* 的区域 Σ^* 的情形. 既然已经知道在 u, v 平面上, 斯托克斯定理是成立的, 那就推得对于曲面 S 也成立.

斯托克斯定理回答了早先提出的问题, 对于一个给定的 $\mathrm{div}\mathbf{V}=0$ 的向量场 $\mathbf{V}(x, y, z)$, 我们已经知道在具有单位法向量 $\mathbf{n}$ 的曲面 S 上的积分

$$\iint_S \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}dS$$

1) 这也可以通过证明恒等式

$$\begin{aligned}&(c_y - b_z)\xi + (a_z - c_x)\eta + (b_x - a_y)\zeta\\ &\quad= (ax_v + by_v + cz_v)_u - (ax_u + by_u + cz_u)_v\end{aligned}$$

直接得到验证, 其中 ξ, η, ζ 由 (75) 定义.

只依赖于 S 的边界曲线 C 而不依赖于 S 的特殊的性质. 另一方面, 在 345 页我们发现散度为 0 的向量场 $\mathbf{V}$ 可以表为一个向量 $\mathbf{A}=(a,b,c)$ 的旋量 —— 至少, 如果我们只限于定义在棱边平行于坐标轴的平行六面体上的向量, 情形是这样的. 现在, 斯托克斯定理使我们可以把

$$\iint\limits_S \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}dS=\iint\limits_S(\mathrm{curl}\mathbf{A})\cdot\mathbf{n}dS$$

表成形式

$$\int_C \mathbf{A}\cdot\mathbf{t}dS,$$

这个积分只涉及到 S 的边界曲线.

练　习　5.10 a

1. 设

$$I=\iint\limits_{S^*} zdxdy-xdydz.$$

其中 S^* 是球盖 $x^2+y^2+z^2=1, x>\dfrac{1}{2}$ 关于指向无穷的法向是正定向的.

(a) 利用 y,z 作为 S^* 的参数直接计算 I.

(b) 从 754 页的斯托克斯公式 (74), 并观察到

$$zdxdy-xdydz=dL,$$

其中

$$L=-yzdx-xydz,$$

来计算 I.

b. 斯托克斯定理的物理解释

三维斯托克斯定理的物理解释和已经给出的二维斯托克斯定理的物理解释 713 页相似. 我们再次把向量场 $\mathbf{V}=(v_1,v_2,v_3)$ 解释为流体流场的速度. 我们把定向闭曲线 C^* 上的积分

$$\int_C \mathbf{V}\cdot\mathbf{t}dS=\int_{C^*} v_1dx+v_2dy+v_3dz$$

称为沿这条曲线的**环量**. 斯托克斯定理说: 沿 C^* 的环量等于积分

$$\iint\limits_S (\mathrm{curl}\mathbf{V})\cdot\mathbf{n}dS,$$

其中 S 是任何一张由 C 界住的可定向曲面, 而 $\mathbf{n}$ 是 S 上的单位法向量, 这样选 $\mathbf{n}$ 使得由 $\mathbf{n}$ 和 C^* 的旋转方向决定的螺旋方向和 x,y,z 坐标系的方向 (右手系或左手系) 相同. 假定我们用 C 所界住的曲面 S 的面积去除沿 C 的环量, 并且令 C 在曲面上收缩到一点时取极限. 对于 $\mathrm{curl}\mathbf{V}$ 的法向分量除以面积的极限, 这个空间微分的过程给出了在极限点处 $(\mathrm{curl}\mathbf{V})\cdot\mathbf{n}$ 的值. 所以我们看到可以把 $\mathrm{curl}\mathbf{V}$ 在曲面法向 $\mathbf{n}$ 上的分量看作是曲面上相应点处流体的**特殊的环量或环流密度**[1].

向量 $\mathbf{V}$ 称为流体运动的旋度. 于是, 沿 C 的环量等于旋度的法向分量在由 C 界住的曲面上的积分. 如果在流体的每一点上旋度向量等于 0, 也就是速度向量满足关系式

$$\frac{\partial v_3}{\partial y}-\frac{\partial v_2}{\partial z}=0,\ \frac{\partial v_1}{\partial z}-\frac{\partial v_3}{\partial x}=0,\ \frac{\partial v_2}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial y}=0.$$

那么流体的运动就叫做**无旋的**. 作为斯托克斯定理的一个推论, 无旋运动的环量沿任何曲线都等于 0, 该曲线 C 界住一个在流体区域中的曲面.

---

1) 这种考虑也说明向量的旋度不依赖于坐标系, 从而只要坐标系的定向 (因此向量 $\mathbf{n}$) 不改变, 则向量的旋度的本身就是一个向量.

如果我们把向量 $\mathbf{V}$ 解释成为场或电力场，那么线积分

$$\int_{C^*} \mathbf{V} \cdot \mathbf{t} ds$$

表示当质点沿曲线 C^* 的定向所指的方向走过 C^* 时场所做的功. 根据斯托克斯定理这个功的表达式可以变换成一个由 C 界住的曲面 S 上的积分，被积函数是力场旋度的法向分量. 如果力场的旋度等于 0, 则力场对从一点出发又回到该点的质点所作的功等于 0, 这种场叫做 **保守场**.

从斯托克斯定理我们得到空间线积分的主要定理 (113 页) 的一个新证明. 主要问题是：如果积分

$$\int \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} dS = \int a dx + b dy + c dz$$

绕任何闭曲线均等于 0, 那么如何描述向量场 $\mathbf{A} = (a, b, c)$ 的性质. 只要 C 是 $\mathbf{A}$ 有定义的区域中的曲面 S 的边界，斯托克斯定理给出了如下事实的一个新证明，即若 $\text{curl}\mathbf{A} = 0$, 则线积分一定等于 0. 所以， $\text{curl}\mathbf{A}$ 等于 0—— 或，我们将要说的， $\mathbf{A}$ 的 **无旋** 性—— 是绕任何界住位于 $\mathbf{A}$ 的定义域中的曲面 S 的闭曲线上 $\mathbf{A}$ 的切向分量的曲线积分为 0 的一个充分条件. 我们早就知道这个条件是必要的. 如果条件 $\text{curl}\mathbf{A} = 0$ 满足，我们就能把 $\mathbf{A}$ 表为一个函数 $f(x, y, z)$ 的梯度:

$$\mathbf{A} = \text{grad} f.$$

如果我们把 $\mathbf{A}$ 取作流体流动的速度向量 $\mathbf{V}$, 在一个单连通区域中流体的无旋性，即方程 $\text{curl}\mathbf{V} = 0$, 蕴涵着存在一个 **速度势** $f(x, y, z)$, 使得

$$\mathbf{V} = \text{grad} f.$$

此外，如果流体是均匀并且不可压的，我们有 (744 页) 关系

$$\text{div}\mathbf{V} = 0.$$

在这种情况就得到速度势 f 满足方程

$$0 = \text{div grad} f = \triangle f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}.$$

这就是以前早就碰到过的拉普拉斯方程.

练　习　5.10 b

1. 设 φ, a 和 b 是参数 t 的连续可微函数，$0 \leq t \leq 2\pi, a(2\pi) = a(0), b(2\pi) = b(0), \varphi(2\pi) = \varphi(0) + 2n\pi$($n$ 是有理整数), 又设 x, y 是常数，把方程

$$\xi = x\cos\varphi - y\sin\varphi + a, \eta = x\sin\varphi + y\cos\varphi + b$$

解释为平面闭曲线 Γ(关于参数 t) 的参数方程，试证明

$$\frac{1}{2}\int_\Gamma (\xi d\eta - \eta d\xi) = A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D,$$

其中

$$\begin{aligned}
&A = \frac{1}{2}\int d\varphi, B = \int_\Gamma (a\cos\varphi + b\sin\varphi) d\varphi, \\
&C = \int_\Gamma (-a\sin\varphi + b\cos\varphi) d\varphi, \\
&D = \frac{1}{2}\int_\Gamma (adb - bda).
\end{aligned}$$

2. 设一张刚性的平面 P 相对于和它重合的一张固定平面 π 作一个封闭的运动，P 上每一点 M 将画出 π 上的一条闭曲线，该闭曲线所围面积的代数值为 $S(M)$, $2n\pi$(n 是有理整数) 表示 P 关于 π 的总旋转次数. 试证明下列结论:

(a) 如果 $n \neq 0$, 则在 P 中有一点 C, 使得对于 P 的一切其它的点 M, 有

$$S(M) = \pi n \overline{CM}^2 + S(C);$$

(b) 如果 $n=0$, 则可能出现两种情形: 第一种情形, P 中有一条定向线 $\triangle$, 使得对于 P 的一切点 M

$$S(M)=\lambda d(M),$$

其中 $d(M)$ 是 $\triangle$ 到 M 的距离而 λ 是一个正常数因子; 或第二种情形, 对于平面 P 上所有的点 $M, S(M)$ 的值相同 (Steiner 定理).

3. 刚性线段 AB 在平面 π 上作一个封闭的连杆运动: B 作一个中心在 C 的闭逆时针圆周运动, 而 A 在过 C 的直线上作一个 (闭的) 直线运动. 应用上述例子的结果, 决定由刚性地连在 AB 上的点 M 在 π 上描出的闭曲线所包围的面积.

4. 刚性线段 AB 的端点 A 和 B 在一条闭凸曲线 Γ 上作一个完全的旋转. AB 上有一点 M, 那里 $AM=a, Mb=b$, 作为这个旋转的结果画出一条闭曲线 Γ'. 证明曲线 Γ 和 Γ' 之间的面积等于 πab(Holditch 定理).

5. 试证明: 如果我们对一根被扭弯的, 闭的刚性曲线的每一个微元, 在主法线向量 (第二章, 230 页) 的方向上作用一个大小为 $\dfrac{dS}{\rho}$ 的力, 则曲线 Γ 保持平衡; $\dfrac{1}{\rho}$ 是 Γ 在 dS 的曲率, 且假定它在 Γ 的每一点有限且连续. (由刚体的静力学原理, 我们必须证明

$$\int_\Gamma \frac{\mathbf{n}}{\boldsymbol{\rho}} dS=0, \int_\Gamma \frac{\mathbf{X}\times\mathbf{n}}{\rho} dS=0.$$

其中 $\mathbf{n}$ 表示 Γ 在 dS 的单位主法线向量, 而 $\mathbf{X}$ 是 dS 的定位向量.)

6. 试证明: 在封闭的刚性曲面 Σ 的表面的所有微元上的向内的均匀压力的作用下, Σ 保持平衡. (如果我们用 $\mathbf{n}'$ 表示曲面微元 $d\sigma$ 的指向内部的单位法向量, 而用 x 表示 $d\sigma$ 的定位向量, 则本命题的陈述等价于向量方程

$$\iint_\Sigma \mathbf{n}' d\sigma=0, \iint_\Sigma \mathbf{X}\cdot\mathbf{n}' d\sigma=0.)$$

7. 由曲面 Σ 包围的体积为 V 的刚体完全浸没在比重为 1 的流体中. 试证明作用在该刚体上流体压力的静力效应和作用在体积

V 的形心 C 上垂直向上的大小为 V 的单个的力所引起的效应是一样的.

8. 设 p 表示从椭球面 Σ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

的中心到点 $P(x,y,z)$ 处的切平面的距离而 dS 表示 P 点处的面积元素. 试证明关系式

(i)

$$\iint_{\Sigma} p dS = 4\pi abc,$$

(ii)

$$\iint_{\Sigma} \frac{1}{p} dS = \frac{4\pi}{3abc}(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2).$$

成立.

9. 普通的平面角是用它的两条边截圆心在角的顶点的单位圆的弧长来度量的. 对于由顶点在 A 的圆维面所界住的主体角来说可以把这种思想推广如下: 根据定义, 立体角的大小等于它在以 A 为心的单位球面上所截取的面积. 因此区域 $x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$ 的立体角是 $4\pi/8=\dfrac{\pi}{2}$. 现在设 Γ 是一条闭曲线, Σ 是由 Γ 界住的曲面, 而 A 是在 Γ 和 Σ 外边的一个固定点. 在 Σ 的点 M 处的面积元素 dS 定义了一个顶点在 A 的基本锥, 而且通过一个初等的论证容易求得该锥的立体角是

$$\frac{\cos\theta}{r^2}dS.$$

其中 $r=AM$ 而 θ 是向量 $\overline{AM}$ 和 Σ 在 M 点的法向之间的夹角. 按照 θ 是钝角还是锐角来决定这个基本立体角是正还是负. 试把曲面积分

$$\Omega=\iint_{\Sigma}\frac{\cos\theta}{r^2}dS$$

从几何上解释为一个立体角并证明

$$\Omega = \iint_{\Sigma} \frac{(a-x)dydz + (b-y)dzdx + (c-z)dxdy}{[(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2]^{3/2}},$$

其中 (a,b,c) 和 (x,y,z) 分别是 A 和 M 的笛卡尔坐标.

10. 首先，试直接证明然后利用把积分解释为一个立体角来证明

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dxdy}{(x^2+y^2+1)^{3/2}} = 2\pi.$$

11. 试证明整个单叶双曲面 $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) - (z^2/c^2) = 1$ 对向它的中心 (0,0,0) 的立体角是

$$8c\int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}{a^2b^2 + b^2c^2\cos^2\varphi + a^2c^2\sin^2\varphi}}d\varphi.$$

12. 试证明：只要曲面 Σ 的边界 Γ 保持固定，则积分

$$\Omega = \iint_{\Sigma} \frac{(a-x)dydz + (b-y)dzdx + (c-z)dxdy}{[(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2]^{3/2}}$$

的值不依赖于 Σ 的选取. 通过在曲面外边的积分，从这个结果证明，如果 Σ 是闭曲面，则按照 $A(a,b,c)$ 在由 Σ 所围的体积的里面或在该体积的外面， $\Omega = 4\pi$ 或 0.

13. 设曲面 Σ 由闭曲线 Γ 界住并把积分

$$\Omega(a,b,c) = \iint_{\Sigma} \frac{(a-x)dydz + (b-y)dzdx + (c-z)dxdy}{r^3},$$

$$[r^2 = (a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2],$$

看作 a,b,c 的函数. 试证明 Ω 的梯度的分量可以表成下列线积分:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial a} = \int_{\Gamma} \frac{(z-c)dy - (y-b)dz}{r^3},$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial b} = \int_{\Gamma} \frac{(x-a)dz - (z-c)dx}{r^3},$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial c} = \int_{\Gamma} \frac{(y-b)dx - (x-a)dy}{r^3}.$$

在电磁学中，可以把这些有重要解释的公式表示为下面的向量方程

$$\text{grad } \Omega = -\int_{\Gamma} \frac{\mathbf{X} \times d\mathbf{X}}{|\mathbf{X}|^3},$$

其中 $\mathbf{X}$ 是分量为 $(x-a),(y-b),(z-c)$ 的向量.

14. 验证表达式

$$\frac{-4xydx + 2(x^2 - y^2 - 1)dy}{(x^2 + y^2 - 1)^2 + 4y^2}$$

是线段 $-1 \leq x \leq 1, y = 0$ 对向点 (x,y) 的角度的全微分. 利用这个事实，通过一个几何论证，证明下列结果：设 Γ 是 x,y 平面上不通过 $(-1,0)$ 和 $(1,0)$ 的一条定向闭曲线. 设 p 是从上半平面 $y>0$ 到下半平面 $y<0$ 穿过线段 $-1<x<1, y=0$ 的次数，而 $\mathbf{n}$ 表示从 $y<0$ 到 $y>0$ 穿过该线段的次数. 则

$$\theta = \int_{\Gamma} \frac{-4xydx + (x^2 - y^2 - 1)dy}{(x^2 + y^2 - 1) + 4y^2} = 2\pi(p - n).$$

因此，如果在极坐标系中 Γ 是曲线 $r = 2\cos 2\theta (0 \leq \theta \leq 2\pi)$，则 $\theta = 0$.

15. 考虑 x,y 平面上的单位圆周

$$x' = \cos\varphi, y' = \sin\varphi, z' = 0 \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

用 Ω 来记圆盘 $x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$ 对向点 $p = (x,y,z)$ 所张的立体角. 现在令 P 画出一条不与圆周 C 相交的定向闭曲线 Γ. 设 p 是从上半平面 $z>0$ 到下半平面 $z<0$ Γ 穿过圆盘 $x^2+y^2<1, z=0$ 的次数，而 n 是从 $z<0$ 到 $z>0$ Γ 穿过该盘的次数. 如果 P 从 Γ 上 $\Omega = \Omega_0$ 的 P_0 点出发，则描画 Γ(而 Ω 随 P 点连续变化) 的 P 点将回到 P_0 点，这时 $\Omega = \Omega_1$. 试用几何的论证证明

$$\Omega_1 - \Omega_0 = \int_{\Gamma} d\Omega = 4\pi(p - n).$$

利用上面找到的向量方程

$$\mathrm{grad}\Omega=-\int_{\sigma}\frac{\overrightarrow{PP'}\times\overrightarrow{dP'}}{|\overrightarrow{PP'}|^3}(习题13)$$

证明

$$\int_C\int_\Gamma\frac{1}{|PP'|^3}\begin{vmatrix}x'-x & dx & dx'\\ y'-y & dy & dy'\\ z'-z & dz & dz'\end{vmatrix}$$

$$=\int_\Gamma\int_C\{[(x'-x)(dydz'-dzdy')+(y'-y)(dzdx-dxdz')$$

$$+(z'-z)(dxdy'-dydz')]/[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{3/2}\}$$

$$=4\pi(p-n).$$

[属于高斯的这个双重线积分给出了 Γ 被 C 围绕的圈数. 应注意, 如果两条曲线 Γ 和 C(设想为两根弦) 是分离的. 则这个双重线积分等于零是曲线 Γ 和 C 分离的必要条件, 但不是充分条件, 就像图 5.13 所示的例子, 在那里 $p=n=1$, 但是 Γ 和 C 不能分离.]

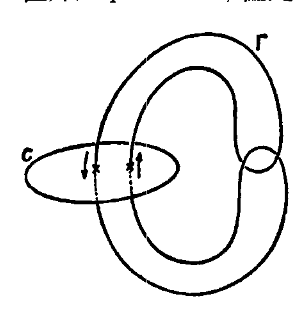


图 5.13

16. 设 Γ 是一条空间闭曲线, 在它上面规定了曲线作法的一个确定的定向. 试证明: 存在一个向量 $\mathbf{a}$ 具有下列特性: 对于任何单位向量 $\mathbf{n}$, 数积 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}$ 等于 Γ 在垂直于 $\mathbf{n}$ 的平面 π 上的正交投影所围的面积的代数值. (注意 $\mathbf{n}$ 给出了 π 的定向而 Γ 给出了 Γ 在 π

上的投影的定向.）特别，Γ 在任何平行于 $\mathbf{a}$ 的投影的代数面积为 0.(可以把向量 $\mathbf{a}$ 叫做 Γ 的面积向量.)

17. 设 $f(x,y)$ 是具有一阶和二阶连续导数的连续函数. 试证明：如果

$$f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2\neq 0,$$

则变换

$$u=f_x(x,y), v=f_y(x,y), \omega=-z+xf_x(x,y)+yf_y(x,y)$$

有唯一的逆变换，其形式为

$$\begin{aligned}&x=g_u(u,v),\quad y=g_v(u,v),\\&z=-w+ug_u(u,v)+vg_v(u,v).\end{aligned}$$

18. 把引力向量场

$$\begin{aligned}X&=\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},\\Y&=\frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},\\Z&=\frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\end{aligned}$$

表为一个旋度.

5.11 高维积分恒等式

前节讨论过的高斯公式和斯托克斯公式都可以被看作是微积分基本定理

$$\int_a^b f'(x)dx=f(b)-f(a) \tag{76}$$

在高维情形的推广. 该定理表示单变量函数的导数在一个区间上的积分可以通过函数在区间的边界点的函数值表示出来. 用类似的方法，高斯定理

$$\iiint\limits_R (f_x+g_y+h_z)dxdydz$$

$$= \iint_S \left(f\frac{dx}{dn} + g\frac{dy}{dn} + h\frac{dz}{dn} \right) dS \tag{77}$$

($\mathbf{n}$= 外法向) 表示集合 R 上的积分用在 R 的边界上所取的量表示. 写成向量形式, 用 $\mathbf{A} = (f, g, h)$, 散度定理变成

$$\iiint_R \mathrm{div}\mathbf{A} dxdydz = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS.$$

显然, 表达式 $\mathrm{div}\mathbf{A}$ 起着在简单公式 (76) 中导数 f' 的作用.

另外, 在三维的情形我们得到通过边界积分来表示曲线和曲面上的微分表示式的积分的公式. 所考虑的曲线积分的形式为

$$\int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} dS, \tag{78}$$

($\mathbf{t}$= 曲线 C 的单位切向量) 而曲面积分的形式为

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS,$$

($\mathbf{n}$= 曲面 S 的单位法向量). 如果这些类型的积分可表为只包含 C 或 S 的边界点的形式, 则对向量 $\mathbf{A}$ 必须加上限制. 理由是三维空间中可以有许多有共同的边界的曲线和曲面. 用只在边界上的函数的积分来表示一个恒等式蕴涵着积分不依赖于所选取的特殊的曲线和曲面, 因而这只能是特殊类型的向量 $\mathbf{V}$ 的情形.

因此, 我们就发现, 如果 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{t}$ 在曲线 C 上的线积分只依赖于 C 的端点 P 和 Q, 则向量场 $\mathbf{A}(x, y, z)$ 必须是**无旋的**: 即 $\mathrm{curl}\mathbf{A} = 0$. 如果这个条件在包含 C 的一条单连通集上得到满足, 我们可以求得一个数量函数 $U = U(x, y, z)$ 使得 $\mathbf{A} = \mathrm{grad}U = (U_x, U_y, U_z)$; 在这种情况下, 我们确实有一个我们想要的类型的不等式

$$\int_c \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} dS = \int_C dU = U(Q) - U(P).$$

类似地, 若要曲面积分

$$\iint_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$$

只依赖于 S 的边界曲线 C 向量 $\mathbf{A}$ 必须满足必要条件 [1] $\operatorname{div}\mathbf{A}=0$. 如果条件 $\operatorname{div}\mathbf{A}=0$ 得到满足，我们就能把 $\mathbf{A}$ 表成形式 $\mathbf{A}=\operatorname{curl}\mathbf{B}$ (见 345 页) 而且通过斯托克斯定理用 C 上的一个积分来表示曲面 S 上 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}$ 的积分

$$\iint\limits_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}dS=\iint\limits_S(\operatorname{curl}\mathbf{B})\cdot\mathbf{n}dS=\int_C\mathbf{B}\cdot\mathbf{t}dS. \tag{79}$$

从这些例子人们期望存在更一般的公式，这些公式把 M 维欧氏空间中 m 维集合上的函数的导数的适当的组合的积分表为函数在该集合的 $(m-1)$ 维边界上的积分. 当 $m=M$ 时，高斯定理 (77) 提供了一个明显的推广：

$$\iint\limits_R\cdots\int(f^1_{x_1}+f^2_{x_2}+\cdots+f^M_{x_M})dx_1\cdots dx_M$$

$$=\int_S\cdots\int\left(f^1\frac{dx_1}{dn}+\cdots+f^M\frac{dx_M}{dn}\right)dS.$$

这里 R 是 M 维空间中由带有向外指的法向量 $\mathbf{n}$ 的 $(M-1)$ 维超曲面 S 界住的一个集合，而 $f^1,f^2,\cdots,f^M$ 是 $x_1,\cdots,x_M$ 的函数. 另一方面形为 (79) 的斯托克斯公式没有这种类似的推广. 但是**外微分形式**或叫做**交替的微分形式**的微积分直接把人们导至以下猜测，即对任意 $(m-1)$ 阶微分形式和任意带有适当定向的 $(m-1)$ 维边界 ∂S^* 的 m 维定向曲面 S^* 有**一般的斯托克斯公式**

$$\int\limits_{S^*}\cdots\int d\omega=\int\limits_{\partial S^*}\cdots\int\omega. \tag{80}$$

1) 假定在任意曲面上 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}$ 的重积分只依赖于 S 的边界 C, 那么对于任何两个具有共同边界的曲面而言，积分是相同的，如果我们相容地定义在两个曲面上 $\mathbf{n}$ 的方向的话 (即，使得当一个曲面光滑地变到另一个曲面，则法向量 $\mathbf{n}$ 变到另一个曲面上相应的法向量. 在两个曲面一起构成空间中集合 R 的边界 σ 的情形，如果 $\mathbf{N}$ 表示 σ 的指向 R 外边的单位法向量，则在 σ 上 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{N}$ 的积分是 0. 由散度定理就得到在 R 上 $\operatorname{div}\mathbf{A}$ 的积分等于 0. 因为 R 是任意的，通过空间微商我们发现 $\operatorname{div}\mathbf{A}=0$.

在本章的附录中，我们将不利用任何超出在严格证明特殊情形的 (77) 和 (79) 时已经提出的那些概念之外的新概念来证明一般的公式 (80).

附　录　曲面和曲面积分的一般理论

对高斯定理和斯托克斯定理以及它们在高维情形的推广的严格证明需要对曲面，曲面的定向以及在曲面上的积分这些概念进行更为仔细的分析. 这就是本附录提供的内容.

A.1 三维空间中的曲面和曲面积分

a. 基本曲面

基本曲面本质上是由第一卷 367 页所定义的简单弧的类似物. 它们构成了构造结构更复杂的曲面的建筑块.

x, y, z 空间中的一个基本曲面 σ 是由三个函数

$$x = f(u,v), y = g(u,v), z = h(u,v) \tag{1a}$$

参数表示的点 $P = (x, y, z)$ 的集合，其中

(1) 函数的定义域 U 是 u, v 平面上的一个有界开集;

(2) f, g, h 在 U 中连续且具有连续的一阶导数;

(3) 对 U 的一切点满足不等式

$$\begin{aligned} W &= \sqrt{\begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} g_u & g_v \\ h_u & h_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} h_u & h_v \\ f_u & f_v \end{vmatrix}^2} \\ &= \sqrt{(f_u g_v - f_v g_u)^2 + (g_u h_v - g_v h_u)^2 + (h_u f_v - h_v f_u)^2} \\ &> 0; \end{aligned} \tag{1b}$$

以及

(4) 从 u, v 平面上的集合 U 到 x, y, z 空间的集合 σ 上的映射是 1-1 的，并且从 σ 到 U 上的逆映射也是连续的.

量 W 代表分量为

$$A = g_u h_v - g_v h_u, B = h_u f_v - h_v f_u, C = f_u g_v - f_v g_u \tag{2}$$

的向量的长度，它是两个向量

$$(f_u, g_u, h_u) \text{和} (f_v, g_v, h_v) \tag{3}$$

的向量积. (3) 中的两个向量是与曲面相切的, 而向量 (A, B, C) 是垂直于这两个向量的, 因此垂直于曲面. 方程 (1b) 保证了只有两个方向垂直于曲面, 它们就是向量 (A, B, C) 及其反向量 $(-A, -B, -C)$.

在 σ 的每一个点，三个量 A, B, C 中至少有一个不为零. 例如说, 如果相应于 U 中参数点 (u_0, v_0) 在点 $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ 处 $C \neq 0$, 对于充分小的正数 ε, 我们可以求得一数 $\delta > 0$, 使得每一对满足

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \tag{4}$$

的 (x, y) 可以唯一地表成形式

$$x = f(u, v), y = g(u, v), \tag{5}$$

其中

$$\sqrt{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2} < \varepsilon. \tag{6}$$

由 x, y 决定的 u, v 的值是函数

$$u = \phi(x, y), v = \psi(x, y), \tag{7}$$

这些函数对于满足 (4) 的 x, y 是连续的且有连续一阶导数. 按照 (u, v) 对 P 的连续依赖性的假定，我们知道充分靠近 P_0 的曲面 σ 上的每一点 P 有满足 (6) 式的参数 (u, v). 而且，如果 P 到 P_0 的距离 $< \delta$, 则 P 的坐标将满足 (4). 因此，对 σ 上所有充分靠近 P_0 的 P, 我们可通过 (7) 由 x, y 来表示参数值 u, v. 把这些值代入方程 $z = h(u, v)$, 我们就得到一个**非参数表示**

$$z = h(\phi(x, y), \psi(x, y)) = H(x, y). \tag{8}$$

把它可应用于曲面 σ 的所有充分靠近 P_0 的点上去. 如果量 B 不为 0, 则我们类似地得到一个形为 $y = G(x,y)$ 的局部表示, 而在 $A \neq 0$ 的情形得到一个形为 $x = F(x,y)$ 的表示式.

同一个基本曲面 σ 有许多不同的参数表示, 然而, 所有这些表示都以一种简单的方式联系着. 设

$$\bar{x} = \bar{f}(\bar{u},\bar{v}), \bar{y} = \bar{g}(\bar{u},\bar{v}), \bar{z} = \bar{h}(\bar{u},\bar{v}) \quad \text{对} \quad \bar{U} \text{ 中的 } (\bar{u},\bar{v}) \tag{9}$$

是 σ 的第二个满足我们所有四个条件的参数表示. 那么在 U 和 σ 之间以及 $\bar{U}$ 和 σ 之间的双向唯一且双向连续的对应建立了集合 $\bar{U}$ 到集合 U 上的一个 1-1 的具有连续的逆映射的连续映射:

$$u = \alpha(\bar{u},\bar{v}), v = \beta(\bar{u},\bar{v}), \quad \text{对} \quad \bar{U} \quad \text{中的} \quad (\bar{u},\bar{v}), \tag{10}$$

这里, 如果与 $\bar{U}$ 中某点 $(\bar{u}_0,\bar{v}_0)$ 相应的值 (u_0,v_0) 使得量 $C(u_0,v_0)$ 不等于 0, 则表示式 (7) 应用到靠近 (u_0,v_0) 的所有 (u,v) 上去, 我们从 (9) 便得到

$$\begin{aligned} u &= \alpha(\bar{u},\bar{v}) = \phi(\bar{f}(\bar{u},\bar{v}),\bar{g}(\bar{u},\bar{v})) \\ v &= \beta(\bar{u},\bar{v}) = \psi(\bar{f}(\bar{u},\bar{v}),\bar{g}(\bar{u},\bar{v})) \end{aligned}$$

对所有充分靠近 $(\bar{u}_0,\bar{v}_0)$ 的 $(\bar{u},\bar{v})$ 成立. 因为 ϕ,ψ,f,g 都是具有连续一阶导数的函数, 由此推出描述参数变化 (10) 的 α,β 不仅是连续的而且同样有连续的一阶导数.

令

$$\triangle = \frac{d(u,v)}{d(\bar{u},\bar{v})} = \frac{\partial\alpha}{\partial\bar{u}}\frac{\partial\beta}{\partial\bar{v}} - \frac{\partial\alpha}{\partial\bar{v}}\frac{\partial\beta}{\partial\bar{u}} \tag{11}$$

从两个映射乘积的雅可比的法则, 我们求得

$$\bar{C} = \frac{d(x,y)}{d(\bar{u},\bar{v})} = \frac{d(x,y)}{d(u,\bar{v})} \cdot \frac{d(u,v)}{d(\bar{u},\bar{v})} = C\,\triangle\,. \tag{12a}$$

类似地, 求得

$$\bar{B} = B\triangle, \bar{A} = A\triangle \tag{12b}$$

特别，我们发现在两个参数区域间的映射 (10) 的雅可比不等于 0，因为由 (12a.b)

$$\begin{aligned}\overline{W} &= \sqrt{\bar{A}^2+\bar{B}^2+\bar{C}^2} = \sqrt{\triangle^2(A^2+B^2+C^2)} \\ &= |\triangle| W,\end{aligned} \tag{13}$$

又根据假定，故 $\bar{W} \neq 0$.

当然对于 $\bar{u}, \bar{v}$ 用 u, v 来表示的同样的陈述也是正确的. 重要的事实是**同一个基本曲面的两个参数系统间的关系式满足我们在证明面积和积分的变换法则时所加的一切假定**.

b. 函数在基本曲面上的积分

在一个基本曲面 σ 的点 P 上定义的连续函数 F 的概念是不会有什么困难的. 我们正是要求对每个 $p \in \sigma$ 以下列方式对应一个值 $F = F(P)$, 使得对于收敛到 σ 的点 P 的 σ 上的点列 P_n, 我们有

$$\lim_{n\to\infty} F(P_n) = F(P)$$

在任何特殊的参数表示 (1a) 中， F 变成在定义域 U 中的 u, v 的函数，而 F 在 σ 上的连续性等价[1] 于 F 作为 u, v 的函数的连续性.

这里我们只限于讨论在 σ 的某个紧 (即闭且有界的) 子集 S 外为 0 的 σ 上的连续函数，那么，对应的参数点 (u, v) 构成 U 的一个紧[2] 子集 S. 然后我们由公式

$$\iint_\sigma F dA = \iint FW dudv \tag{14}$$

来定义 F 在初等曲面 σ 上的积分，其中 W 是由 (1b) 给出的表达式. 这里 FW 是 u, v 的连续函数，对于 S 外边的 (u, v), 我们定义

1) 这里我们利用了 σ 和 U 之间的关系式的双向连续的性质.

2) 对于 $(u_n, v_n) \in S$ 和 $(u_n, v_n) \to (u, v), \sigma$ 的对应点 P_n 位于 S. S 的紧致性蕴涵着 P_n 的一个子序列收敛到 S 的一个点 P. 由连续性， P_n 收敛到 P 蕴涵着 (u_n, v_n) 收敛到在 S 中对应的参数点. 因此， $(u, v) \in S$, 这就证明了 S 是闭的. 作为有界集 U 的子集 S 是有界的.

FW 为 0; 因此, FW 是可积的. 还必须证明由 (14) 定义的 F 在 σ 上的曲面积分不依赖于特殊的参数表示 (1.a). 这可以从 W 的变换法则以及在 u, v 到 $\bar{u}, \bar{v}$ 的变量替换下的二重积分替换的一般公式立即推得. 确实

$$\iint FW dudv = \iint FW \left|\frac{d(u,v)}{d(\bar{u},\bar{v})}\right| d\bar{u}d\bar{v}$$
$$= \iint FW|\triangle|d\bar{u}d\bar{v} = \iint F\overline{W}d\bar{u}d\bar{v}.$$

FW 的积分不依赖于特殊的参数表示意味着**微分形式** $Wdudv = dA$ 是不变的; 可以把它看成和**面积元素**一样.

容易把基本曲面上积分的概念推广到更一般的函数上去. 尽管我们在后面没有这样做. 这包括把若尔当可测性的概念推广到其闭包包含在初等曲面 σ 中的集合 S 上去, 我们只要求在参数平面上点 (u, v) 的相应的集合 S 是一个其闭包位于 U 中的若尔当可测集. 从不同参数表示之间的关系式立即可看出 S 的若尔当可测性不依赖于特殊的参数表示 [1]. 对于 S 的面积同样的结论成立, 我们可以把 S 的面积定义为

$$A(S) = \iint_S dA = \iint_S Wdudv.$$

特别重要的是其闭包位于 σ 上而面积为 0 的集合 S. 它们相应于 u, v 平面上面积为 0 的集合 S; 这就意味着可以用有限块包含在 U 中其总面积可任意小的正方形来盖住 S.

c. 定向基本曲面

基本曲面 σ 的一个特殊的参数表示 (1a) 叫做定义了 σ 的一个特殊的**定向** (关于 u, v 坐标系是正的那个定向). 如果雅可比

$$\frac{d(\bar{u},\bar{v})}{d(u,v)}$$

---

1) 见第四章附录 A.3.

在整个参数定义域上是正的，就说同一个基本曲面 σ 的两组参数集合给出了 σ 的相同的定向，如果雅可比在整个参数定义域上是负的，就说它们给出了相反的定向. 把基本曲面 σ 和一个特殊的定向结合起来就叫做一个定向基本曲面 σ^*.

根据我们的假定，雅可比不能为 0. 因为它也是参数的一个连续函数，我们可以确信当参数定义域是一单连通集时它是定号的. 这时一个基本曲面 σ 只有两个可能的定向，可以把它们区别为 σ^* 和 $-\sigma^*$. 但是，显然对于非连通集可能有的定向数目就更大了，在那里与 U 的不同部分相对应的 σ 的部分的定向可以被彼此无关地改变.

基本曲面的定向与 σ 上的法方向的选取或 σ 的 "侧的区分" 密切相关. σ 的一个特殊的参数表示通过公式 (2) 在每个点 P 定义了量 A, B, C, 它可以看作是在 P 点垂直于 σ 的一个向量的分量. 这个向量和分量为

$$\xi=\frac{A}{W}, \eta=\frac{B}{W}, \zeta=\frac{C}{W} \tag{15}$$

的单位向量具有相同的方向. 当我们从 u, v 到 $\bar{u}, \bar{v}$ 改变参数时，量 A, B, C 也变化着，而且根据定律 (11) 和 (12a) 由成比例的量 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ 所代替，这里比例因子正好是量

$$\triangle=\frac{d(u, v)}{d(\bar{u}, \bar{v})}.$$

因此，单位法向量 (ξ, η, ζ) 对于 σ 的相同的定向是相同的，而对于相反的定向则是相反的. 意义上与此相当的是，σ^* 的定向在每一点选出了 σ 的确定的一侧，即，法向量 (ξ, η, ζ) 所指的一侧 [1].

σ^* 的定向还可以赋予位于 σ 上的每条简单闭曲线以一个确定的方向，其方法是把与 C 对应的位于 u, v 平面中的闭曲线 γ 关于由 γ 围起来的有限区域的正方向取作 C 的方向.

---

1) 这是 σ^* 的正侧，它依赖于 x, y, z 坐标系的定向，见第 5 章，按照 (40p) 所采用的记号，我们有 $\Omega(\sigma^*)=\Omega(u, v)$.

当我们用微分形式

$$\omega = adydz + bdzdx + cdxdy \tag{16}$$

的积分，其中 a, b, c 是 σ 上的连续函数且在一个有界闭子集外等于 0，来代替形为 $\iint FdA$ 的积分时 (其中 F 是一个数量函数)，必须有一个对基本曲面的定向的详细说明. 这里，由替换公式提出的这个积分的自然的解释当然是

$$\begin{aligned}\iint\limits_{W} &= \iint \left[a\frac{d(y,z)}{d(u,v)} + b\frac{d(z,x)}{d(u,v)} + c\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right] dudv \\ &= \iint (aA + bB + cC)dudv \\ &= \iint (a\xi + b\eta + c\zeta)W dudv \\ &= \iint (a\xi + b\eta + c\zeta)dA.\end{aligned}$$

其中我们已经用了关系式 (15) 和 (14). 这里，ξ, η, ζ 是通过选择参数 u, v 而决定的法向量的方向余弦；它们的符号依赖于我们的曲面 σ 的定向. 因此，我们首先来定义在由 σ 引起的 **定向** 曲面中的一个定向曲面上 ω 的积分. 我们令

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\sigma^*} \omega &= \iint \left[a\frac{d(y,z)}{d(u,v)} + b\frac{d(z,x)}{d(u,v)} + c\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right] dudv \\ &= \iint (a\xi + b\eta + c\zeta)dA,\end{aligned} \tag{17}$$

其中 u, v 必须是用来定义 σ^* 的定向的参数系中的一个或者是通过一个雅可比为正的代换与这样一个参数系有关系的一个参数系，而且这里的 ξ, η, ζ 是由 σ^* 的定向导出的法方向. 如果 $-\sigma^*$ 是具有相反定向的基本曲面，我们有

$$\iint\limits_{-\sigma^*} \omega = -\iint\limits_{\sigma^*} \omega. \tag{18}$$

d. 简单曲面

设 σ 是一个带有参数表示 (1a) 的基本曲面, 其中参数点 (u,v) 在开集 U 上变化. 如果 U' 是 U 的一个开子集. 限制在 U' 上参数为 (u,v) 的 σ 上的点显然构成一个包含在 σ 中的基本曲面 σ'. 实际上, 利用同样的参数 u,v 我们的全部四个条件马上可以用到 σ' 上去. 作为例子, 我们注意到给定点 (x_0,y_0,z_0) 的距离 $<\varepsilon$ 的 σ 的点再次构成一个基本曲面 (如果不空的话), 因为那些是参数值 u,v 满足

$$[f(u,v)-x_0]^2+[g(u,v)-y_0]^2+[h(u,v)-z_0]^2<\varepsilon^2 \tag{19}$$

的点, 又因为 f,g,h 是 U 中的连续函数, 所以这种点构成的集合 U' 是开集.

包含在基本曲面 σ 中的最一般的基本曲面 σ' 可以通过把 σ 的参数定义域限制在一个适当的开集上得到这个事实不是那么显然的.

为了证明这个事实, 设对于 $(u,v)\in U$ 基本曲面 σ 具有参数表示 (1a). 设 σ' 是 $(\bar{u},\bar{v})$ 在集合 $\bar{U}$ 上变化的带有参数表示 (9) 的一个基本曲面. 设 σ' 是 σ 的一个子集. 则每一个 $(\bar{u},\bar{v})\in\bar{U}$ 决定一点 $P\in\sigma$, 而 P 又决定一点 $(u,v)\in\bar{U}$, 它的坐标是 $\bar{u},\bar{v}$ 的函数

$$u=\alpha(\bar{u},\bar{v}),v=\beta(\bar{u},\bar{v}),\text{对于}(\bar{u},\bar{v})\in\bar{U}. \tag{20}$$

(20) 把集合 $\bar{U}$ 映到 U 的子集 U' 上, 那么通过把参数点 (u,v) 限制在 U 的子集 U' 上, 显然从 σ 产生集合 σ'. 余下来只要证明 U' 是开的. 设 $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ 是 σ' 中分别与 $\bar{U}$ 中的参数点 $(\bar{u}_0,\bar{v}_0)$ 和 U' 中的参数点 (u_0,v_0) 相对应的点. 设 C 和 $\bar{C}$ 在该点都异于 0 [1]. 于是

$$x=\bar{f}(\bar{u},\bar{v}),y=\bar{g}(\bar{u},\bar{v})$$

1) 如果必要的话, 对 x,y,z 空间作一个适当的旋转, 我们可以假定所有三个量 $\bar{A},\bar{B},\bar{C}$ 在 P_0 都 $\neq 0$. 至少量 A,B,C 中的一个量在 P_0 不为 0; 设它就是 C.

把 $(\bar{u}_0, \bar{v}_0)$ 的一个邻域映到 x, y 平面上的一个集合上，该集合盖住 (x_0, y_0) 点的一个邻域；那么从 (7) 得到的对应点 (u, v) 盖住了 (u_0, v_0) 的一个邻域，由此可见 U' 是一个开集.

此外，我们看到在 P_0 的一个充分小的邻域中两个曲面 σ 和 σ' 是一致的，因为充分靠近 P_0 的 σ 上的每个 P 具有任意靠近 (u_0, v_0) 的参数值；因此，对于充分靠近 P_0 的 P 我们有 $(u, v) \in U'$，因为 (u_0, v_0) 是 U' 的一个内点，因此我们看到 $P \in \sigma'$. 我们已经证明了：

如果基本曲面 σ' 包含在基本曲面 σ 中，又如果 P_0 是 σ' 的一点，则我们可以找到 P_0 点的一个充分小的邻域，在这邻域中 σ 和 σ' 是一致的.

加在基本曲面 σ 上的任何定向立即在任何包含在 σ 中的基本曲面 σ' 上决定一个唯一的定向. 我们只要把 σ' 归诸于定义 σ 的定向的同一个参数系，并取这个参数系来决定 σ' 的定向.

现在我们能给出简单曲面 —— 作为由基本曲面"拼补在一起"而成的一个物体 —— 的更一般概念的确切的意义.

x, y, z 空间中的一个集合 τ 被称为一张简单曲面，如果对于 τ 上的每一点 P_0，存在 $\varepsilon > 0$，使得 τ 的与 P_0 距离小于 ε 的点构成一个基本曲面.

因此，对于每个 $P_0 \in \tau$，存在一个基本曲面 σ，它在 P_0 附近和 τ 一致，而且包含在 τ 中. 我们可以证明包含在简单曲面 τ 中的两个基本曲面的交还是一个基本曲面 (如果不空的话)，因为如果 P_0 是 σ' 和 σ'' 的一个公共点，我们可以求得 P_0 的一个 ε- 邻域 N_ε，使得 $\sigma = N_\varepsilon \cap \tau$ 是一个基本曲面. 这里，σ 包含两个基本曲面 $N_\varepsilon \cap \sigma'$ 和 $N_\varepsilon \cap \sigma''$. 因此在所有充分靠近 P_0 的点处，σ' 和 σ'' 与 σ 一致，因而 σ' 和 σ'' 一致. 如果 σ' 是关于参数 (u, v) 的 (基本曲面)，而且 u_0, v_0 对应于 P_0，则充分靠近 (u_0, v_0) 的所有 (u, v) 将对应到位于 σ'' 的 σ' 的点. 因此，对应到 $\sigma' \cap \sigma''$ 中点 (x, y, z) 的参数点 (u, v) 构成一个开集，因此，$\sigma' \cap \sigma''$ 是一个基本曲面.

类似地，我们定义一个定向简单曲面：

如果简单曲面 τ 表为一些基本曲面的并集，它们中的每一个都已赋予定向，只要在这些基本曲面中任意两个的交中其定向是一致的话，就说简单曲面 τ 被定了向. τ 的两个定向被认为是一样的，如果对于在定义 τ 的定向时采用的定向基本曲面中的任意两个曲面的公共点处，τ 的这两个定向导致相同的定向. 等价地，两个定向是一样的，如果它们导致在 τ 的每个点处的法方向的同样的选取的话.

当简单曲面 τ 是 x,y,z 空间中集合 R 的边界时出现了一种特别重要的情形. 这里，我们假定 R 是一个有界开集的闭包 [1]. 这时，我们可以对 τ 指定一个定向，对此定向由 τ 的每个法向的定向指定的正方向是“指向 R 外部”的那个方向或者是“外法向”的那个方向. 实际上，对于 τ 上的每一点 $P_0=(x_0,y_0,z_0)$，我们可以找到一个邻域，在此邻域里 τ 和一个基本曲面一致. 我们甚至可以选一个如此小的邻域，使得 τ 可以在那个邻域中非参数地表示出来，比如说，用对于 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\varepsilon^2$ 成立的方程

$$z=F(x,y) \tag{21}$$

表示出来. 如果空间中两点 P 和 P' 可以用一条不包含 R 的边界 τ 的点的弧连起来的话，那么或者两点都在 R 中或者两点都不在 R 中，对于满足

$$F(x,y)<z<F(x,y)+\delta, \qquad (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\varepsilon^2 \tag{22a}$$

或者满足

$$F(x,y)-\delta<z<F(x,y), \qquad (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\varepsilon^2 \tag{22b}$$

的任何两点，只要 δ 是充分小的正数，显然，就是这种情况. 因此，集合 (22a) 和 (22b) 中的每一个，或者完全包含在 R 中，或者和 R

1) 这意味着 R 是闭且有界的，并且 R 的每个边界点是内点的极限.

没有公共点. 它们不可能都包括在 R 中, 因为如果是那样的话, 由于 R 是闭的, 所以集合 (21) 也应属于 R; 但 P_0 不是 R 的边界点. 又因为 P_0 不可能是 R 的内点的极限, 所以两个集合都不可能在 R 的外面. 因此, 集合 (22a) 和 (22b) 中恰好有一个是包含在 R 中的. 如果 (22b) 是包含在 R 中的集合, 我们选取参数 $u = x, v = y$ 来指定基本曲面 (21) 的一个定向, 记

$$x = u, y = v, z = F(u, v),$$

相应的法方向有方向余弦 [见 (2) 和 (15)]

$$\xi = -\frac{Fu}{W}, \eta = -\frac{Fv}{W}, \zeta = \frac{1}{W}.$$

因为 $\zeta > 0$, 曲面上任何点处的法向在如下意义下指向 R 的外边, 这个意义是指曲面 (21) 一点的法向量上的任何充分靠近该曲面的点将位于集合 (22a) 中, 因此在 R 的外边. 类似地, 如果集合 (22a) 属于 R, 我们用参数表示

$$x = v, y = u, z = F(u, v)$$

来定义 (21) 的定向, 这导致 $\zeta = -1/W < 0$, 从而再次选出指向 R 外的法向量.

因此我们已经把 τ 表为定向简单曲面的并, 这里由于与集合 R 有关的定向的几何意义, 在相搭接的简单曲面中定向是一致的. 我们称 τ 关于 R 是正定向的 [1].

e. 单位分解以及在简单曲面上的积分

给定一个简单曲面 τ, 我们希望对满足如下假设的 F 来定义

$$\iint_{\tau} F\,dA,$$

1) 这里我们假定 R 具有 x, y, z 坐标系的定向.

这个假设是: F 是 τ 上的连续函数而且在 τ 的某个闭有界子集 s 外为 0.(在整个曲面 τ 是闭有界的情形, 这个定义将给出 τ 上 任意 连续函数在 τ 上的积分.) 我们利用一个叫做 单位分解 的方法, 把我们的积分化为早先已讨论过的基本曲面上的紧子集上的积分.

一个单位分解由有限个在集合 s 的点 P 上有定义且连续的函数 $\chi_1(P), \chi_2(P), \cdots, \chi_N(P)$ 组成, 它们具有下列性质:

1. 对所有的 $P \in s$ 和 $i = 1, \cdots, N, x_i(P) \geq 0$;

2. 对所有的 $P \in s, \chi_1(P) + \chi_2(P) + \cdots + \chi_N(P) = 1$;

3. 对于每个 $i = 1, \cdots, N$, 有一个包含在 τ 中的基本曲面 σ_i, 使得在 σ_i 的某个紧子集外边但在 s 中的点 P, 有 $\chi_i(P) = 0$.(当然性质 2 是取名 单位分解 的原因.)

假定我们有 s 的这种 单位分解. 对于 $P \in s$, 我们可以写作

$$F(P) = F(P)\chi_1(P) + F(P)\chi_2(P) + \cdots + F(P)\chi_N(P) \qquad (23a)$$

这里, 对于 s 中的 P, 每一项都有定义. 但是, 因为假定 $F(P)$ 在整个 τ 上有定义且连续, 并且在集合 s 的外边为 0, 只要把不在 s 中的 τ 的点上的 $F\chi_i$ 的值定义为 0, 我们可以把每一项 $F(P)\chi_i(P)$ 延拓为在整个 τ 上的连续函数.

然后我们用公式

$$\iint_{\tau} F dA = \sum_{i=1}^{N} \iint_{\sigma_i} F\chi_i dA \qquad (23b)$$

来定义 F 在 τ 上的积分, 这里, 因为 $F\chi_i$ 在基本曲面 σ_i 上连续并且在 σ_i 的一个紧子集外等于 0, 所以上式右边的积分有意义.

为了完成定义, 我们必须证明 F 在 τ 上的积分的表示式 (23b) 不依赖于所用到的 特殊的 单位分解. 假定我们有第二个由函数 $(\chi'_1(P), \chi'_2(P), \cdots, \chi'_m(P))$ 组成的分解, 它们分别在基本曲面 $\sigma'_1, \cdots, \sigma'_m$ 的紧子集外等于 0. 对于每个 i=1, $\cdots, N$ 和 k=1, $\cdots, m$, 集合

$$\sigma_i \cap \sigma'_k$$

还是一个基本曲面 (如果不空的话), 因为 σ_i 和 σ'_k 都位于 τ 上. 而且, 函数 $F\chi_i\chi'_k$ 在该曲面的一个紧子集外边等于 0. 因此从公式 (23b) 得出

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\tau} FdA &= \sum_i \iint\limits_{\sigma_i} F\chi_i dA \\ &= \sum_{i,k} \iint\limits_{\sigma_i} F\chi_i\chi'_k dA = \sum_{i,k} \iint\limits_{\sigma_i\cap\sigma'_k} F\chi_i\chi'_k dA \\ &= \sum_{i,k} \iint\limits_{\sigma'_k} F\chi_i\chi'_k dA = \sum_k \iint\limits_{\sigma_{k'}} F\chi'_k dA,\end{aligned}$$

这表明不同的分解导致相同的积分值.

还需要展示一个具体的单位分解. 根据定义, 对于简单曲面 τ 上的每个点 Q, 我们有一数 $\varepsilon_Q > 0$, 使得到 Q 的距离不超过 ε_Q 的 τ 上的点构成一个基本曲面 σ_Q. 与 Q 相应, 由

$$\psi_Q(P) = \begin{cases} \varepsilon_Q - 2\overline{PQ}, & \text{对于}\overline{PQ} < \dfrac{1}{2}\varepsilon_Q, \\ 0, & \text{对于}\overline{PQ} \geq \dfrac{1}{2}\varepsilon_Q \end{cases} \tag{24a}$$

定义一个 P 的函数. 其中 $\overline{PQ}$ 表示两点 P 和 Q 之间的距离. 对于空间中所有的 P, 函数 $\psi_Q(P)$ 有定义且连续, 因而特别在 σ_Q 上连续. 数 ε_Q 可以取得如此的小, 使得 σ_Q 上 P 点, $\overline{PQ} \leq \frac{1}{2}\varepsilon_Q$ 的集合是闭的 [1]. 那么这些点构成一个 σ_Q 的紧子集, 在它的外边函数 $\psi_Q(P)$ 等于 0.

---

1) 理由如下, 充分靠近 σ 的给定点 Q 的一个基本曲面的闭包中的所有的点 P 一定属于集合 σ 本身: 设 σ 相应于参数平面上的开集 U, 使 Q 对应于一点 q. 设 p_n 是在 U 中的像为 p_n 的 σ 上的点列, 且令 $p_n \to p$. 对于充分接近 Q 的 p_n, p_n 位于包含在 U 中的环绕 q 的闭的圆盘中. p_n 的一个子序列 p_n 收敛到 U 的一点 p. σ 上与 p 对应的点正好是 p. 现在根据 τ 的定义, 存在正数 δ_Q, 使得 τ 的使 $\overline{PQ} \leq \varepsilon_Q$ 的点 P 构成一个基本曲面 σ. 那么存在正数 $\varepsilon_Q \leq \delta_Q$(依赖于 δ_Q 的选取), 使得 σ 在闭包中使 $\overline{PQ} \leq \frac{1}{2}\varepsilon_Q$ 的点 P 属于 σ. 设 $\sigma_Q c \sigma$ 表示使 $\overline{PQ} < \varepsilon_Q$ 的 τ 中的点 P 构成的集合. 那么使 $\overline{PQ} \leq \frac{1}{2}\varepsilon_Q$ 的 σ_Q 的点 P 构成的集合的闭包包含在 σ 中, 因此, 由于 $\frac{1}{2}\varepsilon_Q < \varepsilon_Q$, 也包含在 σ_Q 中.

现在对 τ 上的每个 Q 我们取一个半径为 $\frac{1}{2}\varepsilon_Q$ 的开球，在此开球中函数 ψ_Q 是正的. 由 Heine-Borel 定理，有限个这样的球，比如说中心在 $Q_1,\cdots,Q_N$ 的那些球，已经盖住了闭有界集 s. 那么对于 $i=1,\cdots,N$, 我们通过

$$\chi_i(P)=\frac{\psi_{Q_i}(P)}{\psi_{Q_i}(P)+\cdots+\psi_{Q_N}(P)} \tag{24b}$$

定义分解函数 $\chi_i(P)$ 这里对 s 中每个 P 分母异于 0, 所以 $\chi_i(P)$ 在 s 中有定义且是连续的. 显然在 s 中 $\chi_i(P)$ 非负且和为 1. 而且，在基本曲面 σ_{Q_i} 的一个紧子集的外边 $\chi_i(P)=0$. 因此， $\chi_i(P)$ 构成一个单位分解.

在简单曲面上定义了函数 F 的积分后，我们就能立即得到微分形式

$$\omega=adydz+bdzdx+cdxdy. \tag{25a}$$

在一个 **定向简单曲面** τ^* 上的积分，假定系数 a,b,c 在 τ^* 的紧子集外等于 0, 我们简单地取

$$\iint\limits_{\tau^*}\omega=\iint\limits_{\tau}(a\xi+b\eta+c\zeta)dA, \tag{25b}$$

其中 τ 是非定向曲面，而 ξ,η,ζ 是通过 τ^* 关于坐标轴的定向选出的法向量的方向余弦.

A.2 散度定理

a. 定理的叙述及其不变性

在多变量的情形， **高斯散度定理** 起到了联系微分和积分运算的微积分基本定理所起的作用. 在适当的假定下，对于 x,y,z 空间中边界为 τ 的集合，高斯散度定理的形式为

$$\iiint\limits_R(a_x+b_y+c_z)dxdydz=\iint\limits_\tau(a\xi+b\eta+c\zeta)dA. \tag{26}$$

其中 ξ, η, ζ 表示 τ 中点的**外法向**(即指向 R 外边的法向) 的方向余弦.

这里我们将在如下假定下来证明这个定理, 即假定 R 是 x, y, z 空间中一个开有界集的闭包, 并且 R 的边界是一个简单曲面. 函数 $a(x,y,z)$, $b(x,y,z)$, $c(x,y,z)$ 在 R 中连续且在 R 的内点有连续有界的一阶导数.

公式 (26) 的一个重要特征是在空间的刚体运动下的不变性. 如果采用下标而不用不同的字母来区别变量的话, 这个事实就更容易证明了. 我们用 x_1, x_2, x_3 来代替 x, y, z, 用 a_1, a_2, a_3 来代替 a, b, c, 而用 ξ_1, ξ_2, ξ_3 来代替 ξ, η, ζ. 公式 (26) 变成

$$\iiint\limits_{k} \sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dx_1 dx_2 dx_3 = \iint\limits_{\tau} \sum_i a_i \xi_i dA, \tag{27a}$$

其中 $i = 1, 2, 3$. 当然, 在 n 维的情形, 对 i 从 1 变到 n 的类似的公式成立.

一个刚体运动是由一个从 x 到 y 变量的**形**

$$x_i = \sum_k c_{ik} y_k + d_i \tag{27b}$$

的线性变换给出的, 其中 c_{ik} 和 d_i 是常数而 c_{ik} 满足**正交性条件**[见 169 页 (47)]

$$\sum_i c_{ij} c_{ik} = \begin{cases} 0, & 对 j \neq k, \\ 1, & 对 j = k. \end{cases} \tag{27c}$$

同样的变换规律适用于向量, 但没有 "非齐次" 项 d_i, 因为这些向量的分量正好是它们端点坐标的差. 因此, 我们把 a_i 和同一个向量在新坐标系里由

$$a_i = \sum_k c_{ik} b_k$$

所确定的分量 b_k 联系起来了. 这个变换规律也适用于边界上法向量的方向余弦, 它们正好是外单位法向量的分量. 新的方向余弦 η_k 与 ξ_i 的关系是由

$$\xi_i = \sum_k c_{ik}\eta_k$$

给出.

那么, 显然

$$\sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x_i} = \sum_{i,k} c_{ik}\frac{\partial b_k}{\partial x_i} = \sum_{i,k} \frac{\partial x_i}{\partial y_k}\frac{\partial b_k}{\partial x_i} = \sum_k \frac{\partial b_k}{\partial y_k},$$

这里我们已经用了微商的链锁法则(见 225 至 226 页). 类似地, 利用 (27c)

$$\sum_i a_i\xi_i = \sum_{i,j,k} c_{ik}b_k c_{ij}\eta_j = \sum_k b_k\eta_k.$$

因此, (27a) 蕴涵

$$\iiint \sum_k \frac{\partial b_k}{\partial y_k} dy_1 dy_2 dy_3 = \iint \sum_k b_k\eta_k dA,$$

从而就表示这是一个在空间的刚体运动下不变的关系 [1].

b. 定理的证明

利用单位分解再一次大大简化了一般公式 (26) 的证明. 对于一个给定的边界为 τ 的区域 R, 这种方法使我们可以把一般的 a, b, c 的公式化为除了在一点的邻域外都等于 0 的 a, b, c 的情形. 我们将证明下列结论.

如果 R 中每一点有一半径为 ε_Q 的邻域, 使得 (26) 对所有在该邻域外等于零的 a, b, c 成立 [2], 则该公式对于一般的 a, b, c 成立.

1) 因为变换 (27b) 的雅可比, 即 c_{ik} 的行列式的值为 ±1(见 189 页), 所以推得体积元素的不变性, 而通过变换 W 的表示式 (1b) 就推得曲面元素 $dA = Wdudv$ 的不变性.

2) 我们只考虑满足所述假设的函数 a, b, c: 它们在 R 中连续, 且在 R 的内点处有连续导数.

为了证明这个论断，我们利用由

$$\psi_Q(P)=\begin{cases}(\varepsilon_Q^2-4\overline{PQ^2})^2, & 对于\overline{PQ}<\dfrac{1}{2}\varepsilon_Q,\\ 0, & 对于\overline{PQ}\geq\dfrac{1}{2}\varepsilon_Q\end{cases}$$

定义的辅助函数 $\psi_Q(P)$，它对于一切 P 是连续的且有连续的一阶导数. 因为 R 是有界闭的，我们可以挑选有限个点 Q，比如说 $Q_1, Q_2, \cdots,$ 使得相应的球 $\overline{PQ}_i<\frac{1}{2}\varepsilon_{Q_i}$ 盖住 R 所有的点. 我们再次引进函数

$$\chi_i=\frac{\psi_{Q_i}(P)}{\psi_{Q_1}(P)+\cdots+\psi_{Q_N}(P)},$$

它是在 R 的所有点上有定义且有连续的一阶导数，而且除此以外还满足单位分解的条件.

(a) $\chi_i(P)\geq 0$，在 R 中，

(b) $\sum\limits_i \chi_i(P)=1$，

(c) $\chi_i(P)=0$. 对于 $\overline{P_{Q_i}}>\frac{1}{2}\varepsilon_{Q_i}$

于是，函数 a 可以被分解为

$$a=\sum_i a\chi_i,$$

其中单个的项 $a\chi_i$ 还是在 R 中连续且在 R 的内点有连续的一阶导数. 类似地，b 和 c 可以被分解. 于是，因为公式 (26) 适用于单个的项，所以显然适用于整个表达式.

因此，我们只须对在点 Q 的一个任意的子邻域外为 0 的函数 a, b, c 证明 (26). 我们分别对 Q 是 R 的内点和 Q 是边界曲面 τ 上的点这两种情形来讨论.

对于 R 内部的一点 Q，我们选 ε_Q 如此小使得中心在 Q 半径为 $2\varepsilon_0$ 的球位于 R 中. 对于在半径为 ε_Q 的球的外部 a, b, c 等于 0 的情形，曲面积分等于 0，从而我们只要证明

$$\iiint(a_x+b_y+c_z)dxdydz=0. \tag{28}$$

这里，如果我们在 R 外令 $a=b=c=0$ 的话，在整个空间 a,b,c 有定义且有连续导数. a,b,c 的一阶导数在每条与坐标轴平行的直线上是可积的. 应用 671 页化三重积分为单重积分的公式 (29), 我们求得，例如，

$$\iiint c_z dxdydz = \iint h(x,y)dxdy,$$

其中

$$h(x,y) = \int c_z(x,y,z)dz = 0.$$

这样就证实了 (28).

现在考虑 Q 是 R 的边界点的情形. 我们可以假定曲面 τ 在 Q 的法向与三个坐标平面中的任何一个都不平行; 通过一个空间的适当的刚体运动，它不改变要证的公式，总可以做到这点. 在 Q 的半径 ε_Q 充分小的邻域中没有平行于坐标平面的法向; 即，方向余弦 ξ,η,ζ 中的任何一个都不为零. 如果这邻域充分小，则包含在这邻域中的 τ 的那部分可以通过把三个坐标 x,y,z 中的任何一坐标表为另两个坐标的函数非参数地表示出来. 例如，我们可以用方程

$$z = F(x,y)$$

来表示 τ. 在该邻域中的集合 R 将被 $z \leq F(x,y)$ 或 $z \geq F(x,y)$ 所刻划; (见 777 页). 不失一般性我们假定，R 局部地由 $z \leq F(x,y)$ 所刻划; 那么 τ 的外法向具有方向余弦 ξ,η,ζ, 其中 $\zeta > 0$. 对于在这邻域外等于 0 的 a,b,c, 利用 $u=x$ 和 $v=y$ 作为曲面参数，我们有

$$\iint\limits_{\tau} c\zeta dA = \iint cdxdy \tag{29}$$

与我们的定向一致. 另一方面, 把 c 没有定义的地方 [1] 延拓为 0,

$$\iiint\limits_R c_z dxdydz = \iiint_{z\leq F(x,y)} c_z dxdydz$$
$$= \iint h(x,y)dxdy.$$

其中

$$h(x,y) = \int_{-\infty}^{F(x,y)} c_z(x,y,z)dz = c(x,y,F(x,y)).$$

只有 Q 近旁的点对积分有贡献, 所以函数 $F(x,y)$ 也必须只在 Q 点近旁的 (x,y,z) 有定义. 与 (29) 相比较就证明了.

$$\iint\limits_\tau c\zeta dA = \iiint\limits_R c_z dxdydz.$$

类似地, 以 x,y,z 或 x,z 作为参数, 也得到

$$\iint a\xi dA = \iiint\limits_R a_x dxdydz, \quad \int_\tau b\eta dA = \iiint\limits_R b_y dxdydz.$$

这就完成了散度定理 (26) 的证明.

A.3 斯托克斯定理

我们考虑不一定是闭的简单曲面. 给定 τ 的一个子集 σ, 我们把 τ 的具有下列性质的点 P 构成的集合 —— 即在 P 点某个适当的邻域里 τ 的所有的点属于 σ—— 定义为 σ 的 **相对内部** (就是"相对"于曲面 τ 而言的). 类似地, σ 的 **相对边界** 由 τ 的那样一些点组成, 它们中的每一个都包含 τ 的属于 σ 的点也包含不属于 σ 的点. 如果每一个 σ 的点是一个相对内点, 则集合 σ 是 **相对开** 的.

1) 那么, 除去 Q 附近使 $z = F(x,y)$ 的点 (x,y,z) 构成的集合外, 相应的函数 c_z 是有界连续的. 这个集合的若当测度为 0. 因此 $c_z(x,y,z)$ 作为 x,y,z 的函数以及固定 x,y 只作为 z 的函数是黎曼可积的. (见 539 页的脚注 2) 因此 671 页的公式 (29) 是适用的.

现在我们考虑一个 τ 的有界闭子集 s, 它由一个相对开集 σ 和它的相对边界组成. 这个相对边界将是一个简单闭曲线 C, 它以形式

$$x=\alpha(t),\quad y=\beta(t),\quad z=\gamma(t) \tag{30}$$

参数地给出, 其中 α,β,γ 是周期为 p 的具有连续一阶导数的函数, 对所有的 $t,\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2>0$. 我们假定曲面 τ 已定向, 并且 ξ,η,ζ 是定向曲面 τ^* 上的正法向的方向余弦. 于是我们可以对曲线 C 指定一个定向, 它由 τ 的定向以及 σ 所在 C 的一"侧"决定, 因此使 C 成为一条定向曲线 C^*. C 关于 τ^* 的这个"正"定向可以用两种方法来定义. 在 x,y,z 空间中与 t 的增加方向相对应的切向量指向由向量 $(\alpha'(t),\beta'(t),\gamma'(t))$ 给出的方向. 这个切向量和曲面法向量 (ξ,η,ζ) 的外积是分量为

$$\beta'\zeta-\gamma'\eta,\quad \gamma'\xi-\alpha'\zeta,\quad \alpha'\eta-\beta'\xi \tag{31}$$

的向量. 它的垂直于 C 的切线且与曲面相切的那个方向给出了一个 C 的相对于曲面的正规法方向. 如果向量 (31) 指向 S 的外边, 则对于 C 所指定的方向是 t 增加的方向, 如果指向 S 的里边, 则是 t 减少的方向.

得出同样定向的一个不同的方法利用了在点 P 的邻域中 τ 的参数表达式

$$x=f(u,v),\quad y=g(u,v),\quad z=h(u,v), \tag{32}$$

这里我们假定参数 u,v 是定义 P 附近 τ 的定向的那些参数, 即由 771 页 (2) 定义的向量指向 τ 的正规法向 (distinguished normal)[1]. P 附近的曲线将被映射到 u,v 平面中的一条弧 γ 上去, 靠近 P 的集合 S 映到 u,v 平面的集合 ρ 中. 根据定向所赋予的意义, 我们可以把 C 的定向定义为与 γ 关于集合 ρ 的正定向相应的那个定

1) τ 的参数表示 (32) 仅仅是局部的 (即在 P 点附近有效).

向. 如果分量为 $\frac{dv}{dt}$ 和 $-\frac{du}{dt}$ 的向量是指向 ρ 外的, 我们还可以说 γ 的定向是 t 增加的方向.

现在给定三个函数 $a(x,y,z), b(x,y,z), c(x,y,z)$ 它们在集合 S 的一个邻域中都是有定义的且有连续的一阶导数, 则 **斯托克斯定理** 表为公式

$$\iint_S [(c_y - b_z)\xi + (a_z - c_x)\eta + (b_x - a_y)\zeta] dA = \int_{C^*} (adx + bdy + cdz). \tag{33}$$

这个定理的证明遵循着此刻读者已经熟悉的一个范式. 通过应用适当的单位分解, 我们可以只限于函数 a, b, c 在 S 的点 Q 的一个任意小邻域外等于 0 的情形. 在这点的附近, 曲面 S 有一个形为 (32) 的参数表示式, 对此表示式由在以前给出的分量为 A, B, C 的法向量具有由 τ^* 的定向所决定的方向. 我们可以写作

$$\begin{aligned}
&\iint_{s^*} [(c_y - b_z)\xi + (a_z - c_x)\eta + (b_x - a_y)\zeta] dA \\
= &\iint_\rho [(c_y - b_z)A + (a_z - c_x)B + (b_x - a_y)c] dudv \\
= &\iint_\rho (\lambda_u + \mu_v) dudv,
\end{aligned}$$

其中 $\lambda = ax_v + by_v + cz_v$, $-\mu = ax_u + by_u + cz_u$. 因为通过代入 720 页对 A, B, C 的表达式 (2) 以及利用微商的链锁法则

$$a_u = a_x f_u + a_y g_u + a_z h_u$$

等等 [1], 从代数上这是容易验证的.

---

1) 第三章的公式 (63b) 是这种恒等式的另一种变型, 其中 $L = adx + bdy + cdz, \lambda = L/dv, \mu = L/du$.

如果现在 Q 是 S 的相对内部的一个点，则在 ρ 的边界 γ 附近，函数 $\lambda(u,v)$ 和 $\mu(u,v)$ 等于 0, 又根据二维散度定理我们发现

$$\iint_\rho (\lambda_u + \mu_v) du dv = 0.$$

另一方面，如果 Q 在 S 的相对边界上，则在 u,v 平面上的对应点位于 γ 上，而 λ,μ 在该点的一个小邻域外等于 0. 这时，二维散度定理再次得出

$$\iint_\rho (\lambda_u + \mu_v) du dv = \int_\gamma (\lambda p + \mu q) d\gamma,$$

其中 $d\gamma$ 是长度微元，而 p,q 是曲线 γ 上指向 ρ 外的法向的方向余弦. 在关于 ρ 的正方向上画出 γ, 我们有

$$\begin{aligned}\int_\gamma (\lambda p + \mu q) d\gamma &= \int_{\gamma^*} (\lambda dv - \mu du) \\ &= \int_{\gamma^*} (a x_u + b y_u + c z_u) du + (a x_v + b y_v + c z_v) dv \\ &= \int_{C^*} (a dx + b dy + c dz),\end{aligned}$$

这是要证明的结论.

A.4 在高维欧氏空间中的曲面和曲面积分

a. 基本曲面

设 E_u 是与笛卡尔坐标 $x_1,\cdots,x_M$ 有关的 M 维欧氏空间, 首先我们在 E_M 中把可以借助 m 个参数"很好"地表示出来的点集定义为 m 维"基本曲面". 我们说 E_M 中的一个集合 S 是一个 m 维基本曲面, 如果我们可以求得 M 个定义在 $u_1,u_2,\cdots,u_m$ 空间一个开集 U 上的 M 个函数 $f^1(u_1,\cdots,u_m), f^2(u_1,\cdots,u_m),\cdots,f^M(u_1,\cdots,u_m)$, 它们具有下列性质:

1. 方程

$$x_1 = f^1(u_1, \cdots, u_m), \cdots, x_M = f^M(u_1, \cdots, u_m)$$

定义了 U 到 S 上的连续映射，其逆映射也是连续的.

2. 函数 $f^\lambda(u_1, \cdots, u_m)$ 在 U 中有连续的一阶导数.

3. 对于 U 中任意点 $(u_1, \cdots, u_m)$ 和 $i = 1, \cdots, m$, 设 $\mathbf{A}^i = \mathbf{A}^i(u_1, \cdots, u_m)$ 被定义为 E_m 中分量为 $(f^1_{u_i}, f^2_{u_i}, \cdots, f^M_{u_i})$ 的向量. 我们要求 m 个向量 $\mathbf{A}^i$ 是无关的，即

$$W = \sqrt{\Gamma(\mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2, \cdots, \mathbf{A}^m)} > 0, \tag{34}$$

其中 Γ 是由 210 页 (81a) 定义的**格拉姆行列式**.

像在 771 页那样，证明了，若我们以同样的方式借助某些其它的参数 $v_1, \cdots, v_m$ 来表示 S, 则在相应的参数点 $(u_1, \cdots, u_m)$ 和 $(v_1, \cdots, v_m)$ 之间存在一个 1-1 的连续可微关系，这个关系的雅可比不等于 0:

$$\frac{d(u_1, \cdots, u_m)}{d(v_1, \cdots, v_m)} \neq 0. \tag{35}$$

如果 $F(x_1, \cdots, x_m)$ 是一个在基本曲面上有定义且连续的函数，它在 S 上有**紧支集**(即 F 在 S 的一个闭有界子集外等于 0), 我们用

$$\iint\limits_S \cdots \int F dS = \iint \cdots \int_U F W du_1 \cdots du_m \tag{36}$$

来定义 [1] F 在 S 上的积分. 用这种方式定义的积分不依赖 [2] 于 S 所采用的特殊的参数表示.

---

1) 在 $u_1, \cdots, u_m$ 空间中边长为 h 平行于坐标轴的立方体被映射到 $x_1, \cdots, x_m$ 空间中由向量 $h\mathbf{A}^1, \cdots, h\mathbf{A}^m$ 张成的平行多面体 (差更高阶的项), 因此 m 维体积为

$$\sqrt{\Gamma(h\mathbf{A}^1, \cdots, h\mathbf{A}^M)} = h^m W,$$

这使得如下结论似乎是合理的，即 dS 应等于 $u_1, \cdots, u_m$ 空间中的体积元素乘以因子 W.

2) 为证明这点，我们注意到在参数变换下， W 被乘以参数变换的雅可比的绝对值，因为这样一种变换导致向量 $\mathbf{A}^i$ 的一个线性代换，它改变由这些向量张起来的平行多面体的体积只差一个数值上等于这个代换的行列式的因子 (见 218 页).

在 S 的一点 P_0 处，我们构成相应的向量 $\mathbf{A}^i$，它们的起点为 P_0，而用 P_i 来表示它们的终点，所以 $\mathbf{A}^i = \overrightarrow{P_0P_i}$. $m+1$ 个点 $P_0, P_1, \cdots, P_m$ 位于一个 m 维平面 p_0——S 在 P_0 处的切平面上. 如果给 p_0 赋以一个定向 (见 216 页)，把 P_0 转化为定向切平面 p_0^*，我们有

$$\Omega(p_0^*) = \varepsilon(p_0)\Omega(\mathbf{A}^1, \cdots, \mathbf{A}^m), \tag{37a}$$

其中 $\varepsilon(p_0)$ 或取 $+1$ 或取 -1. 我们称曲面 S 定向了，如果我们给切平面 $p^*(P)$ 以定向，使得定向连续地依赖于 P；即，对于带有 p^* 中适当的向量 $\mathbf{B}^1, \cdots, \mathbf{B}^M$ 的

$$\Omega(p^*) = \Omega(\mathbf{B}^1, \cdots, \mathbf{B}^M).$$

我们要求 [1] 对于所有 S 上充分靠近 P_0 的点 P，有

$$[\mathbf{B}^1(P), \cdots, \mathbf{B}^m(P); \mathbf{B}^1(P_0), \cdots, \mathbf{B}^m(P_0)] > 0,$$

因为向量 $\mathbf{A}^i$ 随切点 P 连续变化，所以如果由 (37a) 定义的因子 $\varepsilon(P)$ 随 S 上的 P 连续变化，则 p^* 的定向随切点 P 连续变化. 因为 ε 只能取值 $+1$ 或 -1，由此推出，像在 720 页那样，对于一个连通的基本曲面只存在两个可能的定向. 在任何情形下，定向曲面 S^* 在参数空间 $u_1, \cdots, u_m$ 中决定集合 U 的一个定向，即由

$$\Omega(U) = \varepsilon(P)\Omega(u_1, \cdots, u_m) \tag{37b}$$

给出的那个定向 [见 721 页 (40n,o,p)]. 这里，在从 $u_1, \cdots, u_m$ 到 $v_1, \cdots, v_m$ 的参数变换下，量 ε 正好乘以雅可比 (35) 的符号.

b. 微分形式在定向基本曲面上的积分

有了这些预备知识后，我们就准备来定义一个 m 次微分形式 ω 在一个 m 维定向基本曲面 S^* 上的积分. 形式 ω 是微分 $dx_1, \cdots, dx_M$

1) 括号中的符号表示由 214 页 (85a) 定义的行列式.

中的 m 个微分的有序乘积的某个线性组合，比如

$$\omega = adx_1dx_2\cdots dx_m + bdx_2dx_3\cdots dx_{m+1} + cdx_1dx_3\cdots dx_{m+1}\cdots,$$

这里假定系数 $a(x_1,\cdots,x_M), b(x_1,\cdots,x_M),\cdots$ 是连续的且在 S^* 上有紧支集 [1]. 设 S^* 可以借助于在与 S^* 的定向一致的集合 U^* 上变化的参数 $u_1,\cdots,u_m$ 参数地表示出来. 于是，我们定义

$$\begin{aligned}\int_{S^*}\cdots\int\omega &= \int_{U^*}\cdots\int\frac{\omega}{du_1\cdots du_m}du_1\cdots du_m\\ &= \int_{U^*}\cdots\int\left[a\frac{d(x_1,x_2,\cdots,x_m)}{d(u_1,u_2,\cdots,u_m)}\right.\\ &\quad\left.+b\frac{d(x_2,x_3,\cdots,x_{m+1})}{d(u_1,u_2,\cdots,u_m)}+\cdots\right]du_1\cdots du_m.\end{aligned}$$

我们的记号 [2] 已经按如下方式安排，即积分值不依赖于对 S^* 所用的特殊的参数表示.

c. 简单 m 维曲面

把基本曲面 “拼补起来” 就像在三维空间中所做的那样我们可以得到简单曲面. M 维欧氏空间中一个集合 τ 叫做 m 维简单曲面，如果 τ 的每一点 P_0 有一邻域，它与 τ 的交为一 m 维基本曲面. 如果在表征简单曲面时出现的每一个基本曲面已定向，又如果每当两个这样的基本曲面彼此搭接时它们的定向一致的话，我们就说这个简单曲面已经定向.

1) 即 a,b,c 在 S^* 的某个有界闭子集外等于 0.

2) 这里，对一个连续的被积函数 $F(u_1,\cdots,u_m), F$ 在定向集合 U^*, 其定向为

$$\Omega(U^*) = \varepsilon\Omega(u_1,\cdots,u_m)$$

($\varepsilon=\pm1$ 而且 Ω 连续), 上的积分由

$$\underset{U^*}{\iint}\cdots\int Fdu_1\cdots du_m = \underset{u}{\iint}\cdots\int F\varepsilon du_1\cdots du_m$$

定义，其中右端的积分具有通常的意义，它对正的被积函数给出正值.

在 m 维定向简单曲面的每一点, 我们可以选 m 个向量 $\mathbf{A}^1(P), \cdots, \mathbf{A}^m(P)$ 使得

$$\Omega(\tau^*) = \Omega[\mathbf{A}^1(P), \cdots, \mathbf{A}^m(P)],$$

且对充分靠近 P 的 Q

$$[\mathbf{A}^1(P), \cdots, \mathbf{A}^m(P); \mathbf{A}^1(Q), \cdots, \mathbf{A}^m(Q)] > 0.$$

对于 m 维简单曲面 τ 的子集合 S, 我们可以定义 S 的 **相对边界** [1], 即, S 相对于曲面 τ 的边界. S 的相对边界是由 S 的这样一些点组成的, 对这些点每个邻域都含有 S 的点和不属于 S 的 τ 的点. S 的 **相对闭包** [2] 由 S 及相对边界组成. 如果 S 和它的相对边界没有公共点, 则 S 叫 **相对开的**, 如果 S 包含它的相对边界, 则 S 叫做 **相对闭的**.

特别有趣的是 S 是 m 维简单曲面 τ 的子集的情形, S 的相对边界本身是一个 $(m-1)$ 维简单曲面 ∂S. 我们进一步假定 S 是一个相对开集的相对闭包. 在 ∂S 的点 P 的邻域中我们总可以把 ∂S 和 τ"非参数" 地表示出来; 即, 我们可以利用空间中的某些笛卡尔坐标 $x_1, \cdots, x_m$ 作为自变量; 在对坐标的一个适当的重新排列之后, 在 P 点附近 τ 就有参数表示

$$x_i = f_i(x_1, \cdots, x_m), \quad (i = m+1, \cdots, M)$$

而在 ∂S 上我们有附加的条件

$$x_1 = g(x_2, \cdots, x_m).$$

其中 f_i 和 g 都是连续可微的函数. 而且在 P 附近 S 的点是由不等式

$$g(x_2, \cdots, x_m) \le x_1,$$

1) 当我们要讨论, 譬如说, 维数 $M > 2$ 的空间中二维曲面的边界曲线时就需要这个概念. 关于整个空间所取的曲面 S 的 ("绝对") 边界总是包含整个曲面 S.

2) S 的相对闭包也是 τ 上所有那样一些点构成的集合, 这些点是 S 上的点所构成的点列的极限.

或

$$g(x_2, \cdots, x_m) \geq x_1,$$

表征出来.

如果我们处理一个定向集合 S^*, 对于相对边界 ∂S 我们可以指定一个唯一的定向. 设在 ∂S 的一点 P 处给了 $m-1$ 个与 ∂S 相切的独立的向量 $\mathbf{A}^2, \cdots, \mathbf{A}^m$, 以及一个向量 $\mathbf{A}^1$, 它与 τ 相切但不在 p 点与 ∂S 相切而且指向离开 S^* 的方向. 那么我们有

$$\Omega(S^*) = \varepsilon\Omega(\mathbf{A}^1, \cdots, \mathbf{A}^{m-1}, \mathbf{A}^m), \tag{38}$$

其中 ε 或取值 $+1$ 或取值 -1. 于是, 如果

$$\Omega(\partial S^*) = \varepsilon\Omega(\mathbf{A}^2, \cdots, \mathbf{A}^m), \tag{39}$$

则 ∂S^* 就被称为关于 S^* 正定向 的.

特别, 令 $m = M$ 且令 τ 是整个 M 维空间, 设 S 是一开 [1] 集的闭包且设 S 的边界是一个 $(m-1)$ 维简单曲面 ∂S. 假定在 P 点的一个邻域中曲面 ∂S 有非参数表示

$$x_1 = g(x_2, \cdots, x_m),$$

我们可以定义一个量 $\delta = \pm 1$, 使得对于 P 近旁的点 $(x_1, \cdots, x_m)$

$$[x_1 - g(x_2, \cdots, x_m)]\delta \leq 0. \tag{40a}$$

我们选与 ∂S 相切的向量

$$\mathbf{A}^2 = (g_{x_2}, 1, 0, \cdots, 0), \cdots, \mathbf{A}^m = (g_{x_m}, 0, \cdots, 0, 1)$$

作为 $\mathbf{A}^2, \cdots, \mathbf{A}^m$, 而选指向离 $\mp 1 S$ 的向量

$$\mathbf{A}^1 = (\delta, 0, \cdots, 0)$$

---

1) 这里我们可以把相对这个词略去.

作为 $\mathbf{A}^1$. 那么在 $x_1, \cdots, x_m$ 坐标下

$$\det(\mathbf{A}^1, \cdots, \mathbf{A}^{m-1}, \mathbf{A}^m) = \delta,$$

所以 [见 213 页 (83.a.b)]

$$\Omega(\mathbf{A}^1, \cdots, \mathbf{A}^{m-1}, \mathbf{A}^m) = \delta\Omega(x_1, \cdots, x_m),$$

对于定向集合 S^*, 设 $\varepsilon = \pm 1$ 是在 P 附近由 (38) 定义的. 于是

$$\Omega(S^*) = \varepsilon\delta\Omega(x_1, \cdots, x_m). \tag{40b}$$

而对关于 S^* 定向为正的边界 ∂S, 关系式 (39) 成立. 因此, 如果把 $x_2, \cdots, x_m$ 看作曲面 ∂S^* 在 P 附近的参数, 则由 ∂S^* 决定的 $x_2, \cdots, x_m$ 的定向是

$$\varepsilon\Omega(x_2, \cdots, x_m) \tag{40c}$$

[见 791 页 (37b)]. 因此, 对关于 $x_1, \cdots, x_m$ 坐标 ($\varepsilon\delta = 1$) **定向为正的集合** S^*, **定向为正的边界在** S **位于** 边界的 "下面" 的地方具有 $x_2, \cdots, x_m$ 坐标系的定向, **而在** S **位于边界的"上面" 的地方具有相反的定向**.(与 778 页比较)

A.5 高维空间中简单曲面上的积分, 高斯散度定理和一般的斯托克斯公式

正如 779 页所做的那样我们依靠 **单位分解** 来定义在简单曲面上的积分. 特别, 如果 τ^* 是一个 m 维定向简单曲面而 ω 是一个 m 阶微分形式, 只要 ω 的系数都连续并且在 τ^* 的一个有界闭子集 [1] 外等于零, 则积分

$$\int_{t^*} \cdots \int \omega$$

1) 不仅仅是相对闭.

有定义.

现在设 τ 是 M 维空间中一个 m 维简单曲面, 而 S^* 是 τ 的一个定向有界闭子集. 我们假定 S^* 是一个相对开集的闭包, 而关于 S^* 定向为正的 S^* 的相对边界是一个 $(m-1)$ 维定向简单曲面 ∂S^*. 设 ω 是一个 $m-1$ 阶微分形式, 其系数具有一阶连续导数. 斯托克斯的一般定理断言

$$\int_{\partial S^*}\cdots\int \omega=\int_{S^*}\cdots\int d\omega. \tag{41}$$

首先, 我们来处理 $m=M$ 的特殊情形, 这是 m 维情形的高斯散度定理. 这时, 我们把 τ 取作全空间, 把 S^* 取为一个定向集合, 它是由关于 S^* 定向为正的一个 $(m-1)$ 维简单曲面 ∂S^* 界住的一个开集的闭包. $m-1$ 次形式可以写作

$$a_1dx_2\cdots dx_m+a_2dx_3dx_4\cdots dx_mdx_1+\cdots+a_mdx_1dx_2\cdots dx_{m-1},$$

其中 a_i 是 $x_1,\cdots,x_m$ 的函数. 则

$$\begin{aligned}d\omega =&da_1dx_2dx_3\cdots dx_m+da_2dx_3dx_4\cdots dx_mdx_1+\cdots\\&+da_mdx_1dx_2\cdots dx_{m-1}\\=&\frac{\partial a_1}{\partial x_1}dx_1dx_2\cdots dx_m+\frac{\partial a_2}{\partial x_2}dx_2dx_3\cdots dx_mdx_1+\cdots\\&+\frac{\partial a_m}{\partial x_m}dx_mdx_1\cdots dx_{m-1}\\=&Kdx_1\cdots dx_m,\end{aligned} \tag{42a}$$

其中

$$\begin{aligned}K=&\frac{\partial a_1}{\partial x_1}+(-1)^{m-1}\frac{\partial a_2}{\partial x_2}+\frac{\partial a_3}{\partial x_3}\\&+(-1)^{m-1}\frac{\partial a_4}{\partial x_4}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{\partial a_m}{\partial x_m}.\end{aligned} \tag{42b}$$

对于这种情形, 公式 (41) 的证明完全可以像在 783 至 786 页对待特殊情形 $m=3$ 所讨论的那样去做, 重新叙述那里做过的那

些单个的步骤是毫无意义的. 唯一要验证的一点是最终的公式中的符号. 最终化为对如下情形的证明, 即 $a_2, \cdots, a_m$ 恒等于零而 a_1 在曲面 σ^* 上一点 P 的一个邻域外等于零的情形. 这里 P 的附近曲面是由方程

$$x_1 = g(x_2, \cdots, x_m)$$

给出的, 而 S^* 是由不等式

$$[x_1 - g(x_2, \cdots, x_m)]\delta \leq 0$$

给出的, 其中 $\delta = \pm 1$. 设数 $\varepsilon = \pm 1$ 在 P 点由

$$\Omega(S^*) = \varepsilon\delta\Omega(x_1, \cdots, x_m)$$

来定义 [见 (40b)]. 则根据 (42a,b)

$$\begin{aligned}\int_{S^*} \cdots \int d\omega =& \varepsilon\delta \int \cdots \int \frac{\partial a_1}{\partial x_1} dx_1 \cdots dx_m \\ =& \varepsilon \int \cdots \int_{x_1 = g} a_1 dx_2 \cdots dx_m.\end{aligned}$$

另一方面 [见 (40b) 和 (40c)], 我们还有

$$\int_{\partial S^*} \cdots \int \omega = \varepsilon \int_{x_1 = g} \cdots \int a_1 dx_2 \cdots dx_m.$$

这就完成了散度定理的证明.

对于任意的 $m < M$, 一般的斯托克斯公式是一个直接的推论. 利用单位分解, 只要对简单曲面 τ 的点 P 的一个邻域的外边等于零的微分形式验证这个公式成立就够了. 在那个邻域中 τ 等同于一个基本曲面. 为了描述 τ 引进局部参数 $u_1, \cdots, u_m$, 等式 (41) 变成 M 维参数空间中相应的等式, 于是在那里一切都化为上面已经讨论过的高斯散度定理. 这样就证明了一般的斯托克斯定理.

这类论证使以下事实变为非常清楚, 即把我们的 m 维曲面 τ 嵌入到一个 M 维欧氏空间中去 (对于证明前面的结论说来) 多多

少少有点离题的. 所有的那些考虑都是把 τ 映射到 m 维欧氏空间的一个集合上去的局部参数表示. 这就启示在每点附近都可用参数描述的更一般的 m 维 **抽象流形** 上类似的公式成立. 然而, 为了避免超出本书范围的拓扑学上的考虑, 我们只限于讨论欧氏空间中的 **简单** 曲面.

第六章　微 分 方 程

在第一卷第九章中，我们已经讨论过特殊形状的微分方程. 在本书的范围内，虽然我们不可能试图详细地展开它的一般理论，但是，在这一章中，我们从力学中的进一步的例子出发，运用多元函数微积分，至少也能给出微分方程这个课题某些原理的一个梗概.

6.1　空间质点运动的微分方程

a. 运动方程

在第一卷 (第四章第 441–465 页) 中，我们讨论了限定在 x, y 平面内移动的质点的运动. 现在我们去掉这一限制，考虑一集中于坐标为 (x, y, z) 的点上的质量 m. 从原点到该质点的定位向量具有分量 x, y, z, 我们记之为 $\mathbf{R}$. 如果能把 (x, y, z) 或 $\mathbf{R}$ 表成时间 t 的函数，那么，质点的运动就在数学上得到了表示. 同以前一样，如果用圆点标记关于时间 t 的微商，那么长度为 [1]

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \tag{1}$$

的向量 $\dot{\mathbf{R}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ 表示速度，向量 $\ddot{\mathbf{R}} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$ 表示质点的加速度.

1) "Mutationem motuo proportionalem esse vi mofrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur" (即，运动之变化与作用力成比例，且发生在沿力的作用直线的方向上).

确定运动的基本工具是牛顿第二定律[1], 即加速度向量 $\ddot{\mathbf{R}}$ 与质量 m 的乘积等于作用在质点上的力 $\mathbf{F}=(X,Y,Z)$:

$$m\ddot{\mathbf{R}}=\mathbf{F} \tag{2a}$$

或, 用分量式,

$$m\ddot{x}=X,\quad m\ddot{y}=Y,\quad m\ddot{z}=Z. \tag{2b}$$

只要给出关于力 $\mathbf{F}$ 的充分信息, 这些关系式[1] 就能用来决定运动.

一个例子是地球表面附近的表示重力的恒力场. 如果取重力作用方向为 z 轴的负方向, 则重力可表为向量

$$\mathbf{F}=(0,0,-mg)=-mg(\operatorname{grad} z), \tag{3}$$

其中 g 是重力加速度常数.

另一个例子是, 集中于坐标系原点上的质量 μ 按照牛顿万有引力定律产生的吸引力场. 如果

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=|\mathbf{R}|$$

是质量为 m 的质点 (x,y,z) 与原点的距离, 则力场可表示成

$$\mathbf{F}=\mu m\gamma\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right), \tag{4a}$$

其中 γ 是万有引力常数. 在这种情况下, 牛顿运动定律 (2a) 表为

$$\ddot{\mathbf{R}}=\mu\gamma\operatorname{grad}\frac{1}{r} \tag{4b}$$

或, 用分量式,

$$\ddot{x}=-\mu\gamma\frac{x}{r^3},\quad \ddot{y}=-\mu\gamma\frac{y}{r^3},\quad \ddot{z}=-\mu\gamma\frac{z}{r^3}.$$

---

1) 向量 $m\dot{\mathbf{R}}$ 称为动量, 所以牛顿定律说的是"力等于动量的变化率".

一般说来, 如果 $\mathbf{F}$ 是分量为位置的已知函数 $X(x,y,z), Y(x,y,z), Z(x,y,z)$ 的力场, 则运动方程

$$m\ddot{x} = X(x,y,z), \quad m\ddot{y} = Y(x,y,z), \quad m\ddot{z} = Z(x,y,z) \tag{5}$$

构成关于三个未知函数 $x(t), y(t), z(t)$ 的三个 **微分方程** 的系统. 质点力学的基本问题是: 当运动开始时 (比如说, 在时间 $t=0$), 已知质点的 **位置** (即坐标 $x_0 = x(0)$, $y_0 = y(0)$, $z_0 = z(0)$) 和 **初速度** (即量 $\dot{x}_0 = \dot{x}(0)$, $\dot{y}_0 = \dot{y}(0)$, $\dot{z}_0 = \dot{z}(0)$), 从微分方程去确定质点的轨道. 寻求既满足这些初条件, 又对所有 t 值满足三个微分方程的三个函数的问题就是通常所谓的微分方程组的 **求解或积分** [1] 问题.

b. 能量守恒原理

速度向量 $\dot{\mathbf{R}}$ 与质点运动方程 (2a) 作数量积

$$m\dot{\mathbf{R}} \cdot \ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{R}} = X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z} \tag{6a}$$

可得出一个重要结果. 上式左端可写成

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{R}}\right) = \frac{d}{dt}\,\frac{1}{2}mv^2, \tag{6b}$$

即质点的 **动能(运动能)** $\frac{1}{2}mv^2$ 对时间的导数. 关于 t 从 t_0 到 t_1 积分方程 (6a), 我们得到在 t_0 到 t_1 时间间隔内质点动能的改变量是

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 &= \int_{t_0}^{t_1} \left(X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}\right)dt \\ &= \int (X dx + Y dy + Z dz),\end{aligned} \tag{6c}$$

其中线积分展布于质点从 t_0 到 t_1 经过的路径上. 有向弧上的积分

$$\int X dx + Y dy + Z dz$$

1) 由于解微分方程可认为是通常积分过程的一般化, 因而在这里用积分一词.

称为沿该弧运动时力 $\mathbf{F} = (X, Y, Z)$ 所作的功[1]. 因此, (6c) 称为能量方程: 动能的增加等于在运动中外力所作的功.

如果力场能表成某函数的梯度, 即

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad} \phi, \tag{7a}$$

在这种重要情形下, 微分形式

$$X dx + Y dy + Z dz = d\phi$$

的积分不依赖于路径, 仅依赖于路径的起点和终点 (见第 104 页). 按照 Helmholtz (亥姆霍兹) 的说法, (7a) 类型的力场称为保守场[2]. 对保守场, 用 $U = -\phi$ 引入势能 (位能) U, 则运动方程的形状是:

$$m\ddot{\mathbf{R}} = -\operatorname{grad} U$$

或, 用分量式,

$$m\ddot{x} = -U_x, \quad m\ddot{y} = -U_y, \quad m\ddot{z} = -U_z. \tag{7b}$$

势能作为位置 (x, y, z) 的函数, 在相差一个任意常数的范围内, 是由力场所确定的. 我们得到保守力在运动中所作的功为

$$\int X dx + Y dy + Z dz = -\int dU = U_0 - U_1,$$

其中 U_0 和 U_1 分别是质点在时刻 t_0 和 t_1 的位置上的势能的值. 与 (6c) 比较, 得到

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + U_1 = \frac{1}{2} m v_0^2 + U_0.$$

---

1) 见第一卷第 469 页. 引入弧长 s 作参数, 线积分有形式

$$\int \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{R}}{ds} ds,$$

因而, 它等于力沿运动方向的分量与距离乘积的和的极限.

2) "保守" 一词源出于我们马上将要推出的能量守恒定理.

因此，在运动中量 $\frac{1}{2}mv^2+U$ 在任何时刻 t_0 和 t_1 有相同的值. 无须作这些概念的物理解释，我们已经得到了保守力场中质点的 **能量守恒定律** 的一种形式：

总能量 —— **即**，**动能** $\frac{1}{2}mv^2$ **与势能** U **之和**——**在运动中保持常数**.

在下节的例题里，我们演示这个定理怎样用于运动方程的实际求解.

由方程 (3) 和 (4a) 定义的两个力场都是保守场. 在均匀重力场 (3) 中，运动方程化简为

$$\ddot{x}=0,\quad \ddot{y}=0,\quad \ddot{z}=-g. \tag{8a}$$

很简单，它们的通解是

$$x=a_1t+a_2,\quad y=b_1t+b_2,\quad z=-\frac{1}{2}gt^2+c_1t+c_2. \tag{8b}$$

显然，这里常数 (a_2,b_2,c_2) 给出质点在时间 $t=0$ 的初位置，常数 (a_1,b_1,c_1) 给出初速度. 由方程 (8b) 以时间 t 作为参数给出的质点轨迹，是其轴平行于 z 轴的一条抛物线. 由于力场是 $-mg\operatorname{grad}z$，势能应是 $U=mgz+$ 常数. U 的变化与高度 z 的变化成比例. 因而，能量守恒定律的形式为

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2+mgz&=\text{常数}=\frac{1}{2}mv_0^2+mgz_0 \\ &=\frac{1}{2}m\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2\right)+mgc_2.\end{aligned} \tag{8c}$$

所以，在轨道的最高点处速度 v 最小.

代替质点的自由降落，我们考虑在重力场 $\mathbf{F}=-mg\operatorname{grad}z$ 的影响下，约束于曲面 $z=f(x,y)$ 之上，且反作用力垂直于该曲面 [1] 的质点的运动. 由于反作用力在运动方向上没有分力，因而

1) 球面摆提供了一个例子，在那里，一个质点被约束在一球面上运动. 试与第一卷讨论过的曲线上的运动进行比较.

不作功，在运动中所作的功是保守重力场作的功. 因此，可得出与自由落体一样的能量方程

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz = 常数, \tag{9}$$

区别仅在于现在 $z = f(x,y)$ 是坐标 x,y 的一个给定的函数.

c. 平衡. 稳定性

保守力场中质点的运动方程

$$m\ddot{\mathbf{R}} = -\operatorname{grad} U \tag{10a}$$

能用于讨论平衡位置附近的运动. 如果质点保持静止，我们称它在力场的影响下平衡. 为使质点平衡，在考虑的整个时间间隔里它的速度和加速度必须都是 0. 因此，运动方程 (10a) 引出

$$\operatorname{grad} U = 0 \tag{10b}$$

或

$$U_x = U_y = U_z = 0 \tag{10c}$$

是平衡的必要条件. 从而，**一个平衡位置** (x_0, y_0, z_0) **必是势能** U **的一个临界点**. 反之，因为常数向量

$$\mathbf{R} = (x_0, y_0, z_0)$$

显然满足 (10a)，所以，U 的每一临界点 (x_0, y_0, z_0) 都是静止的一个可能的位置.

特别重要的是平衡的 **稳定性** 概念. **稳定性** 是指：如果给平衡状态以轻微的扰动，由此产生的整个运动与静止状态仅有微小的区别 [1]. 更确切地说就是，设 r_1 和 v_1 是任意正数，我们能找到与

---

1) 用约束于曲面 $z = f(x,y)$ 上，在重力作用下的质点的类似的二维运动问题能够很好地解释这个概念. 因平衡位置是势能 $mgz = mgf(x,y)$ 的临界点，在此，就是曲面 $z = f(x,y)$ 的最高点或最低点或鞍点. 在重力作用下，处在向下凸的球形碗的最低点的静止质点的平衡是稳定的. 相反，在向上凸的球形碗的最高点静止的质点处于不稳定平衡；即使最轻微的扰动都会引起位置的巨大变化. 由于总可以假设质点受到小扰动，所以，不稳定平衡是不能保持的，并且未必能观察得到.

r_1 和 v_1 对应的如此之小的两个正数 r_0, v_0, 使得只要质点离开平衡位置移动的距离不大于 r_0, 且出发时的速度不大于 v_0, 那么在它整个后继的运动中它与平衡点的距离永远不能大于 r_1 及速度永远不能大于 v_1.

特别有趣的是, 在势能取严格相对最小值[1)] (相对最小值即极小值 —— 译者注) 的点上, 平衡是稳定的. 值得注意的是, 我们无须实际解出运动方程就能证明关于稳定性的这个命题. 为简单起见, 假设考虑的平衡位置是原点 (借助变换总是能作到的), 此外, 因为势能允许加上一个任意常数, 故我们可假定 $U(0,0,0)=0$. 由于 U 在原点是严格相对最小值, 我们能找到正数 $r<r_1$, 使得关于原点的半径为 r 的球面及其内部除原点外处处有 $U>0$. 因此, U 在球面上的最小值是一正数 a. 因为 U 连续, 我们可求得 $r_0<r$, 使得在关于原点的半径为 r_0 的球体内

$$U(x,y,z)<\frac{a}{2} \text{和} U(x,y,z)<\frac{1}{4}mv_1^2.$$

此外, 设正数 v_0 小到使 $\frac{1}{2}mv_0^2<\frac{a}{2}$ 和 $\frac{1}{2}mv_0^2<\frac{1}{4}mv_1^2$ 都成立. 那么, 当质点的初位置与原点距离小于 r_0, 初速度小于 v_0 时, 质点的初始总能量就满足不等式

$$\frac{1}{2}mv^2+U(x,y,z)\leq\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{1}{2}a<a, \tag{11a}$$

$$\frac{1}{2}mv^2+U(x,y,z)<\frac{1}{4}mv_1^2+\frac{1}{4}mv_1^2=\frac{1}{2}mv_1^2. \tag{11b}$$

由于能量在整个运动中是常数, 从 (11a) 看出, 在后来的任何时刻

$$\frac{1}{2}mv^2+U(x,y,z)<a,$$

从而,

$$U(x,y,z)<a.$$

---

1) 在严格 (相对) 最小点上, U 的值小于它的一个充分小邻域内的所有其余点上的值. 定义见第 357–358 页.

由于质点最初处于半径为 r 的球的内部，又由于在球面上 $U \geq a$，因此，质点永远不能到达此球的表面. 这就证明了质点与原点的距离永远不能超过 $r < r_1$. 又因在半径为 r 的球内部 $U \geq 0$, 从 (11b) 可得

$$\frac{1}{2}mv^2 < \frac{1}{2}mv_1^2,$$

因此，质点的速度永远不能超过值 v_1, 证毕.

d. 在平衡位置附近的小振动

在对应于势能最小值的稳定平衡位置附近的质点运动能用简单方法去近似. 为简单起见，限于讨论在 x,y 平面上的运动，并假设没有作用于 z 轴方向上的力. 我们还假设势能 $U(x,y)$ 在原点取最小值， $U(0,0) = 0$. 此外，在这个最小值点上 $U_x = U_y = 0$. 按 Taylor(泰勒) 定理展开 U 得到

$$U = \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) + \cdots\cdots.$$

如果二次型

$$Q(x,y) = \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) \tag{12a}$$

正定[1], 也就是

$$a > 0, \quad ac - b^2 > 0, \tag{12b}$$

则函数 U 在原点有严格相对最小值. 假设满足条件 (12b), 则在平衡位置原点的充分小的邻域内能够用二次型 Q 足够准确地代替势能 U[2]，在此假设下，运动方程形为

$$m\ddot{\mathbf{R}} = -\operatorname{grad} Q$$

或

---

1) 见第 382 页， Q 的正定性质是严格相对最小值的充分条件，但并非必要的. 但是， Q 既非不定又非负定是必要的.

2) 我们不试图在此严格检验这一“似乎有理”的假设是合理的.

$$m\ddot{x} = -ax - by, \quad m\ddot{y} = -bx - cy.\ ^{1)} \tag{12c}$$

如果先将 x, y 轴旋转一个适当选择的角度 ϕ, 使新坐标轴与椭圆 $Q=$ 常数的主轴重合, 那么方程 (12c) 能够完全积分. 作正交变换

$$x = \xi \cos\phi - \eta \sin\phi, \quad y = \xi \sin\phi + \eta \cos\phi,$$

此处 ϕ 根据下式确定

$$Q = \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) = \frac{1}{2}(\alpha\xi^2 + \gamma\eta^2),$$

其中 α, γ 是适当的正数 [2). 在新的直角坐标系 ξ, η 中, 运动方程

---

1) 我们可再来解释这些方程近似于被约束于曲面 $z = f(x, y)$ 之上并在曲面最小值点附近运动的质点在重力作用下的运动方程. 考虑到质点受重力 $(0, 0, -mg)$ 和与曲面垂直的反作用力 $(-\lambda f_x, -\lambda f_y, \lambda)$ (λ 是未定乘子) 的作用, 这里确切的运动方程是

$$\ddot{x} = -\lambda f_x, \quad \ddot{y} = -\lambda f_y, \quad \ddot{z} = -g + \lambda.$$

注意到

$$\ddot{z} = \frac{d^2 f}{dx^2} = f_x\ddot{x} + f_y\ddot{y} + f_{xx}\dot{x}^2 + 2f_{xy}\dot{x}\dot{y} + f_{yy}\dot{y}^2,$$

我们可消去 λ, 而且得到关于两个未知函数的方程

$$\ddot{x} = -\lambda f_x, \quad \ddot{y} = -\lambda f_y,$$

其中

$$\lambda = \frac{g + f_{xx}\dot{x}^2 + 2f_{xy}\dot{x}\dot{y} + f_{yy}\dot{y}^2}{1 + f_x^2 + f_y^2}.$$

如果 f 在原点取最小值, 并由二次型

$$f = \frac{1}{2}(\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2) \tag{13a}$$

作近似. 则在原点附近, 忽略全部非线性项后, 得到形如 (12c) 的微分方程

$$\ddot{x} = -g(\alpha x + \beta y), \quad \ddot{y} = -g(\beta x + \gamma y). \tag{13b}$$

例如, 如果曲面是球面

$$z = L - \sqrt{L^2 - x^2 - y^2}$$

("长度为 L 的球面摆"), 我们得出

$$\ddot{x} = -\frac{g}{L}x, \quad \ddot{y} = -\frac{g}{L}y. \tag{13c}$$

2) 我们立即看到, ϕ 是由方程

$$\operatorname{tg} 2\phi = \frac{2b}{a - c}$$

决定的. 由 Q 的正定性推出 α, γ 为正.

(12c) 变成

$$m\ddot{\xi} = -\alpha\xi, \quad m\ddot{\eta} = -\gamma\eta. \tag{14a}$$

与第一卷 (第 459 页) 一样，这两个方程都能完全积分. 我们得到

$$\xi = A_1 \sin\sqrt{\frac{\alpha}{m}}(t - c_1), \quad \eta = A_2 \sin\sqrt{\frac{\gamma}{m}}(t - c_2), \tag{14b}$$

此处 c_1, c_2, A_1, A_2 是积分常数，它们能使运动满足任何指定的初条件 [1].

解的形式说明，在稳定平衡位置附近的运动是由 ξ 和 η 两个**主方向**上的简谐振动叠加而成的，振动的频率是 $\sqrt{\frac{\alpha}{m}}$ 和 $\sqrt{\frac{\gamma}{m}}$ [2]. 这类振动的一般讨论证明，复合运动可以取多种形式，但在这里我们将不作这样的讨论.

举几个这类复合振动的例子. 我们首先考虑由方程

$$\xi = \sin(t + c), \quad \eta = \sin(t - c)$$

表示的运动. 消去时间 t, 得到方程

$$(\xi + \eta)^2 \sin^2 c + (\xi - \eta)^2 \cos^2 c = 4 \sin^2 c \cos^2 c,$$

它表示一个椭圆. 振动的两个分量有相同的频率 1 和相同的振幅 1, 但是位相差为 $2c$. 如果位相差连续取 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 间的全体值，对应的椭圆就从退化直线 $\xi - \eta = 0$ 变到圆 $\xi^2 + \eta^2 = 1$, 而振动从所谓线性振动变到圆振动 (参看图 6.1—6.3).

第二例，如果考虑由方程

$$\xi = \sin t, \quad \eta = \sin 2(t - c)$$

表示的运动, 其中频率不再相等, 我们得到显然更复杂的振动图像. 图 6.4—6.6 分别给出位相差为 $c = 0$, $c = \frac{\pi}{8}$ 和 $c = \frac{\pi}{4}$ 的曲线. 在

---

1) 有趣的是，在不稳定平衡的情况下，常数 α, γ 至少一个是负的，(14b) 中的三角函数要用双曲函数代替，坐标 ξ, η 不能同时保持对所有的 t 有界.

2) 在球面摆 (13c) 的情形下，两频率有相同的值 $\sqrt{\frac{g}{L}}$.

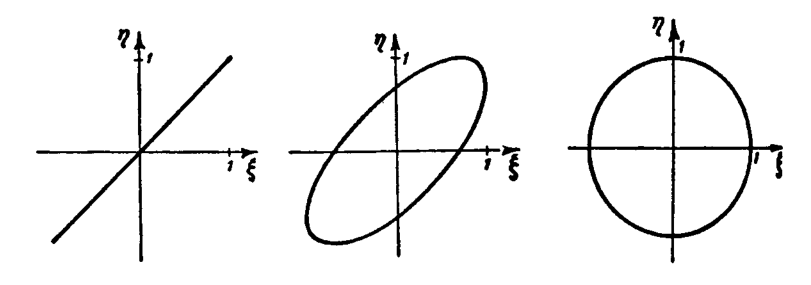


图 6.1—6.3　振动的简图

前两种情况下，质点在一条封闭曲线上连续运动，但在最后一种情况下，它在抛物线 $\eta = 2\xi^2 - 1$ 的弧上往复摆动. 两相交成直角的方向上的不同简谐振动迭加得到的曲线通常称为 Lissajous 图形.

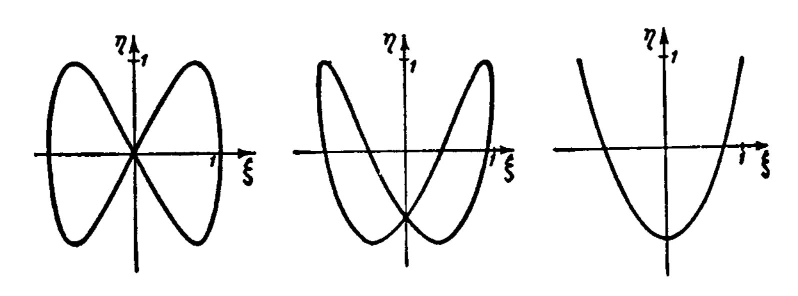


图 6.4—6.6　振动的简图

e. 行星运动 [1]

在上面讨论的例题中，运动微分方程能够直接 (或经简单的变换后) 被写成每一坐标仅出现在一个微分方程当中，因而能用初等积分法来定解. 现在，我们来考虑一种最重要的运动情况，这时运动方程已不再能够分离成上述简单形式，以至在积分它们时多少包含着更复杂的计算. 所讨论的问题是**从牛顿引力定律推导开普勒 (Kepler) 行星运动定律**. 假设在坐标系的原点有一质量为 μ 的物体

1) 圆运动的特殊情形已在第一卷中讨论过.

(例如, 太阳), 每单位质量受它的万有引力是向量

$$\gamma\mu \operatorname{grad} \frac{1}{r}.$$

质量为 m 的质点 (一个行星) 在这个力场影响下怎样运动呢? 运动方程是 (见第 800 页)

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\gamma\mu\frac{x}{r^3}, \\ \ddot{y} &= -\gamma\mu\frac{y}{r^3}, \\ \ddot{z} &= -\gamma\mu\frac{z}{r^3}. \end{aligned} \tag{15}$$

为了积分它们, 我们首先把能量守恒定律 (见第 803 页) 写成

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{\gamma\mu m}{r} = C,$$

其中 C 在整个运动中是由初条件决定的常数.

从 (15) 能推出仅包含速度分量, 而不包含加速度分量的方程. 如果用 y 乘第一个运动方程, 用 x 乘第二个运动方程, 然后相减, 就得到

$$\ddot{x}y - y\ddot{x} = 0 \text{ 或 } \frac{d}{dt}(\dot{x}y - \dot{y}x) = 0,$$

积分得

$$x\dot{y} - \dot{y}x = c_1,$$

类似地, 从其余运动方程得到 [1]

$$y\dot{z} - z\dot{y} = c_2, \quad z\dot{x} - x\dot{z} = c_3.$$

---

1) 应用向量概念也能得到这三个方程. 如果用定位向量 $\mathbf{R}$ 对运动方程两端作向量叉积, 由于力向量与定位向量同向, 于是右端得 0, 左端的表达式 $\mathbf{R}\times\ddot{\mathbf{R}}$ 是向量 $\mathbf{R}\times\dot{\mathbf{R}}$ 关于时间 t 的导数, 所以, 推出向量 $\mathbf{R}\times\mathbf{R} = \boldsymbol{C}$ 对时间有常数值; 这正与上面坐标方程所说明的一样.

正如我们见到的, 这个方程不依赖于我们特殊的问题, 而一般地适用于力与定位向量同向的每一运动.

向量 $\mathbf{R}\times\dot{\mathbf{R}}$ 称为 **速度矩**, 而向量 $m\mathbf{R}\times\dot{\mathbf{R}}$ 称为运动的 **动量矩**. 从向量叉积的几何意义容易得到刚才给出的关系式的下述直观解释 (参看正文中后面的讨论). 如果把运动质点投影到坐标平面上, 在第一坐标平面上考虑从原点到点的投影的向径在时间 t 内扫过的面积, 那么该面积与时间成比例 (**面积定理**).

这些方程能够用从直觉的观点来看似乎很有道理的方法来极大地简化我们的问题. 不失一般性, 我们可选坐标系使运动开始时(即 $t=0$ 时), 质点位于 x,y 平面上, 它的速度向量同时也在这平面上, 于是 $z(0)=0$, $\dot{z}(0)=0$, 将它们代入上面方程, 注意右端是常数, 可得

$$x\dot{y}-y\dot{x}=c_1=h, \tag{16a}$$

$$y\dot{z}-z\dot{y}=0, \tag{16b}$$

$$z\dot{x}-x\dot{z}=0. \tag{16c}$$

首先, 从这些方程可断言整个运动处于平面 $z=0$ 上. 由于, 自然要排除太阳和行星最初相碰的可能性, 应设三个坐标 (x,y,z) 最初不同时为 0, 从而在 $t=0$ 时, 由 $z(0)=0$ 我们有, 比如说, $x(0)\neq 0$. 现在, 从 (16c) 推知

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{z}{x}\right)=-\frac{z\dot{x}-\dot{z}x}{x^2}=0,$$

因而, $z=ax$, a 是常数. 如果在此取 $t=0$, 则由方程 $z(0)=0$ 和 $x(0)\neq 0$ 推知 $a=0$, 这样一来 z 永远是 0.

因此, 问题化简为积分下列两个微分方程

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-\frac{\gamma\mu m}{r}=C, \tag{17a}$$

$$x\dot{y}-y\dot{x}=h. \tag{17b}$$

用 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ 把直角坐标 (x,y) 变到极坐标 (r,θ), 其中 r,θ 现在都是 t 的待定函数. 由

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2,\quad x\dot{y}-y\dot{x}=r^2\dot{\theta},$$

得到关于极坐标 r,θ 的两个微分方程

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-\frac{\gamma\mu m}{r}=C, \tag{17c}$$

$$r^2\dot{\theta}=h. \tag{17d}$$

前一方程是能量守恒定理，而后一方程表示了开普勒面积定律. 事实上表达式 $\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$ 是原点到质点的向径在时间 t 内扫过的面积关于时间的导数. 我们发现它是常数，或者，按照开普勒的说法，向径在相等时间内扫过相等的面积.

如果面积常数 h 是 0, 则 $\dot{\theta}$ 必为 0; 即 θ 保持常数，这样一来运动必然处于通过原点的一条直线上，我们排除这种特殊情况，特意假设 $h \neq 0$.

为求得轨道的几何形状，我们将不再用时间作为参数来描述它 [1), 而把角 θ 考虑成 r 的函数，或把 r 作为 θ 的函数，从上面两个方程，我们来计算导数 $\frac{dr}{d\theta}$ 成为 r 的函数.

从面积方程得 $\dot{\theta} = h/r^2$, 代入能量方程，并注意

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta},$$

立即就有形如

$$\frac{m}{2}\left[\frac{h^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{h^2}{r^2}\right] - \frac{\gamma\mu m}{r} = C$$

或

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = r^4\left(\frac{2C}{mh^2} + \frac{2\gamma\mu}{h^2}\cdot\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}\right) \tag{17e}$$

的轨道微分方程.

为了简化以后的计算，作变换

$$r = \frac{1}{u}$$

并引入以下的简写记号

$$\frac{1}{p} = \frac{\gamma\mu}{h^2}, \quad \varepsilon^2 = 1 + \frac{2Ch^2}{m\gamma^2\mu^2},$$

---

1) 运动过程作为时间的函数，以后可用方程

$$\int_{\theta_0}^{\theta} r^2 d\theta = h(t - t_0)$$

来确定，其中设 r 是 θ 的已知函数 (参阅第 826 页).

微分方程 (17e) 于是变成

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2=\frac{\varepsilon^2}{p^2}-\left(\dot{u}-\frac{1}{p}\right)^2,$$

而这可以直接积分，得到

$$\theta-\theta_0=\int\frac{du}{\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{p^2}-\left(u-\frac{1}{p}\right)^2}},$$

或，如果这时引入新变量 $v=u-\frac{1}{p}$, 则

$$\theta-\theta_0=\int\frac{dv}{\sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{p}\right)^2-v^2}}$$

我们 [按第一卷第 304 页公式 (24)] 得到积分的值是 $\operatorname{arc}\sin(pv/\varepsilon)$, 故轨道方程形如

$$\frac{1}{r}-\frac{1}{p}=v=\frac{\varepsilon}{p}\sin(\theta-\theta_0).$$

由于从哪条固定直线开始计算角度 θ 是无关紧要的，所以角 θ_0 可任意选取. 如果取 $\theta_0=\frac{\pi}{2}$—— 即，如果取 $v=0$ 与 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 相对应 —— 我们最终得到形如

$$r=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\theta}$$

的轨道方程, 这就是熟知的以原点为一个焦点的圆锥曲线的极坐标方程 [1).

因此，得到开普勒定律:

---

1) 把方程变到直角坐标得

$$(x-\varepsilon a)^2+\frac{y^2}{1-\varepsilon^2}=a^2\left(a=\frac{p}{1-\varepsilon^2}\right)$$

就容易看出这一点.

行星沿以太阳为一焦点的圆锥曲线运动.

积分常数

$$p=\frac{h^2}{r\mu},\quad \varepsilon^2=1+\frac{2Ch^2}{m\gamma^2\mu^2}$$

与初始运动的关系是有趣的. 量 p 以圆锥曲线的半正焦弦或参数而闻名；在椭圆和双曲线的情形，它与半轴 a 和 b 以简单的关系式

$$p=\frac{b^2}{a}$$

相联系；而离心率的平方 ε^2 决定了圆锥曲线的特征；它是椭圆、抛物线或双曲线取决于 ε^2 小于、等于或大于 1.

从关系式

$$\varepsilon^2=1+\frac{2Ch^2}{m\gamma^2\mu^2}$$

立刻看出三种不同的可能性也能用能量常数 C 来叙述：轨道是椭圆、抛物线或双曲线，视 C 小于、等于或大于 0 而定.

如果设 $t=0$ 时，质点在力场中的点 $\mathbf{R}_0$ 处，并以初速度 $\dot{\mathbf{R}}_0$ 运动，则关系式

$$C=\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{\gamma\mu m}{r_0}$$

给出令人惊奇的事实：轨道的特征 —— 椭圆、抛物线，或双曲线 —— 全然不依赖于初速度的方向，而仅仅依赖于其绝对值 v_0 的大小.

开普勒第三定律是其它两个定律的简单推论：

沿椭圆轨道运行的行星，其周期的平方与长半轴立方的比值为常数，比值仅依赖于力场，而不依赖于具体的行星.

如果以 T 表示周期，以 a 表示长半轴，则有

$$\frac{T^2}{a^3}=\text{常数},$$

式中右端的常数与具体问题无关，仅依赖于吸引质量的大小和引力常数.

为证明这个结论，要用面积定律 (17d) 的积分形式

$$\int_{\theta_0}^{\theta} r^2 d\theta = h(t-t_0),$$

它把运动定义成时间的函数. 如果在从 0 到 2π 的区间上求积分，我们在左端得到轨道椭圆的面积的两倍，用以前的结果，就是 $2\pi ab$; 在右端，时间差 $t-t_0$ 应该用周期 T 代替. 于是

$$2\pi ab = hT \text{ 或 } 4\pi^2 a^2 b^2 = h^2 T^2.$$

我们已知 h^2 与轨道的 a, b 间有关系 $h^2/\gamma\mu = p = b^2/a$. 如果在上述方程中用 $(b^2/a)\gamma\mu$ 代替 h^2, 立即推得

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma\mu},$$

它正表达了开普勒第三定律.

练 习 6.1 e

1. 详细讨论一个天体在直线轨道上的运动 [在方程 (17d) 中 $h=0$].

2. 证明：如果轨道是抛物线，则在 $t\to+\infty$ 时行星速度趋向 0; 如果轨道是双曲线，则在 $t\to+\infty$ 时行星速度趋向正的极限.

3. 证明：受到指向中心 O 处的大小为 mr 的吸引力的物体沿以 O 为中心的椭圆运动.

4. 证明：在极坐标 (r,θ) 中，受到从中心 O 处的大小为 $f(r)$ 的排斥力的物体的轨道是

$$\theta = \int^r \frac{dr}{r^2\sqrt{2c/h^2 + 2\int^r f(r)dr/h^2 - 1/r^2}},$$

其中 f 是给定的函数.

5. 证明：受从中心 O 处的一排斥力 $\frac{\mu}{r^3}$ 的物体的运行轨道方程是

$$\frac{1}{r}=\begin{cases}\frac{2c}{h^2k}\cos(k\theta+\varepsilon), & \text{当}\,\mu<h^2,\\ \frac{2c}{h^2k}\cosh(k\theta+\varepsilon), & \text{当}\,\mu>h^2,\end{cases}$$

设

$$k=\sqrt{\left|1-\frac{\mu}{h^2}\right|},$$

而 ε 是积分常数.

6. 一行星在椭圆轨道上运动. $\omega=\omega(t)$ 表示角 $P'MP_s$, 其中 P' 是行星在时刻 t 的位置 P 在辅助圆的对应点, P_s 是与太阳 S 最接近的时刻 t_s 的位置; M 是椭圆中心. 证明 ω 与 t 满足开普勒方程

$$h(t-t_s)=ab(\omega-\varepsilon\sin\omega).$$

7. 证明：在有心引力场中每单位质量受到的吸引力是

$$p=\frac{h^2}{q^3}\frac{dq}{dr},$$

其中 q 是从极点到轨道的切线的距离， h 是面积常数 (第 778 页). 由此证明，极点对单位质量的吸引力等于 μr^{-4} 时，运动轨道是心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$.

8. 一单位质量的质点在两个力作用下运动. 一个力永远指向原点而大小等于从原点到质点距离的 λ^2 倍. 另一个力永远与质点的路径正交而大小等于速度的 2μ 倍. 证明：如果质点从原点沿 x 轴以速度 u 出发，则在以后任意时刻 t, 它的坐标是

$$x=\frac{u}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\sin(\sqrt{\lambda^2+\mu^2}t)\cos\mu t,$$
$$y=\frac{u}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\sin(\sqrt{\lambda^2+\mu^2}t)\sin\mu t.$$

9. 设平面上有 n 个固定的质点，它们都产生大小为 $\frac{1}{r}$ 的有心吸引力. 证明：一个质点在该力场中的平衡位置不多于 $n-1$ 个.

计算坐标为 $(a,b),(a,-b),(-a,b),(-a,-b)$ 四个吸引质点情况下的平衡位置，其中 $a>b>0$.

f. 边值问题. 有载荷的缆与有载荷的梁

在前面讨论过的力学问题和其它例子中，我们是在满足微分方程的整个函数族中按照所谓 初条件 去选出特殊的一个；即，我们适当选择积分常数使得解，有时还有它的某些导数，在一个固定点上取预先指定的值. 在很多应用问题中，我们既不是寻求通解，也不是解一定的初值问题，而是要解所谓 边值问题 了. 在边值问题中要寻求在 几个 点上满足指定条件并在这些点间的区间上满足微分方程的解. 这里我们不进入边值问题的一般理论，仅讨论几个典型的例子.

例 1. 有载荷的缆的微分方程.

在直立的 x,y 平面上 —— 其 y 轴是直立的 —— 假设缆被水平分量为 S (常数) 的张力拉紧在原点和 $x=a, y=b$ 之间 (参看图 6.7). 缆受到的载荷在水平投影的单位长度上的密度是分段连续函数 $p(x)$. 于是，微分方程

$$y''=g(x),\quad g(x)=\frac{p}{S} \tag{18}$$

给出了缆的垂度 $y(x)$, 即 y 坐标. 因此，缆的形状由这个方程的满足条件 $y(0)=0$, $y(a)=b$ 的那个解所给出. 由于线性函数 c_0+c_1x 是齐次方程 $y''=0$ 的通解，而积分 $\int_0^x g(\xi)(x-\xi)d\xi$ 是非齐次方程在原点处连同一阶导数为 0 的解 [见第 85 页 (42)], 所以，可立即写出这个边值问题的解：在通解

$$y(x)=c_0+c_1x+\int_0^x g(\xi)(x-\xi)d\xi$$

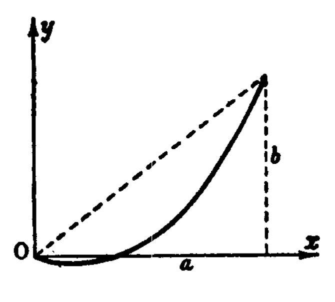


图 6.7　有载荷的缆

中，由条件 $y(0)=0$ 立即得 $c_0=0$，此外，根据条件 $y(a)=b$，通过方程

$$b=c_1a+\int_0^a g(\xi)(a-\xi)d\xi$$

就定出了 c_1.

实际上，经常必须处理形式更复杂的这类边值问题，那时缆不仅承受连续分布的载荷，而且还受集中载荷的作用，即载荷集中在缆的一个固定点上，例如，在点 $x=x_0$ 上. 这种集中载荷被考虑作为载荷 $p(x)$ 当 $\varepsilon\to 0$ 的一种理想的极限情形，这里 $p(x)$ 仅作用在区间 $x_0-\varepsilon$ 到 $x_0+\varepsilon$ 上，且总载荷

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} p(x)dx=P$$

在 $\varepsilon\to 0$ 的过程中保持是常数；量 P 称为作用于 x_0 点的集中载荷 [1]. 在取 $\varepsilon\to 0$ 的极限之前，在从 $x_0-\varepsilon$ 到 $x_0+\varepsilon$ 的区间上去积分微分方程 $y''=p(x)/S$ 的两端，易见

$$y'(x_0+\varepsilon)-y'(x_0-\varepsilon)=P/S$$

1) 通常把集中载荷纯形式地写成载荷分布

$$p(x)=P\delta(x-x_0).$$

其中 $\delta(x)$ 是广义函数 (所谓狄拉克(Dirac) 函数):

当 $x\neq 0$ 时 $\delta(x)=0$，且 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=1$.

$\delta(0)$ 无定义. 显然，任何 $\delta(0)$ 的有限值都与所提的其它条件不相容.

成立. 如果现在取极限 $\varepsilon \to 0$, 我们得到结论: 作用于点 x_0 的集中载荷对应着导数 $y'(x)$ 在点 x_0 的一个大小为 P/S 的跳跃.

下面的例子说明集中载荷的出现怎样改变了边值问题. 设缆张拉在 $x=0$, $y=0$ 与 $x=1$, $y=1$ 两点之间, 仅在中点 $x=\frac{1}{2}$ 上受到大小为 P 的集中载荷. 这个物理问题对应于下述数学问题: 寻求一连续函数 $y(x)$, 它在区间 $0 \le x \le 1$ 上除 $x_0=\frac{1}{2}$ 点外处处满足微分方程 $y''=0$; 它取边值 $y(0)=0$, $y(1)=1$; 并且它的导数在 x_0 有跳跃 P/S. 为求此解, 我们把它表示为

$$y(x)=ax+b \quad \left(0 \le x \le \frac{1}{2}\right)$$

和

$$y(x)=c(1-x)+d \quad \left(\frac{1}{2} \le x \le 1\right).$$

条件 $y(0)=0$, $y(1)=1$ 给出 $b=0$, $d=1$. 从函数的两段在 $x=\frac{1}{2}$ 点应有同一值的条件, 得到

$$\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}c+1.$$

最后, 由于要求 y 的导数在通过 $x=\frac{1}{2}$ 时增加 P/S, 给出条件

$$-c-a=P/S.$$

从这些条件得到

$$a=1-\frac{P}{2S},\ b=0,\ c=-1-\frac{P}{2S},\ d=1,$$

并且找出了问题的解. 此外, 不存在具有相同性质的其它解.

例 2. 有载荷的梁 [1].

有载荷的梁的处理是非常类似的 (参看图 6.8). 设梁的静止位置与横坐标 $x=0$, $x=a$ 之间的 x 轴重合. 则四阶线性微分方程

1) 关于有载荷的梁的理论, 参阅 Karman 和 Biot 的《工程中的数学方法》.

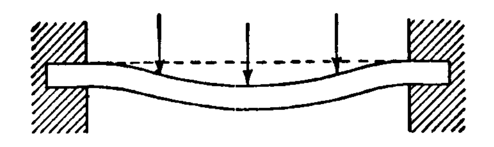


图 6.8　有载荷的梁

$$y'''' = \varphi(x) \tag{19a}$$

给出受沿 y 方向垂直作用力所产生的垂度 (垂直位移)$y(x)$, 其中右端 $\varphi(x)$ 是 $p(x)/EI, p(x)$ 是载荷密度, E 是梁材的弹性模量 (E 等于应力除以伸长率), I 是梁的横截面关于通过横截面质心的水平线的惯性矩.

可立即写出这个微分方程的通解 [见第 85 页 (42)]

$$y(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \int_0^x \varphi(\xi)\frac{(x-\xi)^3}{3!}d\xi,$$

其中 c_0, c_1, c_2, c_3 是任意积分常数. 但是实际问题不是求通解, 而是求特解, 即决定积分常数使得 $y(x)$ 满足某些确定的边条件. 例如, 如果梁的端点被夹紧, 边条件就是

$$y(0) = 0,\ y(a) = 0,\ y'(0) = 0,\ y'(a) = 0.$$

于是, 立刻得到 $c_0 = c_1 = 0$, 常数 c_2, c_3 可从方程组

$$c_2a^2 + c_3a^3 + \int_0^a \varphi(\xi)\frac{(a-\xi)^3}{3!}d\xi = 0.$$

$$2c_2a + 3c_3a^2 + \int_0^a \varphi(\xi)\frac{(a-\xi)^2}{2!}d\xi = 0$$

确定.

同样, 梁的集中载荷问题是重要的. 仍然把作用于点 $x = x_0$ 的集中载荷考虑成: 由在 $x_0 - \varepsilon$ 到 $x_0 + \varepsilon$ 的区间上连续分布的, 并使得

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} p(\xi)d\xi = P$$

在 $\varepsilon \to 0$ 的过程中始终保持常数值的载荷 $p(x)$ 当 ε 趋向于 0 时所产生的载荷. 那么, P 就是在 $x = x_0$ 的集中载荷的值. 完全同上

例一样, 我们在从 $x_0-\varepsilon$ 到 $x_0+\varepsilon$ 的区间上去积分微分方程 (19a) 的两端, 然后让 $\varepsilon\to 0$. 可以看到: 解 $y(x)$ 的三阶导数在点 $x=x_0$ 必有跳跃:

$$y'''(x_0+0)-y'''(x_0-0)=\frac{P}{EI}, \tag{19b}$$

这里 $y(x_0+0)$ 表示 $y(x_0+h)$ 当 h 通过正值趋向 0 的极限, $y(x_0-0)$ 是从左边的对应极限.

这样, 就提出了如下的数学问题: 我们要求 $y''''=0$ 的一个解, 使得它连同其一、二阶导数连续, 且

$$y(0)=y(1)=y'(0)=y'(1)=0,$$

它的三阶导数除在 $x=x_0$ 有大小为 P/EI 的跳跃外也是到处连续的.

如果梁在点 $x=x_0$ 被固定(参看图 6.9), 即, 如果在这点上垂度取预先指定的固定值 $y=0$, 则我们能够认为这一约束是由作用在这点的一集中载荷来达到的. 根据作用与反作用相等的力学原理, 这个集中载荷的值等于被固定的梁受到的支持力. 所以, 这个力的大小 P 立刻由公式 [见 (19b)]

$$P=EI[y'''(x_0+0)-y'''(x_0-0)]$$

给出, 其中 $y(x)$ 在区间 $0\leq x\leq 1$ 上除点 $x=x_0$ 外到处满足微分方程 $y''''=P/EI$, 而且也满足条件

$$y(0)=y(1)=y'(0)=y'(1)=0,\quad y(x_0)=0,$$

还有 y,y',y'' 也在 $x=x_0$ 连续.

为了说明这些想法, 考虑从点 $x=0$ 伸展到 $x=1$ 的梁, 端点 $x=0$ 与 $x=1$ 被夹紧, 承受密度为 $p(x)=1$ 的均匀载荷, 并且在点 $x=\frac{1}{2}$ 处被支承 (参看图 6.9). 为简单起见, 假设 $EI=1$, 于是, 除在 $x=\frac{1}{2}$ 外, 梁到处满足微分方程

$$y''''=1.$$

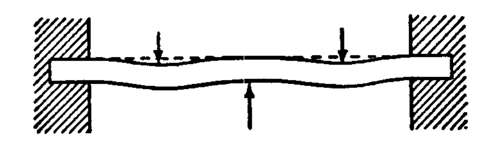


图 6.9　中点被支承的梁的垂度

如公式所示，这个微分方程的通解是 x 的四次多项式，x^4 的系数是 1/4!. 在两半区间的每一个上，解都被表成这种类型的多项式. 在左半区间上我们把多项式写成

$$y = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \frac{1}{4!}x^4,$$

在右半区间上，写成

$$y = c_0 + c_1(x-1) + c_2(x-1)^2 + c_3(x-1)^3 + \frac{1}{4!}(x-1)^4.$$

因为梁在两端 $x=0$ 与 $x=1$ 被夹紧，所以推得

$$y(0) = y(1) = y'(0) = y'(1) = 0,$$

由此得到 $b_0 = b_1 = c_0 = c_1 = 0$. 此外，$y(x), y'(x), y''(x)$ 必须在 $x=\frac{1}{2}$ 连续，即从两个多项式算出的 $y\left(\frac{1}{2}\right), y'\left(\frac{1}{2}\right), y''\left(\frac{1}{2}\right)$ 的值必须相同，且 $y\left(\frac{1}{2}\right)$ 的值必须是 0, 这给出

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}b_2 + \frac{1}{8}b_3 + \frac{1}{384} = \frac{1}{4}c_2 - \frac{1}{8}c_3 + \frac{1}{384} = 0,\\
&b_2 + \frac{3}{4}b_3 + \frac{1}{48} = -c_2 + \frac{3}{4}c_3 - \frac{1}{48},\\
&2b_2 + 3b_3 = 2c_2 - 3c_3.
\end{aligned}$$

由此可得 b_2, b_3, c_2, c_3 的值如下:

$$b_2 = c_2 = \frac{1}{96}, \quad b_3 = -c_3 = -\frac{1}{24}.$$

为了在 $x=\frac{1}{2}$ 点不出现垂度，在这点上必须作用于梁的力是

$$y'''\left(\frac{1}{2}+0\right) - y'''\left(\frac{1}{2}-0\right)$$

$$= \left(6c_3 - \frac{1}{2}\right) - \left(6b_3 + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

6.2 一般的一阶线性微分方程

a. 分离变量法

称微分方程为**一阶的**，如果它的两端包含 x 与 $y(x)$，函数 $y(x)$ 的一阶导数，但不包含更高阶的导数．这类方程最一般的形式是

$$F(x, y, y') = 0, \tag{20a}$$

其中 F 是它的三个变元 x, y, y' 的给定函数．我们可以假设在 x, y 平面的某一区域内，微分方程 (20a) 能唯一地解出 y'，从而可表成

$$y' = f(x, y). \tag{20b}$$

只能在特殊情况下求得微分方程 (20b) 的通解的显式公式 [1]．当 $f(x, y)$ 是 x 的函数与 y 的函数的商时，即微分方程形如

$$y' = \frac{\alpha(x)}{\beta(y)} \tag{21a}$$

时是最简单的情况．在这种情况下，我们能够将变量 x, y"分离"，形式地把方程写成

$$\beta(y)dy = \alpha(x)dx. \tag{21b}$$

引入普通求积法得到的两个不定积分

$$A(x) = \int \alpha(x)dx, \quad B(y) = \int \beta(y)dy, \tag{21c}$$

根据 (21a) 就有

$$\frac{dB(y)}{dx} = \frac{dB(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \beta(y) \cdot y' = \alpha(x) = \frac{dA(x)}{dx}.$$

1) 但是，我们将要在第 848 页讨论，在 f 有连续的一阶导数的情况下能够给出方程 (20b) 的解的通用的近似方法.

由此推知对于 (21a) 的每一个解都有

$$B(y) - A(x) = c, \tag{21d}$$

其中 c 是常数 (依赖于解)[1]. 任给定 c 值, 可对 y 解出方程 (21d), 这样用求积法就得到了 (21a) 的需求的解.

实际上, 在引进微分方程的各种问题中 (见第一卷第 454 页, 第二卷第 812 页) 我们已经用过这种分离变量法了. 另一类可化为 (21a) 形式的微分方程是所谓 **齐次** 方程

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{21e}$$

引进新未知函数 $z = \frac{y}{x}$, 就得到微分方程

$$z' = \frac{xy' - y}{x^2} = \frac{f(z) - z}{x},$$

它是变量分离的, 于是, 从关系式

$$\int \frac{dz}{f(z) - z} = \int \frac{dx}{x} + c = c + \log|x| \tag{21f}$$

可得通解, 其中 c 是常数. 我们用这个方程把 z 表成 x 的函数, 再令 $y = xz$ 就得要求之解.

以方程

$$y' = \frac{y^2}{x^2}$$

为例, 相应的 $f(z) = z^2$. 关系式 (21f) 此时变成

$$\int \frac{dz}{z^2 - z} = \log\frac{z - 1}{z} = c + \log|x|.$$

因此

$$y = \frac{x}{1 - kx},$$

1) 在 (21d) 的求导中不用链锁法则, 而且 (21b, c) 也可证明

$$d(B - A) = dB - dA = \beta dy - \alpha dx = 0$$

因此, $B - A$ 是常数.

其中 $k = \pm e^c$ 是常数.

b. 一阶线性方程

称微分方程为 线性 的, 如果它能表成未知函数 y 及其导数的, 以 x 的给定函数为系数的线性关系式. 所以, 一般的一阶线性微分方程的形式为

$$y' + a(x)y = b(x), \tag{22a}$$

其中 $a(x)$ 与 $b(x)$ 为给定.

先设 $b = 0$. 则方程是变量分离的, 而且可写成

$$\frac{dy}{y} = -a(x)dx.$$

因此

$$\log|y| = -\int a(x)dx + \text{常数}.$$

用 $A(x)$ 表示 $a(x)$ 的任一不定积分, 即任一以 $a(x)$ 为导数的函数, 我们就得到

$$y = ce^{-A(x)}. \tag{22b}$$

其中 c 是任意积分常数. 甚至当 $c = 0$ 时, 这个公式也给出一解, 即, $y = 0$.

如果 $b(x)$ 不恒为 0, 我们来寻求形如

$$y = u(x)e^{-A(x)} \tag{22c}$$

的解, 其中 A 的定义如前, $u(x)$ 必须适当地加以确定 [1]. 代入 (22a) 得

$$y' + ay = u'e^{-A} - uA'e^{-A} + aue^{-A} = u'e^{-A} = b.$$

因此, 未知函数 u 必有导数

$$u' = b(x)e^{A(x)}.$$

1) 用变量 u 代替 (22b) 中常数 c 的方法称为 常数变易法(参数变易法).

于是

$$u = c + \int b(x)e^{A(x)}dx,$$

其中 c 是常数. 我们得到 (22a) 的解的表达式

$$y = e^{-A(x)}(c + \int b(x)e^{A(x)}dx), \tag{22d}$$

其中 c 是任意常数, 而

$$A(x) = \int a(x)dx. \tag{22e}$$

由于每一函数 y 都能写成带一适当函数 u 的 (22c) 的形式, 可见公式 (22d) 表示了 (22a) 的 **最一般的解**. 这样一来, 通解是由已知函数仅仅通过求幂和普通的积分过程得到的. 由于在 $A(x)$ 里或 (22d) 中不定积分里的常数的任何不同的选择都能用适当改变 c 来补偿, 所以, 实际上解仅含有 **一个** 任意常数.

例如, 对微分方程

$$y' + xy = -x$$

有

$$A(x) = \int xdx = \frac{1}{2}x^2,$$
$$\int b(x)e^{A(x)}dx = -\int xe^{\frac{x^2}{2}}dx = -e^{\frac{x^2}{2}},$$

于是, 得到通解

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}}(c - e^{\frac{x^2}{2}}) = -1 + ce^{-\frac{x^2}{2}}.$$

练 习 6.2

1. 用分离变量法积分下列方程:

(a) $(1+y^2)xdx+(1+x^2)dy=0$,

(b) $ye^{2x}dx-(1+e^{2x})dy=0$.

2. 解下列齐次方程:

(a) $y^2dx+x(x-y)dy=0$,

(b) $xydx+(x^2+y^2)dy=0$,

(c) $x^2-y^2+2xyy'=0$,

(d) $(x+y)dx+(y-x)dy=0$,

(e) $(x^2+xy)y'=x\sqrt{x^2-y^2}+xy+y^2$.

3. 证明: 形如

$$y'=\phi\left[\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right]\quad(a,a_1,\cdots\text{常数})$$

的微分方程可用下法化为齐次方程: 如果 $ab_1-a_1b\neq0$, 取新未知函数及新自变量为

$$\eta=ax+by+c,\quad \xi=a_1x+b_1y+c_1,$$

如果 $ab_1-a_1b=0$, 仅需把未知函数变作

$$\eta=ax+by$$

就能将方程化为变量分离的新方程.

4. 用上题的方法解:

(a) $(2x+4y+3)y'=2y+x+1$,

(b) $(3y-7x+3)y'=3y-7x+7$.

5. 积分下列一阶线性微分方程:

(a) $y'+y\cos x=\cos x\sin x$,

(b) $y'-\dfrac{ny}{x+1}=e^x(x+1)^n$,

(c) $x(x-1)y' + (1-2x)y + x^2 = 0$,

(d) $y' - \frac{2}{x}y = x^4$,

(e) $(1+x^2)y' + xy = \frac{1}{1+x^2}$.

6. 积分下面方程

$$y' + y^2 = \frac{1}{x^2}.$$

7. 伯努利(Bernoulli)方程 形如

$$y' + f(x)y = g(x)y^n.$$

证明：作变换

$$y = v\exp\{-\int f(x)dx\} = vF(x)$$

可将它变成分离变量的形式.

8. 积分下面方程

$$xy' + y(1-xy) = 0.$$

9. 用任一可行的方法解

$$y' + y\sin x + y^n \sin 2x = 0.$$

6.3　高阶线性微分方程

a. 叠加原理. 通解

前面讨论的很多例题都属于线性微分方程的类型. 未知函数 $u(x)$ 的微分方程称为 n 阶线性的，如果它的形状为

$$u^{(n)}(x) + a_1 u^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n u(x) = \phi(x), \tag{23}$$

其中 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 与右端项 $\phi(x)$ 都是自变量 x 的给定函数. 我们把左端的表达式记成 $L[u]$ (L 是 "线性微分算子").

如果在考虑的区间内 $\phi(x)$ 恒为 0, 我们称方程是 **齐次的**; 反之, 称它为 **非齐次的**. 立即看出 (同第一卷第 725 页讨论的二阶常系数线性微分方程的特殊情况一样), 下面的 **叠加原理** 成立:

如果 u_1, u_2 是齐次方程的任意两个解, 则它们的每一线性组合 $u = c_1u_1 + c_2u_2$, 其中系数 c_1, c_2 是常数, 也是一个解.

如果知道了非齐次方程 $L[u] = \phi(x)$ 的一个特解 $v(x)$, 则我们由 $v(x)$ 加上齐次方程的任意解可得全部其它的解.

对于 $n = 2$ 和常系数 a_1, a_2, 在第一卷 (第 722 页) 我们已经证明: 齐次方程的每一解可通过适当选择的两个解 u_1, u_2 表成 $c_1u_1 + c_2u_2$ 的形式. 对具有任意连续系数的任何齐次微分方程类似的定理成立.

首先, 我们根据下述定义来阐明所谓函数的线性相关和线性无关性: n 个函数 $\phi_1(x), \phi_2(x), \cdots, \phi_n(x)$ 是 **线性相关** 的, 如果存在不全为 0 的 n 个常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$, 使得方程

$$c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + \cdots + c_n\phi_n(x) = 0$$

恒成立, 即对考虑的区间内 x 的所有值成立. 如果, 例如, $c_n \neq 0$, 则 $\phi_n(x)$ 可表成

$$\phi_n(x) = a_1\phi_1(x) + \cdots + a_{n-1}\phi_{n-1}(x),$$

$\phi_n(x)$ 称为 **线性地依赖于其它函数**. 如果形如

$$c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + \cdots + c_n\phi_n(x) = 0$$

的线性关系式不成立, 则 n 个函数 $\phi_i(x)$ 称为 **线性无关** 的 [1].

---

1) 函数 $\phi(x)$ 的线性相关与向量的线性相关的定义是完全一样的 (见第 147 页). 事实上, 把定义在 x 轴的区间 l 上的函数 $\phi(x)$ 想像成 "有无穷多个分量的向量 ϕ" 常常是很方便的, 这里 l 中每一 x 对应的值 $\phi(x)$ 就是一个分量.

例 1. 函数, $1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$ 是线性无关的. 否则, 应存在常数 $c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}$ 使得多项式

$$c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n-1} x^{n-1}$$

对某区间内的所有 x 都为 0, 但是, 这是不可能的, 除非多项式的所有系数都是 0.

例 2 . 设 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, 则函数 $e^{a_i x}$ 为线性无关.

证: 假设对 $(n-1)$ 个这样的指数函数, 这命题已经证明为真. 于是, 如果

$$c_1 e^{a_1 x} + c_2 e^{a_2 x} + \cdots + c_n e^{a_n x} = 0$$

是 x 的恒等式, 我们用 $e^{a_n x}$ 除之, 并令 $a_i - a_n = b_i$, 便得到

$$c_1 e^{b_1 x} + c_2 e^{b_2 x} + \cdots + c_{n-1} e^{b_{n-1} x} + c_n = 0.$$

如果对 x 微商此方程, 则常数 c_n 就消失了, 并且得到一个表明 $(n-1)$ 个函数 $e^{b_1 x}, e^{b_2 x}, \cdots, e^{b_{n-1} x}$ 线性相关的方程, 从此推出 $e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \cdots, e^{a_{n-1} x}$ 也是线性相关的, 与原假设矛盾. 所以, n 个原来的函数之间不能有线性关系式.

例 3. 函数 $\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \cdots, \sin nx$ 在区间 $0 \le x \le \pi$ 上为线性无关. 我们把证明留给读者 (第 835 页第 1 题); 要利用事实

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0 \ (\text{当 } m \neq n \text{ 时}) \\ \pi \ (\text{当 } m = n \text{ 时}) \end{cases}$$

(参看第一卷).

如果我们假设函数 $\phi_i(x)$ 有直到 n 阶的连续导数, 则下述定理成立:

函数组 $\phi_i(x)$ 线性相关的必要且充分条件是方程

$$W = \begin{vmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) & \cdots & \phi_n(x) \\ \phi_1'(x) & \phi_2'(x) & \cdots & \phi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_1^{(n-1)}(x) & \phi_2^{(n-1)}(x) & \cdots & \phi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = 0 \qquad (24)$$

是 x 的恒等式. 函数 W 称为函数组的朗斯基(Wronsky)行列式[1].

如果假设

$$\sum c_i\phi_i(x) = 0,$$

逐次求微商得出另外的方程

$$\sum c_i\phi_i'(x) = 0, \cdots,$$
$$\sum c_i\phi_i^{(n-1)}(x) = 0.$$

然而, 它们组成 n 个系数 $c_1, \cdots, c_n$ 满足的 n 个方程的齐次方程组; 因此, 方程组的行列式 W 必须是 0, 这就直接得到了条件的必要性.

条件的充分性, 即, 如果 $W = 0$ 则函数组是线性相关的, 可证明如下: 从 W 为零可推知方程组

$$c_1\phi_1 + \cdots + c_n\phi_n = 0$$
$$c_1\phi_1' + \cdots + c_n\phi_n' = 0$$
$$\vdots$$
$$c_1\phi_1^{(n-1)} + \cdots + c_n\phi_n^{(n-1)} = 0$$

有非平凡解 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ (见第 162 页), 其中 c_i 还可能是 x 的函数. 不失一般性可设 $c_n = 1$. 进一步, 我们假设 $(n-1)$ 个函数 $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_{n-1}$ 的朗斯基行列式 V 不是 0, 因为我们可设定理对 $(n-1)$ 个函数已得证明; 这样一来, 当 $V = 0$ 时便知在 $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_{n-1}$ 之间, 因而, 在 $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \cdots, \phi_n$ 之间存在着线性关系式. 第一个方程关于 x 求微商[2] 并与第二式结合, 得到

$$c_1'\phi_1 + c_2'\phi_2' + \cdots + c_{n-1}'\phi_{n-1} = 0;$$

1) 在这个和以后一个证明中, 假定读者了解行列式理论的初步知识, 注意朗斯基行列式的每一列是由函数 ϕ 及其 $1, 2, \cdots, n-1$ 阶导数构成的向量, 所以, 函数组的朗斯基行列式等于 0 表示对应的向量组为线性相关 (见第 189 页).

2) 容易看出系数 c_i 是 x 的连续可微函数, 因为如果行列式 V 不是零, 则它们能表成函数 ϕ_i 及其导数的有理式.

类似地，第二个方程求微商并与第三式结合，得到

$$c_1'\phi_1' + c_2'\phi_2' + \cdots c_{n-1}'\phi_{n-1}' = 0,$$

等等，直到

$$c_1'\phi_1^{(n-2)} + c_2'\phi_2^{(n-2)} + \cdots + c_{n-1}'\phi_{n-1}^{(n-2)} = 0.$$

因为, 已假设这个方程组的行列式 V 不是零, 由此推知 $c_1', c_2', \cdots, c_{n-1}'$ 是零；即 $c_1, c_2, \cdots, c_{n-1}$ 是常数，因此，方程

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i(x) = 0$$

同断言的一样，表示一个线性关系式.

现在我们叙述线性微分方程的基本定理:

每一齐次线性微分方程

$$L[u] = a_0(x)u^{(n)}(x) + a_1(x)u^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n(x)u(x) = 0 \quad (25)$$

具有 n 个线性无关的解 $u_1, u_2, \cdots, u_n$. 每一其它的解 u 均可表示为这些基本解的迭加, 即表成 [1]带常系数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 的线性表达式:

$$u = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i.$$

特别地, 用下述条件能够确定一基本解组. 在一指定点, 比如说 $x = \xi$, u_1 的值是 1, 而 u_1 的直到第 $(n-1)$ 阶导数都是 0; $u_i (i > 1)$ 和 u_i 的直到第 $(n-1)$ 阶导数，除第 i 阶之外，都是 0, 而第 i 阶导数的值是 1.

1) 两个不同的基本解组 $u_1, \cdots, u_n; v_1, \cdots, v_n$ 能够借助线性变换

$$v_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} u_k$$

互变，其中系数 c_{ik} 是常数，它们构成一行列式不为零的矩阵.

基本解组的存在性将从下面第 848 页证明的存在定理得到. 从刚刚证明的朗斯基条件 (24) 知任一解 u 与 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 间必存在线性关系, 这是因为从方程

$$\sum_{l=0}^{n} a_l u^{(n-l)} = 0$$

$$\sum_{l=0}^{n} a_l u_i^{(n-l)} = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

能得出 $(n+1)$ 个函数 $u, u_1, u_2, \cdots, u_n$ 的朗斯基行列式必然是 0, 所以 $u, u_1, u_2, \cdots, u_n$ 线性相关. 由于 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 线性无关, 于是, u 线性依赖于 $u_1, \cdots, u_n$.

b. 二阶齐次微分方程

由于二阶微分方程有重要用处, 所以我们将更详细地来考察它.

设微分方程是

$$L[u] = au'' + bu' + cu = 0. \tag{26}$$

如果 $u_1(x), u_2(x)$ 构成基本解组, 于是 $W = u_1 u_2' - u_2 u_1'$ 是朗斯基行列式, 且 $W' = u_1 u_2'' - u_2 u_1''$. 由于

$$L[u_1] = 0 \text{ 和 } L[u_2] = 0,$$

便有

$$u_1 L[u_2] - u_2 L[u_1] = aW' + bW = 0.$$

这是关于 W 的一阶线性方程. 按第 825 页公式 (22b), 它的通解是

$$W = ce^{-\int [b/a] dx}, \tag{27}$$

其中 c 是常数. 这个公式在进一步发展二阶微分方程的理论中用得很多.

值得提出的另一性质是二阶线性齐次微分方程总可变成一阶方程，即所谓**黎卡提**(Riccati)**方程**. 黎卡提方程的形式为

$$v' + pv^2 + qv + r = 0,$$

其中 v 是 x 的函数. 令 $u' = uz$, 从而 $u'' = u'z + uz' = uz^2 + u'z$, 线性方程 (26) 就变成黎卡提方程

$$az' + az^2 + bz + c = 0.$$

第三点注意：如果我们知道二阶线性齐次微分方程的一个解 $v(x)$, 问题就简化为解一个一阶微分方程，并且能用积分法解出. 特别地，如果假设 $L[v] = 0$ 并令 $u = zv$, 其中 $z(x)$ 是待求的新函数，我们得到 z 的微分方程

$$az''v + 2az'v' + bz'v' + zL[v] = avz'' + (2av' + bv)z' = 0.$$

但是，这是关于未知函数 $z' = w$ 的线性齐次微分方程；第 840 页公式 (22d) 给出它的解. 于是，再积分一次就能从 w 得到因子 z, 因而，也得到解 u [1)].

例如，二阶线性方程

$$y'' - 2\frac{y'}{x} + 2\frac{y}{x^2} = 0$$

等价于黎卡提方程

$$z' + z^2 - \frac{2}{x}z + \frac{2}{x^2} = 0,$$

其中 $z = y'/y$. 原方程有 $y = x$ 为一特解；因此，它可化归一阶方程

$$v''x = 0,$$

1) 观察由 v 和另一解 u 组成的朗斯基行列式 W 的公式 (27) 可得相同结果，因为 W 和 v 已知，方程 $W = vu' - v'u$ 表示 u 的一阶线性方程，它能用积分法求解.

其中 $v=y/x$. 这就有 $v=ax+b$. 所以，原方程的通积分是

$$y=ax^2+bx.$$

应当指出同样的方法完全能够用于把 n 阶线性微分方程化归一个 $(n-1)$ 阶的方程，如果前一方程的一个解是已知的话.

练　习　6.3 b

1. 证明：函数组 $\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \cdots$ 在区间 $0\le x\le\pi$ 上线性无关. 提示: 这些函数中的任何两个在区间上正交; 即如果 $m\neq n$, 则

$$\int_0^\pi \sin mx \sin nx dx=0$$

(参看第一卷第 307 页).

2. 证明：如果 $a_1,\cdots,a_k$ 是不相等的数， $P_1(x),\cdots,P_k(x)$ 是任意多项式 (不恒等于 0), 则函数组

$$\phi_1(x)=P_1(x)e^{a_1x},\cdots,\phi_k(x)=P_k(x)e^{a_kx}$$

线性无关.

3. 证明利用新未知函数 $z=y^{1-n}$ 可把所谓伯努利方程 (参看 6.2 节第 7 题)

$$y'+a(x)y=b(x)y^n\quad(n\neq 1)$$

化归线性微分方程. 用此法求解方程

(a) $xy'+y=y^2\log x$,

(b) $xy^2(xy'+y)=a^2$,

(c) $(1-x^2)y'-xy=axy^2$.

4. 证明黎卡提方程

$$y'+P(x)y^2+Q(x)y+R(x)=0$$

能变成线性微分方程，如果已知一特解 $y_1 = y_1(x)$. [引入新未知函数 $u = 1/(y - y_1)$.] 用此法解方程

$$y' - x^2y^2 + x^4 - 1 = 0,$$

它有特解 $y_1 = x$.

5. 求下列两个微分方程的公共积分

(a) $y' = y^2 + 2x - x^4$,

(b) $y' = -y^2 - y + 2x + x^2 + x^4$.

6. 利用第 5 题求得的特解，用定积分求解方程

$$y' = y^2 + 2x - x^4.$$

在 x, y 平面上画出积分曲线和草图.

7. 设 y_1, y_2, y_3, y_4 是黎卡提方程 (参看第 4 题) 的四个解. 证明表达式

$$\frac{\dfrac{(y_1 - y_3)}{(y_1 - y_4)}}{\dfrac{(y_2 - y_3)}{(y_2 - y_4)}}$$

是常数.

8. 证明：如果已知黎卡提方程的两个解 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$, 则通解是

$$y - y_1 = c(y - y_2)\exp\left[\int P(y_2 - y_1)dx\right],$$

其中 c 是任意常数.

方程

$$y' - y\operatorname{tg} x = y^2\cos x - \frac{1}{\cos x}$$

有形如 $a\cos^n x$ 的解，从而求它的通解.

9. 证明：方程

(a) $(1 - x)y'' + xy' - y = 0$,

(b) $2x(2x - 1)y'' - (4x^2 + 1)y' + y(2x + 1) = 0$

有公共解. 把它求出来, 并因此完全解出两个方程.

10. 曲线在 P 点的切线与 y 轴交于原点 O 之下的点 T, 并且 $OP = n \cdot OT$. 证明: 曲线的极坐标方程形式为

$$r = a\frac{(1+\sin\theta)^n}{\cos^{n+1}\theta}.$$

c. 非齐次微分方程. 参数变易法

要解非齐次微分方程

$$L[u] = a_0u^{(n)} + \cdots + a_nu = \phi(x), \tag{28a}$$

一般说来, 在第 805 页讲过, 只要求得一个特解就够了. 这可进行如下: 首先, 适当选择常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$, 从而确定齐次方程 $L[u] = 0$ 的满足条件

$$u(\xi) = 0,\ u'(\xi) = 0, \cdots, u^{(n-2)}(\xi) = 0,\ u^{(n-1)}(\xi) = 1 \tag{28b}$$

的一个解, 它依赖于参数 ξ, 记为 $u(x,\xi)$. 函数 $u(x,\xi)$ 与它对 x 的前 n 阶导数, 对于固定的 x 是 ξ 的连续函数. 例如, 微分方程 $u'' + k^2u = 0$ 满足条件 (28b) 的解 $u(x,\xi)$ 形为 $[\sin k(x-\xi)]/k$.

现在, 我们断言公式

$$v(x) = \int_0^x \phi(\xi)u(x,\xi)d\xi \tag{28c}$$

给出 $L[v] = \phi$ 的一个解, 它同其前 $(n-1)$ 阶导数在 $x = 0$ 点为零. 为了证实这个说法 1), 我们用积分对参数的微商法则 [参看第 85 页 (41)] 逐次求函数 $v(x)$ 对 x 的微商, 并回忆从 (28b) 得到的下述关系式:

$$u(x,x) = 0,\ u'(x,x) = 0, \cdots, u^{(n-2)}(x,x) = 0,\ u^{(n-1)}(x,x) = 1,$$

1) 可给这种方法以物理解释. 如果 $x = t$ 表示时间, u 表示受力 $\phi(x)$ 作用的沿直线运动的点的坐标, 该力的效应可认为是由小脉冲的小效应迭加而产生. 于是, 上面的解 $u(x,\xi)$ 对应于时刻 ξ 的大小为 1 的一个脉冲, 而我们的解给出了大小为 $\phi(\xi)$ 的脉冲在时间 0 到 x 之间的效应.

其中，例如 $u'(x,x)$ 是 $\partial u(x,\xi)/\partial x$ 在 $\xi=x$ 的值.

这样一来，我们得到

$$\begin{aligned}
v'(x) &= \phi(\xi)u(x,\xi)\mid_{\xi=x} + \int_0^x \phi(\xi)u'(x,\xi)d\xi \\
&= \int_0^x \phi(\xi)u'(x,\xi)d\xi, \\
v''(x) &= \phi(\xi)u'(x,\xi)\mid_{\xi=x} + \int_0^x \phi(\xi)u''(x,\xi)d\xi \\
&= \int_0^x \phi(\xi)u''(x,\xi)d\xi, \\
&\cdots\cdots \\
v^{(n-1)}(x) &= \phi(\xi)u^{(n-2)}(x,\xi)\mid_{\xi=x} + \int_0^x \phi(\xi)u^{(n-1)}(x,\xi)d\xi \\
&= \int_0^x \phi(\xi)u^{(n-1)}(x,\xi)d\xi, \\
v^{(n)}(x) &= \phi(\xi)u^{(n-1)}(x,\xi)\mid_{\xi=x} + \int_0^x \phi(\xi)u^{(n)}(x,\xi)d\xi \\
&= \phi(x) + \int_0^x \phi(\xi)u^{(n)}(x,\xi)d\xi.
\end{aligned}$$

因为 $L[u(x,\xi)]=0$, 这就证实了方程 $L[v]=\phi(x)$ 和初条件 $v(0)=0$, $v'(0)=0,\cdots,v^{(n-1)}(0)=0$ 成立.

用下述显然不同的方法 —— 它推广了第 826 页对一阶方程用过的程序 —— 可得到相同的解. 我们用齐次方程的线性无关解 u_i 的线性组合形式来寻找非齐次方程的解 u, 即

$$u=\sum \gamma_i(x)u_i(x), \tag{28d}$$

现在我们允许其中的系数 γ_i 是 x 的函数. 在这些函数上我们附加上下列条件:

$$\begin{aligned}
\gamma_1'u_1+\gamma_2'u_2+\cdots+\gamma_n'u_n&=0 \\
\gamma_1'u_1'+\gamma_2'u_2'+\cdots+\gamma_n'u_n'&=0 \\
&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

$$\gamma_1' u_1^{(n-2)} + \gamma_2' u_2^{(n-2)} + \cdots + \gamma_n' u_n^{(n-2)} = 0.$$

由此得到 u 的导数有下列公式:

$$\begin{aligned}
u' &= \sum \gamma_i u_i' \\
u'' &= \sum \gamma_i u_i'' \\
&\cdots\cdots \\
u^{(n-1)} &= \sum \gamma_i u_i^{(n-1)} \\
u^{(n)} &= \sum \gamma_i' u_i^{(n-1)} + \sum \gamma_i u_i^{(n)}.
\end{aligned}$$

把这些表达式代入微分方程并注意 $L[u] = \phi$, 便有

$$\sum \gamma_i' u_i^{(n-1)} = \phi(x).$$

对于系数 γ_i' 我们得到了一个方程组, 它的行列式就是基本解组 u_i 的朗斯基行列式 W, 因而不为 0. 这样一来, 就确定了系数 γ_i'. 所以, 用求积法也就确定了系数 γ_i. 把整个论述倒回去, 方程的一个解就确实被找到了, 但是, 由于在系数 γ_i 中隐含有积分常数, 所以, 事实上这就是通解.

我们让读者来证明: 如果把上面定义的齐次方程的解 $u(x, \xi)$ 表成

$$u(x, \xi) = \sum a_i(\xi) u_i(x),$$

则两种方法实际上是完全一样的.

后一种方法通称**参数变易法**, 因为, 这时解表为变系数的函数的线性组合, 而在齐次方程的情况下, 这些系数都是常数.

例 1. 考察方程

$$u'' - 2\frac{u'}{x} + 2\frac{u}{x^2} = xe^x.$$

在第 847 页上已给出对应的齐次方程

$$u'' - 2\frac{u'}{x} + 2\frac{u}{x^2} = 0$$

的一个独立解组是 $u_1 = x$, $u_2 = x^2$. 因而，如果寻求形如

$$u = \gamma_1 x + \gamma_2 x^2$$

的解，我们得到关于 γ_1 和 γ_2 的条件

$$\gamma_1' x + \gamma_2' x^2 = 0,$$
$$\gamma_1' + 2\gamma_2' x = x e^x.$$

即，

$$\gamma_1' = -x e^x, \quad \gamma_2' = e^x.$$

因此，原非齐次方程的通解是

$$u = x e^x + c_1 x + c_2 x^2.$$

例 2．作为应用我们给出处理强迫振动的一种方法，这时微分方程的右端不必是第一卷第九章第 726 页考察的周期函数，而可以用任意连续函数 $f(t)$ 来代替．为了简单起见，我们限于无摩擦的情况并取 $m = 1$ (或，它与除以 m 是一回事)．通常，微分方程写成

$$\ddot{x}(t) + k^2 x(t) = \phi(t), \tag{28e}$$

其中量 k^2 和 ϕ 以前称为 k 和 f.

按 (28c), 函数

$$F(t) = \frac{1}{k}\int_0^t \phi(\lambda) \sin k(t-\lambda) d\lambda$$

是微分方程 (28e) 的适合初条件

$$F(0) = 0, \quad F'(0) = 0$$

的解．这样一来，同前面一样，我们得到微分方程的通解

$$x(t) = \frac{1}{k}\int_0^t \phi(\lambda) \sin k(t-\lambda) d\lambda + c_1 \sin kt + c_2 \cos kt,$$

其中 c_1 和 c_2 是任意积分常数.

特别地, 如果微分方程的右端函数是形为 $\sin\omega t$ 或 $\cos\omega t$ 的周期函数, 经过简单计算就能重新得到第一卷第九章第 728 页的结果.

练　习　6.3 c

1. 积分下列方程:

(a) $y''' - y = 0$,

(b) $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0$,

(c) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$,

(d) $y''' - 3y'' + 2y = 0$,

(e) $x^2y'' + xy' - y = 0$.

2. 证明: 常系数线性齐次方程

$$L(y) = y^{(n)} + c_1 y^{(n-1)} + \cdots + c_{n-1}y' + c_n y = 0$$

有形为 $x^{\mu}e^{a_k x}$ 的基本解组, 其中 a_k 是多项式

$$f(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n$$

的根.

3. 设

$$a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_n y^{(n)} = P(x)$$

是 n 阶常系数线性非齐次微分方程, $P(x)$ 是多项式. 设 $a_0 \neq 0$ 并考虑形式恒等式

$$\frac{1}{a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n} = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots.$$

证明

$$y = b_0 P(x) + b_1 P'(x) + b_2 P''(x) + \cdots$$

是微分方程的一个特解.

如果 $a_0=0$, 但 $a_1\neq 0$, 则可有展开式

$$\frac{1}{a_1t+a_2t^2+\cdots+a_nt^n}=bt^{-1}+b_0+b_1t+b_2t^2+\cdots,$$

证明. 这时

$$y=b\int P(x)dx+b_0P(x)+b_1P'(x)+b_2P''(x)+\cdots$$

是微分方程的一个特殊积分.

4. 用第 3 题的方法求特殊积分:

(a) $y''+y=3x^2-5x$,

(b) $y''+y'=(1+x)^2$.

5. 设方程

$$a_0y+a_1y'+\cdots+a_ny^{(n)}=e^{kx}P(x)$$

中 $k,a_0,a_1,\cdots$ 是实常数, $P(x)$ 是多项式. 引进由

$$y=ze^{kx}$$

给出的新未知函数 $z=z(x)$, 并把第 3 题的方法用于 z 的方程, 就能求得原方程的一个特殊积分.

试用这种方法求下列方程的特殊积分:

(a) $y''+4y'+3y=3e^x$,

(b) $y''-2y'+y=xe^x$.

6. 完全解出方程

$$y''-5y'+6y=e^x(x^2-3).$$

7. (a) 如果 u,v 是方程

$$f(x)y'''-f'(x)y''+\phi(x)y'+\lambda(x)y=0$$

的两个无关的解, 证明完全解是 $Au+Bv+Cw$, 其中

$$w=u\int\frac{vf(x)dx}{(uv'-u'v)^2}-v\int\frac{uf(x)dx}{(uv'-u'v)^2},$$

和 A, B, C 是任意常数.

(b) 解方程

$$x^2(x^2+5)y''' - x(7x^2+25)y'' + (22x^2+40)y' - 30xy = 0,$$

已知它有形为 x^n 的解.

6.4 一般的一阶微分方程

a. 几何解释

我们开始考察一阶微分方程

$$F(x, y, y') = 0, \tag{29}$$

假设函数 F 是它三个变元 x, y, y' 的连续可微函数. 从几何上来看, 这个方程乃是任何穿过平面上直角坐标为 (x, y) 的点, 且满足微分方程的曲线 $y(x)$ 在该点的切线方向的一个条件. 假设在平面上某区域 R 内, 比如说在一个矩形内, 微分方程 $F(x, y, y') = 0$ 能唯一地解出 y', 则 y' 能表成形式

$$y' = f(x, y), \tag{30}$$

其中 $f(x, y)$ 是 x, y 的连续可微函数. 于是, 对于 R 的每一点 (x, y) 方程 (30) 指定了一个**前进的方向**. 所以从几何上来看, 微分方程由一**方向场**所表示, 而解微分方程就是寻求属于这个方向场的曲线, 即它在每一点的切线方向由方程 $y' = f(x, y)$ 所规定. 这种曲线称为**微分方程的积分曲线**.

通过 R 的每一点 (x, y) 有微分方程 $y' = f(x, y)$ 唯一的积分曲线, 这在直观上是似乎有理的. 在下述的基本存在定理中更确切地叙述了这个事实:

如果在微分方程 $y' = f(x, y)$ **中, 函数** f **在区域** R **内是连续的且有关于** y **的连续导数, 则通过** R **的每一点** (x_0, y_0) **有一条, 且**

仅有一条积分曲k 线；即在 x_0 的一个邻域内微分方程有一个且仅有一个满足 $y(x_0)=y_0$ 的解 $y(x)$.

在第 848 页我们将回过来证明这个定理，在此我们限于考察一些例题.

对于微分方程

$$y'=-x/y, \tag{31a}$$

比如说，我们在区域 $y<0$ 内来考察它，容易看出，场在点 (x,y) 的方向与从原点到点 (x,y) 的向量垂直. 由此我们从几何上推知以原点为中心的圆弧必然是这个方程的积分曲线. 这个结果从分析上也非常容易得到证实，用分离变量法 (第 838 页), 得

$$x^2+y^2=\text{常数}=c,$$

这说明这些圆弧是微分方程的解.

微分方程

$$y'=y/x \tag{31b}$$

的方向场在每点的方向显然与从原点到该点连线的方向一致. 这样一来, 过原点的直线属于这个方向场, 因而, 它们同样是积分曲线. 事实上，我们立即看出 $y=cx$ 对任意常数 c 均满足微分方程 [1).]

用同样的方法，我们能够用分析方法证实双曲线族

$$y^2=c+x^2,$$

$$y=c/x$$

分别满足微分方程

$$y'=\frac{x}{y}(y\neq 0)$$

和

$$y'=-\frac{y}{x}(x\neq 0),$$

1) 在原点上方向场不再唯一确定；这与下述事实有关：有无数条积分曲线通过微分方程的这个奇点.

其中 c 是用以指定族中特定曲线的参数.

基本定理说明，一般说来，一个单参数的函数族满足一阶微分方程. 在这样的族中 x 的函数不仅依赖于 x, 而且还依赖于一个参数 c, 例如，依赖于 $c = y_0 = y(0)$; 如我们所说，这些解依赖于一个任意的积分常数. 函数 $f(x)$ 的普通积分仅仅是在 $f(x, y)$ 中不包含 y 的微分方程解的特例. 因此，方向场在一点的方向被 x 坐标单独决定，我们立即看出把一条积分曲线沿 y 轴方向平移可得其它的积分曲线. 从分析上来看，这对应于熟知的事实： y 的不定积分，即微分方程 $y' = f(x)$ 的解包含一个任意加上的常数.

从微分方程的几何解释得出了一种积分曲线的近似图形的构造方法，它与 x 的函数的不定积分的特殊情况是大致一样的 (第一卷第 540 页). 我们只须设想用一条折线来代替积分曲线，折线每边的方向就是方向场在它的起点 (或它的任一别的点) 所规定的方向. 这样的折线可从 R 的任意点开始作起. 把折线的边长取得越小，则折线的边将不仅只在它们的起点上，而且在它们的整个长度上以更高的精确度符合微分方程的方向场. 在此，我们不加证明地叙述一个事实：当边长逐渐缩小时，这样构作的折线可确实越来越好地逼近通过起始点的积分曲线.

b. 曲线族的微分方程. 奇解. 正交轨线

存在定理说明每一微分方程有一积分曲线族. 这启示我们问相反的问题. 是否对每一单参数曲线族 $\phi(x, y, c) = 0$ 或 $y = g(c, x)$ 必有对应的微分方程

$$F(x, y, y') = 0$$

使得族中全体曲线都满足它呢？如果是这样，又怎样求得这个微分方程呢？这里，本质的一点是曲线族的参数 c 不能在微分方程中出现，所以，微分方程在某种意义上就是曲线族的不包含参数的表示式. 事实上，容易求得这样的微分方程. 在

$$\phi(x, y, c) = 0 \tag{32a}$$

中，对 x 求微商，我们得到

$$\phi_x + \phi_y \cdot y' = 0. \tag{32b}$$

如果从这个方程和方程 $\phi = 0$ 消去参数 c, 结果就是所求的微分方程. 在方程 $\phi = 0$ 能将参数 c 通过 x 和 y 解出的平面区域上，总是能够消去 c 的，我们只要把这样得到的表达式 $c = c(x, y)$ 代入 ϕ_x 和 ϕ_y 的表达式，就得到了曲线族的微分方程.

作为第一个例子，考察同心圆族 $x^2 + y^2 - c^2 = 0$, 对 x 微商此式，得到微分方程

$$x + yy' = 0. \tag{32c}$$

这与第 844 页 (31a) 一样.

另一例是中心在 x 轴上的单位圆族 $(x - c)^2 + y^2 = 1$, 对 x 微商此式，我们得到

$$(x - c) + yy' = 0,$$

再消去 c, 可得微分方程

$$y^2(1 + y'^2) = 1.$$

切于 x 轴的抛物线族 $y = (x - c)^2$ 通过方程 $y' = 2(x - c)$ 同样引导到所求的微分方程

$$y'^2 = 4y.$$

在后二例中，我们看到不仅族中的曲线，而且，前者还有直线 $y = 1$ 和 $y = -1$, 后者还有 x 轴 $y = 0$ 都满足对应的微分方程. 这个能够立即从分析上证实的事实，也可无须计算而从微分方程的几何意义得出. 这些线都是对应曲线族的包络，由于包络在每点上与族中一条曲线相切，所以，它们在该点必然有方向场指定的方向. 这样一来，积分曲线的每一包络本身也必须满足微分方程. 由单参数积分曲线族的包络构成的微分方程的解称为 **奇解**.

设 R 是单参数曲线族 $\Phi(x, y) = c =$ 常数所覆盖的区域. 如果对于 R 的每一点 P, 规定的方向是通过 P 的曲线的切线方向，我们

就得到由微分方程 $y' = -\Phi_x/\Phi_y$ 所确定的方向场 [见 (32b)]. 另一方面，如果对每一点 P 规定的方向是通过它的曲线的法线方向，得到的方向场就由微分方程

$$y' = \Phi_y/\Phi_x$$

所确定.

这个微分方程的解称为原曲线族 $\Phi(x,y) = c$ 的 **正交轨线**. 曲线 $\Phi = c$ (函数 Φ 的等值线) 与它的正交轨线处处相交成直角. 因此，如果用微分方程 $y' = f(x,y)$ 给出一个曲线族，我们无须求积给定的微分方程，就能求得正交轨线族的微分方程是

$$y' = -\frac{1}{f(x,y)}.$$

在上面讨论的例 (31a) 中，由圆族 $x^2 + y^2 = c^2$ 满足的微分方程，我们求得正交轨线的微分方程是 $y' = y/x$. 因而，正交轨线是通过原点的直线族 [见 (31b)].

如果 $p > 0$, 共焦抛物线族 (参看第三章第 254 页) $y^2 - 2p\left(x + \frac{p}{2}\right) = 0$ 满足微分方程

$$y' = \frac{1}{y}(-x + \sqrt{x^2 + y^2}),$$

因此，该曲线族的正交轨线的微分方程是

$$y' = \frac{-1}{(-x + \sqrt{x^2 + y^2})/y} = \frac{1}{y}(-x - \sqrt{x^2 + y^2}).$$

这个微分方程的解是抛物线族

$$y^2 - 2p\left(x + \frac{p}{2}\right) = 0,$$

其中 $p < 0$; 这些是相互共焦，而且还与前一族曲线共焦的抛物线.

c. 解的存在唯一性定理

现在来证明在第 843 页说过的微分方程 $y' = f(x,y)$ 的解的存在唯一性定理. 不失一般性, 假设对于所考虑的解 $y(x)$, 初条件 $y(x_0) = y_0$ 简化为 $y(0) = 0$, 因为引进 $y - y_0 = \eta$ 与 $x - x_0 = \xi$ 作为新变量, 则可得到满足所需条件的同一类型的新微分方程 $d\eta/d\xi = f(\xi + x_0, \eta + y_0)$.

在证明中, 我们可限于在点 $x = 0$ 的一个充分小的邻域内讨论. 如果在包含点 $x = 0$ 的这样一个区间内已经证明了解的存在唯一性, 那么也就能证明在它的端点的一个邻域中的存在唯一性, 等等.

因此, 考虑含于函数 $f(x,y)$ 的定义域中的一个矩形 $|x| \le a$, $|y| \le b$. 存在界 M, M_1, 使得对于 $|x| \le a$, $|y| \le b$ 有

$$|f_y(x,y)| \le M, \quad |f(x,y)| \le M_1. \tag{32d}$$

如果有必要的话, 用一个更小的正数代替 a, 我们总能作到

$$M_1 a < b, \quad Ma < 1. \tag{32e}$$

不等式 (32d) 在更小的矩形上当然成立. 对于 $y' = f(x,y)$ 带有初条件 $y(0) = 0$ 的任一解 $y(x)$, 当 $|x| \le a$ 时便有估计 $|y(x)| < b$. 若不然, 则存在值 ξ, 对它有 $|\xi| \le a$, 且 $|y(\xi)| = b$. 于是存在一个绝对值最小的这样的 ξ. 因此, 关系式

$$b = |y(\xi)| = \left| \int_0^{\xi} f(x, y(x))dx \right| \le M_1|\xi| \le M_1 a < b$$

导致矛盾

首先来证明微分方程的满足初条件的解**不多于**一个. 如果存在两个解 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$, 则它们的差 $d(x) = y_1 - y_2$ 满足

$$d'(x) = f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x)).$$

用中值定理，方程右端能表成 $(y_1-y_2)f_y(x,\overline{y})=d(x)f_y(x,\overline{y})$ 的形式，其中 $\overline{y}$ 是 y_1 与 y_2 的中间值. 在原点的邻域 $|x|\leq a$ 内， y_1 和 y_2 是 x 的连续函数，并且在 $x=0$ 取零值. 这里 b 是两函数的绝对值在该邻域内的上界，所以在 $|x|\leq a$ 内处处有 $|\overline{y}|\leq b$. 而且，M 是 $|f_y|$ 在区域 $|x|\leq a, |y|\leq b$ 内的界. 最后，设 D 是 $|d(x)|$ 在区间 $|x|\leq a$ 上的最大值. 假设这个值在 $x=\xi$ 取到. 那么，对于 $|x|\leq a$,

$$|d'(x)|=|d(x)f_y(x,\overline{y})|\leq DM,$$

因此,

$$D=|d(\xi)|=|\int_0^\xi d'(x)dx|\leq|\xi|DM\leq aDM.$$

可是由于 $aM<1$, 这推得 $D=0$. 即，在这样的区间 $|x|\leq a$ 中我们有 $y_1(x)=y_2(x)$ [1].

用类似的积分估计可得解的存在性的证明. 我们用一种还有其它重要应用 (特别是对于微分方程的数值解和对于映射的反演) 的方法来构造解. 这就是**迭代法**或**逐次逼近法**. 在这里，我们得到的解是近似解序列 $y_0(x),y_1(x),y_2(x),\cdots$ 的极限函数. 取 $y_0(x)=0$ 作第一次近似 $y_0(x)$, 利用微分方程，取

$$y_1(x)=\int_0^x f(\xi,0)d\xi$$

作第二次近似：从它又可得到下一次近似 $y_2(x)$,

$$y_2(x)=\int_0^x f(\xi,y_1(\xi))d\xi,$$

一般地，第 $(n+1)$ 次近似是从第 n 次近似用方程

$$y_n(x)=\int_0^x f(\xi,y_{n-1}(\xi))d\xi \tag{33a}$$

1) 这个证明的根本思想是：有界可积函数的积分值，当积分区间长趋于零时，与积分区间长以相同的阶变零.

得到的. 如果在区间 $|x| \le a$ 中这个近似解的函数列一致收敛于极限函数 $y(x)$, 我们可立即在积分号下取极限并且得到极限函数的方程

$$y(x) = \int_0^x f(\xi, y(\xi))d\xi. \tag{33b}$$

由此求微商得 $y' = f(x, y)$, 所以 y 确定是所求的解.

我们用下面的估计来证明在充分小的区间 $|x| \le a$ 中的收敛性. 取 $y_{n+1}(x) - y_n(x) = d_n(x)$, D_n 表示 $|d_n(x)|$ 在区间 $|x| \le a$ 上的最大值.

对于方程

$$d_n'(x) = y_{n+1}' - y_n' = f(x, y_n) - f(x, y_{n-1}),$$

中值定理给出

$$d_n'(x) = d_{n-1}(x) f_y(x, \overline{y}_{n-1}(x)), \tag{33c}$$

其中 $\overline{y}_{n-1}$ 是 y_n 与 y_{n-1} 的一个中间值. 设不等式 $|f_y(x,y)| \le M$, $|f(x,y)| \le M_1$ 在矩形区域 $|x| \le a$, $|y| \le b$ 上成立. 如果我们假设对函数 y_n 关系式 $|y_n| \le b$ 在区间 $|x| \le a$ 上成立, 则根据 y_{n+1} 的定义, 我们有

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(x)| &= \left| \int_0^x f(\xi, y_n(\xi))d\xi \right| \\ &\le |x| M_1 \le a M_1. \end{aligned}$$

于是, 选取 x 的界 a 这样小, 使得 $aM_1 \le b$. 那么, 在区间 $|x| \le a$ 中, 必定有 $|y_{n+1}(x)| \le b$. 由于对于 $y_0(x) = 0$ 显然有 $|y_0| \le b$, 所以在区间 $|x| \le a$ 中可用归纳法推出 $|y_n(x)| \le b$ 对每个 n 都成立. 因此, 在 (33c) 中我们可用估计 $|f_y| \le M$ 并积分得

$$\begin{aligned} |d_n(x)| &= \left| \int_0^x d_n'(\xi) d\xi \right| \\ &\le \left| \int_0^x M |d_{n-1}(\xi)| d\xi \right|. \end{aligned}$$

这样一来，$|d_n(x)|$ 在区间 $|x| \leq a$ 上的最大值 D_n 以

$$D_n \leq aMD_{n-1}$$

为界.

现取 a 这样的小，使得 $aM \leq q < 1$, 其中 q 是一固定的适当的分数，比如说 $q = \frac{1}{4}$. 那么 $D_{n+1} \leq qD_n \leq q^n D_0$.

让我们现在来考察级数

$$d_0(x) + d_1(x) + d_2(x) + \cdots + d_{n-1}(x) + \cdots.$$

它的前 n 项部分和是 $y_n(x)$. 当 $|x| \leq a$ 时第 n 项的绝对值不大于数 $D_0 q^{n-1}$. 因此，我们的级数被一个收敛的数项几何级数所控制. 因此 (参看第一卷第 600 页), 在区间 $|x| \leq a$ 内它一致收敛于极限函数 $y(x)$, 这样一来，我们看到存在一个区间 $|x| \leq a$, 在其中微分方程有唯一解.

现在留下的全部事情是证明：可以一步一步地把解延拓到 (有界闭) 区域 R 的边界，这里假设 $f(x, y)$ 在 R 中有定义. 迄今为止，前述的证明指出：如果解已被延拓到某一点，则它能继续向前延拓一长度为 a 的 x 区间，但是，这个 a 依赖于已经建立的那部分区间的端点的坐标. 可以设想在进行中 a 逐步地缩小得这样迅速，以致于无论作多少步，解都不能再延拓得比一个小量更多. 我们将要证明，情况不是这样.

假设 R' 是在 R 内部的一有界闭区域. 那么，可求得数 b 如此之小，使得对 R' 中每一点 (x_0, y_0), 整个正方形 $x_0 - b \leq x \leq x_0 + b$, $y_0 - b \leq y \leq y_0 + b$ 都在 R 之内. 如果用 M 和 M_1 表示 $|f_y(x, y)|$ 和 $|f(x, y)|$ 在 R 内的上界，我们就可发现：若取 a, 比如说，是数 b, $M/2$ 和 b/M_1 中的最小者，则在前述证明中加给 a 的全部条件必定都是满足的. 这就不再依赖于 (x_0, y_0) 了；因此，每步我们都能够把解延拓一个不变的量 a. 这样，我们能够一步一步地前进，

直到 R' 的边界. 由于 R' 可选为 R 中的任意闭区域, 可见解能延拓到 R 的边界[1].

练 习 6.4

1. 设

$$f(x, y, c) = 0$$

是一平面曲线族. 从它与方程

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0$$

之间消去常数 c, 得到曲线族的微分方程

$$F(x, y, y') = 0$$

(参看第 846 页). 又设 $\phi(p)$ 是 p 的给定函数; 满足微分方程

$$F(x, y, \phi(y')) = 0$$

的曲线 C 称为曲线族 $f(x,y,c) = 0$ 的 **轨线**. 第二和第三个方程指明

$$y' = \phi(Y')$$

是 C 在任一给定点的斜率 Y' 与通过该点的曲线 $f(x,y,c) = 0$ 的斜率 y' 之间的关系式. 最重要的情形是 $\phi(p) = -1/p$, 它引导出曲

---

1) 在定理中, R 是 **有界闭域** 而不是, 比如说, 整个 x, y 平面, 这是本质的. 这可从微分方程

$$y' = 1 + y^2$$

得到证实, 其中 $f(x,y)$ 对于所有的 x, y 有定义和连续可微. 方程具有初条件 $x = 0$ 时 $y = 0$ 的唯一解是函数 $y = \operatorname{tg} x$ (当 $|x| < \dfrac{\pi}{2}$ 时). 尽管 $f(x,y)$ 对一切 x 和 y 都是合乎要求的, 但解在 $x = \pm\dfrac{\pi}{2}$ 不再存在. 按照已经证明的一般定理, 解的图形在消失之前, 越出给定的 R 的任何有界闭子集, 例如, 任一矩形 $|x| \le a$, $|y| \le b$. 函数 $y = \operatorname{tg} x$ 或者在整个区间 $|x| \le a$ 存在, 或者存在但在某一子区间上其绝对值变得大于 b.

线族的 正交轨线 的微分方程 (参看第 847 页)

$$F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0.$$

用此法求下列曲线族的正交轨线:

(a) $x^2 + y^2 + cy - 1 = 0$,

(b) $y = cx^2$,

(c) $\dfrac{x^2}{a^2 + c} + \dfrac{y^2}{b^2 + c} = 1$ $(a > b > 0,\ -b^2 < c < \infty)$,

(d) $y = \cos x + c$,

(e) $(x - c)^2 + y^2 = a^2$.

在每种情形下画出两正交曲线族的图像.

2. 对于直线族 $y = cx$ 求两族轨线: (a) 轨线的斜率是直线斜率的二倍; (b) 轨线的斜率与直线斜率相等而反号.

3. 类型为

$$y = xp + \psi(p), \quad p = y'$$

的微分方程组首先由克莱罗 (Clairaut) 研究. 求微商得

$$[x + \psi'(p)]\frac{dp}{dx} = 0,$$

它给出 $p = c =$ 常数, 所以

$$y = xc + \psi(c)$$

是微分方程的通积分; 它表示一直线族. 另一解是

$$x = -\psi'(p)$$

它与

$$y = -p\psi'(p) + \psi(p)$$

一起给出叫做 奇积分 的参数表达式. 注意, 由后二方程给出的曲线是直线族的包络.

用此法求方程

$$\text{(a) } y = xp - \frac{p^2}{4};$$

$$\text{(b) } y = xp + e^p$$

的奇解.

4. 求悬链线

$$y = a\cosh\frac{x}{a}$$

的切线的微分方程.

5. 拉格朗日研究了最一般的对 x 与 y 为线性的微分方程，即

$$y = x\phi(p) + \psi(p).$$

求微商，我们得

$$p = \phi(p) + [x\phi'(p) + \psi'(p)]\frac{dp}{dx},$$

只要 $\phi(p) - p \neq 0$ 和 p 不是常数，它就与线性微分方程

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\phi'(p)}{\phi(p) - p}x + \frac{\psi'(p)}{\phi(p) - p} = 0$$

等价. 求积分，并用第一个方程，可得通积分的参数表达式. 从第二个方程可见方程 $\phi(p) - p = 0$, $p =$ 常数引导出若干表示直线的奇解.

对这些解可作几何解释如下：考察克莱洛方程

$$y = xp + \psi[\phi^{-1}(p)],$$

其中 $\phi^{-1}(p)$ 是 $\phi(p)$ 的反函数，即 $\phi^{-1}(\phi(p)) \equiv p$. 由此可见微分方程的解是直线族

$$y = xc + \psi[\phi^{-1}(c)]$$

或

$$y = x\phi(c) + \psi(c) \quad (c = \text{常数})$$

的轨线族. 这样一来, 例如

$$y = -\frac{x}{p} + \psi(p)$$

就是代表克莱洛方程

$$y = xp + \psi\left(-\frac{1}{p}\right)$$

的奇积分的曲线的渐开线 (切线的正交轨线) 的微分方程.

利用此法积分下述方程

$$y = x(p+a) - \frac{1}{4}(p+a)^2.$$

6. 如果可能的话, 用初等函数表出下列微分方程的积分:

(a) $\left[\frac{dy}{dx}\right]^2 = 1 - y^2$, (c) $\left[\frac{dy}{dx}\right]^2 = \frac{2a-y}{y}$,

(b) $\left[\frac{dy}{dx}\right]^2 = \frac{1}{1-y^2}$, (d) $\left[\frac{dy}{dx}\right]^2 = \frac{1-y^2}{1+y^2}$.

在每一情况下画出积分曲线族的图形, 并从图中找出奇解来, 如果有的话.

7. 积分齐次方程

$$[xy' - y]^2 = [x^2 - y^2] \cdot \left[\text{arc sin}\,\frac{y}{x}\right]^2$$

并求奇解.

8. 如同第 3 题指出, 一条曲线是它的切线族的包络, 因此, 它是切线族满足的克莱洛方程的奇积分. 由此, 查明何种曲线满足下列性质, 并求出对应的克莱洛方程:

(a) 切线与 x 轴和 y 轴的截距之和是常数.

(b) 切线被坐标轴截下的线段的长度是常数.

(c) 切线与坐标轴包围的面积是常数.

6.5 微分方程组和高阶微分方程

上面的论证能推广到 x 的未知函数的个数跟方程个数一样多的一阶微分方程组. 作为足够一般化的例子, 我们将考察两个函数 $y(x)$ 与 $z(x)$ 的两个微分方程的方程组

$$y' = f(x, y, z),$$
$$z' = g(x, y, z),$$

其中 f 和 g 都是其变元的连续可微函数. 这个微分方程组可解释成 x, y, z 空间中的一个方向场. 在空间点 (x, y, z) 处规定一个方向, 它的方向余弦满足比例式 $dx : dy : dz = 1 : f : g$. 微分方程组求积分的问题在几何上也相当于在空间求属于这个方向场的曲线. 与一个微分方程的情况一样, 我们也有基本定理: 对于已知函数 f 与 g 连续可微区域 R 中的每一点 (x_0, y_0, z_0) 有且仅有一条微分方程组的积分曲线通过[1). 区域 R 被双参数空间曲线族所覆盖. 由此可得微分方程组的解是两个函数 $y(x)$ 和 $z(x)$, 它们不仅依赖于自变量 x, 也依赖于两个任意参数 c_1 与 c_2, 即积分常数.

因为高阶微分方程, 即, 出现有高于一阶导数的微分方程, 总能够化成一阶微分方程组, 所以后者特别重要.

例如, 二阶微分方程

$$y'' = h(x, y, y')$$

可写成两个一阶的微分方程组. 我们只需取 y 对 x 的一阶导数作新未知函数 z, 则可写成微分方程组

$$y' = z,$$

---

1) 对于 $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, 利用起着单个关系式 (33a) 的同样作用的递推公式

$$y_{n+1}(x) = \int_0^x f(\xi, y_n(\xi), z_n(\xi))d\xi,$$
$$z_{n+1}(x) = \int_0^x g(\xi, y_n(\xi), z_n(\xi))d\xi$$

和适当的迭代方案可重新给出证明.

$$z' = h(x, y, z).$$

它与给定的二阶微分方程在这种意义下正好等价，即，一个问题的每一个解同时是另一个问题的解.

读者可以此为起点去讨论二阶线性微分方程，从而证明在第 832 页用过的线性微分方程的基本存在定理.

练　习　6.5

1. 解下列微分方程:

(a) $y'y'' = x$,

(b) $2y'''y'' = 1$,

(c) $xy'' - y' = 2$,

(d) $2xy'''y'' = y''^2 - 2$.

2. 形为

$$f(y, y', y'') = 0$$

的微分方程 (注意 x 不以显式出现) 能用下法化归一阶方程：选取 y 作自变量， $p = y'$ 作未知函数. 于是

$$y' = p, \quad y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p'p,$$

而微分方程变成 $f(y, p, pp') = 0$.

用此法解下列方程:

(a) $2yy'' + y'^2 = 0$,

(b) $yy'' + y'^2 - 1 = 0$,

(c) $y^3y'' = 1$,

(d) $y'' - y'^2 + y^2y' = 0$.

(e) $y'''' = (y''')^{\frac{1}{2}}$,

(f) $y'''' + y'' = 0$.

3. 用第 2 题的方法解下述问题：在平面曲线 Γ 的动点 M 处作 Γ 的法线；记法线与 x 轴的交点为 N, 并记 Γ 在点 M 的曲率中

心为 C. 寻求曲线使得

$$MN \cdot MC = \text{常数} = k.$$

讨论 $k > 0$ 和 $k < 0$ 各种可能的情况，并作图.

4. 求所有圆

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$$

满足的三阶微分方程.

6.6 用待定系数法求积分

最后，我们还要讲述另一种经常能用于解微分方程的一般方法. 这就是利用幂级数求积分的方法. 设微分方程

$$y' = f(x, y)$$

中的函数 $f(x,y)$ 能展成变量 x 和 y 的幂级数，从而具有关于 x 和 y 的任意阶的导数. 我们试图寻求微分方程的幂级数形式的解

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots,$$

并通过微分方程来确定这个幂级数的系数 [1]. 为此，我们从建立微商级数

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots$$

着手，并在 $f(x,y)$ 的幂级数中用 y 的幂级数表达式代替 y, 然后令左端与右端 x 的同次幂系数相等 (**待定系数法**). 于是，如果任意给定值 $c_0 = c$, 我们就可期望相继地确定系数

$$c_1, c_2, c_3, c_4, \cdots.$$

1) 于是这幂级数的前若干项构成解的多项式逼近.

不过,下面的过程通常是比较简单和更为巧妙的.假设我们要求方程满足 $y(0)=0$ 的解,即积分曲线通过原点的解.于是 $c_0=c=0$. 如果我们想起泰勒定理,幂级数的系数是用表达式

$$c_\nu=\frac{1}{\nu!}y^{(\nu)}(0)$$

给出的,我们就能够容易地算出它们.首先, $c_1=y'(0)=f(0,0)$. 为了得到第二个系数 c_2 我们关于 x 微商方程式的两端,得到

$$y''=f_x+f_y\cdot y'.$$

如果这里代入 $x=0$ 和已知值 $y(0)=0$ 和 $y'(0)=f(0,0)$, 我们得到值 $y''(0)=2c_2$. 用同样的方法,我们可以继续这个过程一个接一个地定出其它系数 $c_3,c_4,\cdots$.

如果 $f(x,y)$ 的幂级数在 $x=0,y=0$ 为中心的某圆内绝对收敛,那么就可证明这个过程总可得出一个解.这里,我们将不予证明.

练 习 6.6

1. 试求下列微分方程通过指定点的解到指定项数的幂级数展开式

(a) $y'=x+y$, k 项,过 $(0,a)$ 点,

(b) $y'=\sin(x+y)$, 四项,过 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 点,

(c) $y'=e^{xy}$, 四项,过 $(0,0)$ 点,

(d) $y'=\sqrt{x^2+y^2}$, 四项,过 $(0,1)$ 点.

2. 用幂级数求解方程

$$y''+\frac{1}{x}y'+y=0,$$

且 $y(0)=1$, $y'(0)=0$. 证明:这个函数与第 4.12 节第 611 页第 7 题定义的贝塞尔函数 $J_0(x)$ 恒等.

6.7 电荷引力的位势和拉普拉斯方程

我们在前面已经讨论过的一元函数的微分方程, 通常称为常微分方程, 以表示它仅仅包含 "普通的" 导数, 即一元函数的导数. 但是, 在分析学和它的应用的很多分支中, 多元函数的偏微分方程, 即, 未知函数的偏导数与变量间的方程, 起着重要的作用. 在这里我们将论及有关拉普拉斯微分方程的某些典型应用.

我们已经考察了质点依牛顿引力定律产生的力场, 并且把它表成位势 Φ 的梯度 (参看第四章第 572 页). 在本节中我们要稍微详细地研究位势 [1].

a. 质量分布的位势

作为前面考察过的情况的推广, 我们现在取 m 为正的或负的质量或电荷. 在通常的牛顿引力定律中是不涉及负质量的, 但在电学理论中, 电荷代替了质量, 我们要区分正电荷与负电荷; 在这里, 电荷的库伦引力定律同质量的引力定律有相同的形式. 如果电荷 m 集中在空间的一点 (ξ,η,ζ), 我们称表达式 m/r, 其中

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2},$$

是这个质量在点 (x,y,z) 的位势 [2]. 把若干不同的源或极点 (ξ_i,η_i,ζ_i) 的这种位势加起来, 跟过去一样 (参看第 572 页), 我们得到质点组或点电荷组的位势

$$\Phi=\sum_i \frac{m_i}{r_i}.$$

表达式 $\mathbf{f}=\gamma\operatorname{grad}\Phi$ 给出了对应的力场, 其中 γ 是不依赖于质量及其位置的常数.

1) 一大批文献是专门研究分析学的这一重要分支的 (例如, 见 O.D. Kellogg《位势理论基础》, Frederick Ungar Publ. Co.).

2) 我们可以称这是质量的一个位势. 它加上任一常数而得的函数同样也可称为质量的位势, 因为它将给出同一个力场.

对于不是集中在孤立点，而是以密度 $\mu(\xi,\eta,\zeta)$ 连续地分布在 ξ,η,ζ 空间中一个确定区域 R 内的质量，我们定义这一质量分布的位势为

$$\Phi = \iiint \frac{\mu}{r} d\xi d\eta d\zeta. \tag{34a}$$

如果质量是以面密度 μ 分布在曲面 S 之上，这个曲面的位势是面积分

$$\iint \frac{\mu(u,v)}{r} d\sigma, \tag{34b}$$

积分取在曲面 S 上， $d\sigma$ 是面积元素.

对于沿曲线分布质量的位势，我们照样得到形式为

$$\int \frac{\mu(s)}{r} ds \tag{34c}$$

的表达式，其中 s 是这条曲线的弧长， $\mu(s)$ 是质量的线密度.

对于每种位势，由 $\Phi=$ 常数定义的 Φ 的同值曲面表示**等势面** [1].

线分布位势的一个例子是，由线密度 μ 为常数，分布在 z 轴上的线段 $-l \le z \le l$ 上的质量产生的位势. 在平面 $z=0$ 上我们考虑以 (x,y) 为坐标的点 P. 为简单起见，我们引入 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, 即原点到点 P 的距离. 于是在 P 的位势是

$$\Phi(x,y) = \mu\int_{-l}^{l} \frac{dz}{\sqrt{\rho^2+z^2}} + C.$$

这里我们对积分加了常数 C, 它不影响这个位势产生的力场. 右端的不定积分可按第一卷 [第 324 页 (26)] 算出，我们得到

1) 每一点具有力向量的方向的曲线称为**力线**. 因为在这里力有 Φ 的梯度方向，所以力线就是处处与等势面相交为直角的曲线. 于是，我们看出由单个极点或有限个极点产生的位势所对应的力线族如像从源泉一样从这些极点发出. 例如，在单个极点的情况，力线是简单地通过该极点的直线.

$$\int \frac{dz}{\sqrt{\rho^2+z^2}} = \operatorname{arc\,sinh}\frac{z}{\rho} = \log\frac{z+\sqrt{z^2+\rho^2}}{\rho},$$

所以 x,y 平面上的位势是

$$\Phi(x,y) = 2\mu\log\frac{l+\sqrt{l^2+\rho^2}}{\rho} + C.$$

为了得到沿两端方向无限延伸的线的位势，我们对常数 C 赋值 $-2\mu\log 2l$ [1], 因此得到

$$\Phi(x,y) = 2\mu\log\frac{l+\sqrt{l^2+\rho^2}}{2l} - 2\mu\log\rho.$$

如果现在令长度 l 无限增大，即，如果令线的长度趋向无穷，表达式 $\{l+\sqrt{l^2+\rho^2}\}/2l$ 趋向 1, 对于 $\Phi(x,y)$ 的极限值我们得到表达式

$$\Phi(x,y) = -2\mu\log\rho. \tag{35a}$$

所以我们看出，除去因子 -2μ 外，表达式

$$\log\rho = \log\sqrt{x^2+y^2} \tag{35b}$$

是质量均匀分布的垂直于 x,y 平面的直线的位势. 这里的等势曲面是圆柱面

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} = 常数.$$

在第 574 页上，我们已经算过常密度 (即单位面积上的质量) 为 μ 的球面的位势. 我们发现中心在原点，半径为 a 的球面在点 $P=(x,y,z)$ 的位势是

$$\Phi = \frac{4\pi a^2}{r}\mu \quad (r>a), \tag{36a}$$

$$\Phi = 4\pi a\mu \quad (r<a), \tag{36b}$$

1) 我们作此选择是为了使位势 Φ 在 $l\to\infty$ 的极限过程中保持有界.

其中

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{36c}$$

是原点到点 P 的距离. 密度为 μ 的球体的位势可利用把球分解为半径为 a, 面密度为 μda 的球面而得到. 因此, 半径为 A 的球体的位势可把公式 (36a, b) 关于 a 从 0 到 A 求积分得到. 我们发现 (参看第 575 页)

$$\Phi = \frac{4\pi A^3}{3r}\mu \quad (r > A), \tag{37a}$$

$$\Phi = \left(2\pi A^2 - \frac{2}{3}\pi r^2\right)\mu \quad (r < A). \tag{37b}$$

球体对 P 点上单位质量产生的相应的引力

$$\mathbf{f} = \gamma \operatorname{grad} \Phi \tag{37c}$$

指向原点, 其大小为

$$\begin{aligned} &\frac{4\pi A^3}{3r^2}\gamma\mu \quad 当 r > A, \\ &\frac{4\pi r}{3}\gamma\mu \quad 当 r < A. \end{aligned} \tag{37d}$$

除了先前考察过的分布外, 位势理论也要处理所谓**双层位势**, 我们用下述方法来得到它: 我们假设点电荷 M 和 $-M$ 分别位于点 (ξ, η, ζ) 和 $(\xi + h, \eta, \zeta)$, 这一对电荷的位势由

$$\begin{aligned} \Phi = &\frac{M}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} \\ &- \frac{M}{\sqrt{(x-\xi-h)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} \end{aligned}$$

给出. 如果我们让两极点间的距离 h 趋向 0, 同时让电荷 M 无限增大, 而使 M 总是等于 $-\mu/h$, 其中 μ 是常数, 那么 Φ 趋向极限

$$\mu \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right).$$

我们称这个表达式为以 ξ 方向为轴和以 μ 为 "矩" 的 偶极子或对偶的位势. 在物理上, 它表示彼此非常接近的一对相等和反号的电荷的位势. 同样, 我们能把偶极子的位势表成

$$\mu \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{r}\right)$$

的形式, 其中 $\partial/\partial\nu$ 表示沿任意的偶极子的轴向 ν 的方向微商.

如果我们设想偶极子以矩密度 μ 布满曲面 S, 且设在每点偶极子轴都是曲面的法方向, 则我们得到形如

$$\iint_S \mu(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma$$

的表达式, 其中 $\partial/\partial\nu$ 表示沿曲面的法方向的微商 (跟过去一样, 我们可以选择该法线的随便那一个方向), r 是从点 (x,y,z) 到曲面上的动点 (ξ,η,ζ) 的距离. 这一 双层 位势也可考虑成依下面方法产生: 在曲面的每一侧距离为 h 处我们构作曲面, 我们给其中一曲面的面密度为 $\mu/2h$, 而给另一曲面的面密度为 $-\mu/2h$. 这两层曲面一起在外点产生的位势, 当 $h \to 0$ 时就趋向上述表达式.

b. 位势的微分方程

我们将假设在所有表达式中, 所考虑的点 (x,y,z) 是空间中没有电荷的一个点, 所以被积函数和它关于 x,y,z 的导数是连续的. 根据这个假设我们得到所有上述的位势满足的一个关系式, 即, 拉普拉斯方程

$$\Phi_{xx}+\Phi_{yy}+\Phi_{zz}=0, \tag{38a}$$

它可简写成

$$\Delta\Phi=0 \tag{38b}$$

用简单的计算容易证实 (第 65 页), 表达式 $1/r$ 满足这个方程. 因为我们能在积分号下求关于 x,y,z 的微商, 所以对于从 $1/r$ 用求和

或求积分法构成的所有其它的表达式也满足这个方程 [1]. 由于可交换微分次序 [2], 我们发现单个偶极子的位势满足方程式

$$\Delta \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial \nu}\Delta \frac{1}{r} = 0. \tag{38c}$$

因而，双层位势也满足这个微分方程.

我们容易验证垂直线的位势 $\log \sqrt{x^2+y^2}$ 满足拉普拉斯方程 (也可参看第五章第 709 页). 因为这不再依赖变量 z, 所以它也满足更简单的二维拉普拉斯方程

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0. \tag{38d}$$

它们以及有关的偏微分方程的研究，形成了分析学的最重要的分支之一. 我们指出：位势理论并不总是主要针对寻找方程 $\Delta\Phi = 0$ 的通解，而宁可说是针对存在性的问题和那些满足指定条件的解的研究. 所以，位势理论的一个中心问题是边值问题，在那里我们要找出 $\Delta\Phi = 0$ 的解 Φ, 使它及其直到二阶导数在区域 R 中连续，并且它在 R 的边界上取指定的连续的值.

c. 均匀双层位势

我们在这里不可能详细地研究 **位势函数** [3]，即满足拉普拉斯方程 $\Delta u = 0$ 的函数. 在这个课题中高斯定理和格林定理 (第 741,

---

1) 注意积分号下求微商只当 $r \neq 0$, 即在没有电荷的区域中才合理. 否则拉普拉斯方程不再成立，例如：在球体内，按 (37b), 它的位势满足方程

$$\Delta\Phi = \Delta\left(2\pi A^2 - \frac{2}{3}\pi r^2\right)\mu = -4\pi\mu \neq 0.$$

2) 记住微分号 $\partial/\partial\nu$ 是对变量 (ξ,η,ζ) 而言的，表达式 Δ 是对变量 (x,y,z) 而言的. 附带地，当把函数 $1/r$ 考虑成六个变量 (x,y,z,ξ,η,ζ) 的函数时，它对两组变量对称，因此，关于变量 (ξ,η,ζ) 也满足拉普拉斯方程

$$\Phi_{\xi\xi} + \Phi_{\eta\eta} + \Phi_{\zeta\zeta} = 0.$$

3) 也称为 **调和函数**.

748 页) 是主要使用的工具之一. 因此, 通过一些例子来指明怎样进行这类研究也就够了.

我们首先考察以常数 $\mu = 1$ 为矩密度的双层位势, 即, 形如

$$V = \iint_S \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma \tag{39}$$

的一个积分. 它有简单的几何意义. 我们假设从坐标为 (x, y, z) 的 P 点能够 "看到" 双层曲面上的每一点, 意即它同 P 点能用与曲面不在别处相交的直线连接起来. 曲面 S 连同其边界点与 P 点相连接的射线族构成了空间的一个锥形区域 R. 现在, 我们可以说, **除了也许差一符号外, 均匀双层位势等于曲面 S 的边界与 P 点所对的立体角**. 这个立体角, 我们理解为以 P 点为中心的单位球面上被从 P 点引向 S 边界的射线切下部分的面积. 当射线穿过曲面的方向与正的法线方向 ν 相同时, 我们给立体角以正号, 反之, 给它负号.

为了证此, 我们记住, 函数 $u = 1/r$, 当不仅考虑成 x, y, z 的函数, 而且也是 (ξ, η, ζ) 的函数时, 仍旧满足拉普拉斯方程

$$\Delta u = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} = 0.$$

我们把坐标为 (x, y, z) 的点 P 固定下来, 用 (ξ, η, ζ) 来标记锥形区域 R 中的直角坐标; 我们用半径为 ρ 中心为 P 的小球切掉 R 的顶点; 剩余的区域记为 R_ρ. 对于函数 $u = 1/r$ (在区域 R_ρ 中看成 (ξ, η, ζ) 的函数) 运用格林公式 (第五章第 748 页)

$$\iiint_{R_\rho} \Delta u d\xi d\eta d\zeta = \iint_{S'} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma.$$

这里 S' 是 R_ρ 的边界, 而 $\partial/\partial n$ 表示沿外法向的微商. 因为 $\Delta u = 0$, 左端是零 [1]. 如果我们选取 S 上的正法向 ν 与外法向 n 相重合, 右端的曲面积分由三部分组成: (1) 在曲面 S 上所取的曲面积分

$$\iint_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma = \iint_S \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma,$$

这就是 (39) 中考察的表达式 V; (2) 在射线构成的侧面上所取的积分; (3) 半径为 ρ 的小球表面的一部分 Γ_ρ 上所取的积分. 第二部分是零, 由于法方向 n 与向径垂直, 因此它与 $r =$ 常数的球面相切. 对于半径为 ρ 的球的内部符号 $\partial/\partial n$ 等于 $-\partial/\partial\rho$, 因为外法线方向指向 r 的值减小的方向. 于是, 我们得到方程

$$V - \iint_{\Gamma_\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\rho}\right) d\sigma = 0$$

或

$$V = -\frac{1}{\rho^2} \iint_{\Gamma_\rho} d\sigma,$$

这里右端的积分取在属于 R_ρ 的边界的小球面的那部分 Γ_ρ 上. 现在我们把半径为 ρ 的球面上的面积元素写成 $d\sigma = \rho^2 d\omega$ 的形式, 其中 $d\omega$ 是单位球面的面积元素, 于是得到

$$V = -\iint d\omega.$$

右端的积分取在射线构成的锥体内部的单位球面上的那部分上, 我们立即看到右端确有上述的几何意义; 它与**视角的大小**反号是因为 S 的法方向选成从锥形区域 R 指向外部 [2]. 反之, 就取正号.

---

1) 从格林定理的这个形式推知: 一般说来, 当函数 u 在闭曲面内处处满足拉普拉斯方程 $\Delta u = 0$ 时, 在此闭曲面上所取的曲面积分

$$\iint \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$$

永远是零.

2) 这里的负号可如此解释: 随着法线方向这样选择, 负电荷应放在曲面向着 P 点的那一侧.

如果曲面 S 相对于 P 的位置不是上述的简单情形，而是通过 P 的某些射线与它相交几次，为了看出上面的说法也完全成立，我们只要把曲面分成若干简单类型的部分即可. 因此，有界曲面的均匀双层位势(矩为1)，除也许差一符号外，等于从该点 (x,y,z) 去看曲面边界时所成“视角”的大小.

对于闭曲面，把它分成两个有界的部分后，我们看出：如果 P 点在外部则表达式等于零，如果 P 点在内部则表达式等于 -4π.

类似的推导证实：在两个自变量的情形下，沿曲线 C 的积分

$$\int_C \frac{\partial}{\partial \nu}(\log r)ds$$

除可能差符号外，等于曲线相对于坐标为 (x,y) 的 P 点的张角.

与空间对应的结果一样，这个结果又作如下几何解释. 设坐标为 (ξ,η) 的点 Q 位于曲线 C 上，则 $\log r$ 在点 Q 沿曲线的法方向的导数为

$$\frac{\partial}{\partial \nu}(\log r) = \frac{\partial}{\partial r}(\log r)\cos(\nu,r) = \frac{1}{r}\cos(\nu,r),$$

其中符号 (ν,r) 表示法线与半径向量 r 的方向之间的夹角. 另一方面，当写成极坐标 (r,θ) 时，曲线的弧元素 ds 形如

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}d\theta = \frac{r\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}{-\dot{y}x+\dot{x}y}rd\theta = \frac{rd\theta}{\cos(\nu,r)}$$

(参看第一卷第 396 页)，所以积分变成

$$\int \frac{\partial}{\partial \nu}(\log r)ds = \int \frac{1}{r}\cos(\nu,r)\frac{rd\theta}{\cos(\nu,r)} = \int d\theta.$$

右端最后一个积分就是该角的分析表达式.

d. 平均值定理

作为格林变换的第二个应用，我们证明下面的位势函数的平均值性质：

设 u 在某区域 R 中满足微分方程 $\Delta u = 0$. 则位势函数在任何完全位于区域 R 内的半径为 r 的球的中心 P 上的值等于函数 u 在该球表面 S_r 上的平均值;即,

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r} \overline{u} d\sigma, \tag{40a}$$

其中 $u(x, y, z)$ 是在中心 P 的值, 而 $\overline{u}$ 是在半径为 r 的球的表面 S_r 上的值.

对此, 我们进行如下证明: 设 S_ρ 是半径为 $0 < \rho \leq r$, 与 S_r 同心, 且在其内部的球面, 由于 $\Delta u = 0$ 在 S_ρ 内部处处成立, 按第 867 页脚注得到

$$\iint_{S_\rho} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0,$$

其中 $\partial u / \partial n$ 是 u 沿 S_ρ 的外法线方向的导数. 如果 (ξ, η, ζ) 是流动坐标, 并引进以 (x, y, z) 为极点的球坐标

$$\xi - x = \rho \cos\phi \sin\theta,\ \eta - y = \rho \sin\phi \sin\theta,\ \zeta - z = \rho \cos\theta,$$

上面的方程变成

$$\iint_{S_\rho} \frac{\partial u(\rho, \theta, \phi)}{\partial \rho} d\sigma = 0.$$

由于球面 S_ρ 的面积元素 $d\sigma$ 等于 $\rho^2 d\overline{\sigma}$, 其中 $d\overline{\sigma}$ 是单位球面 S 的面积元素 [参看第 562 页 (30e)], 我们发现

$$\iint_{S} \frac{\partial u}{\partial \rho} d\overline{\sigma} = 0,$$

其中积分区域不再依赖于 ρ. 因此

$$\int_0^r d\rho \iint_S \frac{\partial u}{\partial \rho} d\overline{\sigma} = 0,$$

再交换积分次序并对 ρ 求积分, 我们有

$$\iint_S \{u(r, \theta, \phi) - u(0, \theta, \phi)\} d\overline{\sigma} = 0.$$

由于 $u(0,\theta,\phi)=u(x,y,z)$ 不依赖于 θ 和 ϕ, 于是

$$\iint_S u(r,\theta,\phi)d\overline{\sigma}=u(x,y,z)\iint_S d\overline{\sigma}=4\pi u(x,y,z).$$

因为

$$\iint_S u(r,\theta,\phi)d\overline{\sigma}=\frac{1}{r^2}\iint_{S_r} u(r,\theta,\phi)d\sigma,$$

其中右端的积分是取在曲面 S_r 上的，所以 u 的平均值性质得证.

用完全同样的方法可证，满足拉普拉斯方程 $u_{xx}+u_{yy}=0$ 的二元函数 u 有由公式

$$2\pi r u(x,y)=\int_{S_r}\overline{u}ds \tag{40b}$$

表示的**平均值性质**, 其中 $\overline{u}$ 表示位势函数在中心为点 (x,y) 的圆 S_r 上的值，而 ds 是该圆周的弧元素.

e. 圆的边值问题. 泊松 (Poisson) 积分

我们能够相当完满地处理的一个边值问题是两个自变量 x,y 的拉普拉斯方程在圆域的情形. 在圆域 $x^2+y^2\leq R^2$ 内引入极坐标 (r,θ). 我们希望求得一个函数 $u(x,y)$, 它在圆内和边界上连续，在区域内部具有连续的一阶和二阶导数并满足拉普拉斯方程 $\Delta u=0$, 而且在边界上取指定值 $u(R,\theta)=f(\theta)$. 在此，我们假设 $f(\theta)$ 是 θ 的连续周期函数，并有分段连续的一阶导数.

这个问题的解，在极坐标下是由所谓**泊松积分**

$$u=\frac{R^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\alpha)}{R^2-2Rr\cos(\theta-\alpha)+r^2}d\alpha \tag{41}$$

给出的.

为了证明这点，我们从用下述方法建立拉普拉斯方程的特解开始. 我们把拉普拉斯方程变成极坐标形式，得到

$$\Delta u=\frac{1}{r}(ru_r)_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0,$$

并且寻找可表成“变量分离”形式的解 $u=\phi(r)\psi(\theta)$, 即，表成一个 r 的函数与一个 θ 的函数的乘积形式的解. 如果我们用这个表达式代替拉普拉斯方程中的 u, 方程变成

$$r\frac{[r\phi'(r)]_r}{\phi(r)}=-\frac{\psi''(\theta)}{\psi(\theta)}.$$

由于左端不包含 θ 而右端不包含 r, 所以两端必然都不依赖这两个变量, 即, 必然等于同一常数 k. 因此，$\psi(\theta)$ 满足微分方程 $\psi''+k\psi=0$.

因为函数 u 是周期为 2π 的周期函数，因而，$\psi(\theta)$ 必然也是，且常数 k 应等于 n^2, 其中 n 是整数. 所以

$$\psi(\theta)=a\cos n\theta+b\sin n\theta,$$

其中 a 与 b 是任意常数.

$\phi(r)$ 的微分方程

$$r^2\phi''(r)+r\phi'(r)-n^2\phi(r)=0$$

是线性微分方程，我们能够直接验证函数 r^n 与 r^{-n} 是线性无关的解. 因为第二个解在原点变成无穷，而 u 在此点连续，所以我们留下第一个解 $\phi=r^n$, 这样就得到拉普拉斯方程的变量分离形式的解

$$r^n(a\cos n\theta+b\sin n\theta).$$

现在我们可根据叠加原理 (参看第 829 页) 用这样的解的线性组合来产生其它的解

$$\frac{1}{2}a_0+\Sigma r^n(a\cos n\theta+b\sin n\theta).$$

甚至这种形式的无穷级数也将是解，只要级数在圆内一致收敛并可逐项微商两次.

预定的边值函数 $f(\theta)$ 的富氏展开式

$$f(\theta)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta),$$

作为 θ 的级数，当然是绝对和一致收敛的 (参看第一卷). 所以，不容置疑，级数

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{R^n}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)$$

在圆内绝对和一致收敛. 如果假定 $r<R$, 因为逐项微商后的级数仍然是一致收敛的 (参看第一卷), 于是，这个级数能逐项微商. 因此，函数 $u(r,\theta)$ 是一个位势函数. 因为它在边界上取指定的值，所以它是我们边值问题的解.

引进富氏系数的积分公式

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\alpha)\cos n\alpha d\alpha,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\alpha)\sin n\alpha d\alpha,$$

我们就能把此解化到积分形式 (41). 因为一致收敛，我们能够交换积分号与求和号，得到

$$u(r,\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\alpha)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{R^n}\cos n(\theta-\alpha)\right\}d\alpha.$$

如果我们能够建立关系式

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{R^n}\cos n\tau=\frac{1}{2}\cdot\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos\tau+r^2},$$

泊松积分公式就可得证. 但是，根据第一卷 (第 660 页) 的方法，以复数表达式

$$\cos n\tau=\frac{1}{2}(e^{in\tau}+e^{-in\tau})$$

把上述关系式左端化归几何级数，就不难证明了. 我们把证明的细节留给读者.

练 习 6.7

1. 对泊松公式用反演法，寻求在单位圆**外部**区域上有界并在边界上取给定值 $f(\theta)$ 的位势函数 (所谓**外**边值问题).

2. 对于具有常数线密度 μ 的线段 $x=y=0,\ -l\le z\le l$ 的位势，试求 (a) 等势面和 (b) 力线.

3. 证明：如果在闭曲面 S 上给定调和函数 $u(x,y,z)$ 及其法向导数 $\partial u/\partial n$ 的值，则 u 在任一内点的值由表达式

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial(1/r)}{\partial n}\right)d\sigma$$

给出，其中 r 是点 (x,y,z) 到积分变动点的距离 (对函数 u 和 $\frac{1}{r}$ 应用格林公式).

6.8 来自数学物理的偏微分方程的其它例子

a. 一维波动方程

波的传播现象 (比如，光或声) 遵从所谓*波动方程*. 我们从考察所谓*一维波*的简单的理想化情况开始. 这样的波涉及某种性质的量 u—— 例如，压力，质点的位置或电场强度 —— 它不仅依赖于位置的坐标 x (我们把传播方向取为 x 轴) 而且也依赖于时间 t.

于是波函数满足形为

$$u_{xx}=\frac{1}{a^2}u_{tt}\tag{42a}$$

的偏微分方程，其中 a 是依赖于介质的物理性质的常数 [1].

我们能够求得方程 (42a) 的形为

$$u=f(x-at)$$

的解，其中 $f(\xi)$ 是 ξ 的任一函数，我们仅需假设它有一阶与二阶的连续导数. 如果我们取 $\xi=x-at$, 我们立即看出，因为

$$u_{xx}=f''(\xi),\quad u_{tt}=a^2f''(\xi),$$

1) 例如，对于弦的横振动，u 表示质点的横向位移，$a^2=T/\rho$, 其中 T 是张力，ρ 是单位长度的质量.

微分方程确实是满足的. 同样, 用任一函数 $g(\xi)$, 我们得到形为

$$u = g(x + at)$$

的解.

两个解都表示以速度 a 沿 x 轴传播的波动: 头一个表示波沿 x 轴的正方向前进, 第二个表示沿 x 轴的负方向前进. 设 $u = f(x - at)$ 在时间 t_1 时在任一点 $x = x_1$ 取值 $u(x_1, t_1)$; 则 u 在时刻 t 于点 $x = x_1 + a(t - t_1)$ 有同一值, 因为 $x - at = x_1 - at_1$, 所以 $f(x - at) = f(x_1 - at_1)$. 同样, 我们看出, 函数 $g(x + at)$ 表示一个沿 x 轴的负方向以速度 a 传播的波.

现在, 我们来解这个波动方程的下述**初值问题**. 从微分方程的全部可能的解中我们希望选出其**初始状态** (在 $t = 0$) 由预定的函数 $u(x, 0) = \phi(x)$ 及 $u_t(x, 0) = \psi(x)$ 给出的解. 为了解决这个问题, 我们只要写出

$$u = f(x - at) + g(x + at) \tag{42b}$$

并从两个方程

$$\begin{aligned} \phi(x) &= f(x) + g(x), \\ \frac{1}{a}\psi(x) &= -f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

定出函数 f 与 g 即可. 第二个方程给出

$$c + \frac{1}{a}\int_0^x \psi(\tau)d\tau = -f(x) + g(x),$$

其中 c 是任意积分常数. 由此, 我们容易得到所要求的解形为

$$u(x, t) = \frac{\phi(x + at) + \phi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\tau)d\tau. \tag{42c}$$

引进新变量 $\xi = x - at$, $\eta = x + at$ 代替 x 和 t, 读者自己可证明, 波动方程除此以外没有其它的解存在了.

b. 三维空间的波动方程

在三维空间中波函数 u 依赖于四个自变量，即三个空间坐标 x, y, z 及时间 t. 于是，波动方程是

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \frac{1}{a^2} u_{tt}, \tag{43a}$$

或，简写为

$$\Delta u = \frac{1}{a^2} u_{tt}. \tag{43b}$$

在此我们又容易求得表示物理上的平面波传播的解. 即，任何二次连续可微函数 $f(\xi)$ 可产生微分方程的解，只要我们取 ξ 为一形状是

$$\xi = \alpha x + \beta y + \gamma z \pm at$$

的线性表示式，而其系数满足关系式

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

因为

$$\Delta u = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) f''(\xi) = f''(\xi)$$

和

$$u_{tt} = a^2 f''(\xi),$$

我们看到 $u = f(\alpha x + \beta y + \gamma z \pm at)$ 确实是方程 (43b) 的一个解.

如果 q 是从平面 $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ 到点 (x, y, z) 的距离，我们从解析几何 (参看第 146 页) 知道

$$q = \alpha x + \beta y + \gamma z,$$

所以，首先，我们从表达式

$$u = f(q + at)$$

看出，在与平面 $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ 平行且相距为 q 的平面的全部点上，在给定的时刻传播的性质 (由 u 表示) 具有同一的数值. 性质

在空间中是这样传播的：平行于 $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$ 的平面永远是使该性质等于常数的曲面；在垂直于该平面方向的传播速度是 a. 在理论物理中这一类传播现象称之为**平面波**.

一种特别重要的情况是性质 u 关于时间是周期的. 如果振动的频率是 ω, 这类现象可表示为

$$\begin{aligned} u &= \exp[ik(\alpha x+\beta y+\gamma z+at)] \\ &= \exp[ik(\alpha x+\beta y+\gamma z)]\exp(i\omega t), \end{aligned}$$

其中 $k/2\pi$ 是波长 λ 的倒数： $k=2\pi/\lambda=\omega/a$.

四个自变量的波动方程还有其它的解，它表示从某一定点，例如说从原点扩散开来的**球面波**. 球面波定义为：在给定的瞬间，在以原点为中心的球面上的每一点性质是相同的，即， u 在球面的全部点上取相同的数值. 为找出满足这个条件的解，我们把 Δu 变到球坐标 (r,θ,ϕ), 然后假设 u 仅依赖于 r 及 t 而不依赖于 θ 和 ϕ. 如果我们相应地让 u 对 θ 和 ϕ 的导数等于零 (参看第 751 页), 微分方程 (43b) 变成

$$u_{rr}+\frac{2}{r}u_r=\frac{1}{a^2}u_{tt}$$

或

$$(ru)_{rr}=\frac{1}{a^2}(ru)_{tt}.$$

我们用 w 代替量 ru, 注意到 w 是我们已经讨论过的方程

$$w_{rr}=\frac{1}{a^2}w_{tt}$$

的解；因此， w 必被表成

$$w=f(r-at)+g(r+at).$$

结果有，

$$u=\frac{1}{r}[f(r-at)+g(r+at)]. \tag{43c}$$

现在读者可自己直接验证这类函数确为微分方程 (43b) 的解.

物理上, 函数 $u = f(r - at)/r$ 表示以速度 a 从中心向外传播到空间中的波.

c. 自由空间中的麦克斯韦 (Maxwell) 方程组

作为最后的例子, 我们来讨论方程组 —— 著名的麦克斯韦方程组, 它构成了电动力学的基础. 但是, 我们将不试图从物理学的观点去探讨这个方程组, 而仅仅用它们来解释前面已经提出的种种数学概念.

自由空间中的电磁场由两个向量 (其分量是位置和时间的函数) 所确定, 一是分量为 E_1, E_2, E_3 的电向量 $\mathbf{E}$, 一是分量为 H_1, H_2, H_3 的磁向量 $\mathbf{H}$. 这些向量满足麦克斯韦方程组

$$\operatorname{curl}\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0, \tag{44a}$$

$$\operatorname{curl}\mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0, \tag{44b}$$

其中 c 是在自由空间中的光速. 用向量的分量表达式, 方程组就是

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_3}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial H_1}{\partial t} &= 0,\\
\frac{\partial E_1}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial H_2}{\partial t} &= 0,\\
\frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y} + \frac{1}{c}\frac{\partial H_3}{\partial t} &= 0,
\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_3}{\partial y} - \frac{\partial H_2}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial E_1}{\partial t} &= 0,\\
\frac{\partial H_1}{\partial z} - \frac{\partial H_3}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial E_2}{\partial t} &= 0,\\
\frac{\partial H_2}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial y} - \frac{1}{c}\frac{\partial E_3}{\partial t} &= 0,
\end{aligned}$$

所以, 我们有了六个一阶偏微分方程的方程组, 一阶的含意是, 方程中包含各分量对空间坐标和对时间的一阶偏导数.

现在我们推演某些特殊的关于麦克斯韦方程组的结果. 如果我们求两方程组的散度, 并注意 $\operatorname{div}\operatorname{curl}\mathbf{A}=0$ (参阅第 227 页) 以及对时间的微商和求散度的次序是可交换的, 我们从 (44a, b) 得到

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=\text{常数}, \tag{45a}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H}=\text{常数}; \tag{45b}$$

即, 两个散度不依赖于时间. 特别, 如果一开始 $\operatorname{div}\mathbf{E}$ 和 $\operatorname{div}\mathbf{H}$ 是零, 则它们在所有时刻保持为零.

现在我们考虑在场中的任一闭曲面 S, 在被它包围的整个区域上求体积分

$$\iiint \operatorname{div}\mathbf{E}d\tau$$

和

$$\iiint \operatorname{div}\mathbf{H}d\tau.$$

如果对这些积分应用高斯定理 (第 741 页), 它们就变成法向分量 E_n, H_n 在曲面 S 上的积分. 于是, 从方程

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=0,\quad \operatorname{div}\mathbf{H}=0$$

给出

$$\iint_S E_n d\sigma=0,\quad \iint_S H_n d\sigma=0.$$

在电学理论中, 面积分

$$\iint_S E_n d\sigma\text{或}\iint_S H_n d\sigma$$

称为通过曲面 S 的电或磁通量. 因此, 我们的结论可叙述如下:

假定 $\operatorname{div}\mathbf{E}$ 和 $\operatorname{div}\mathbf{H}$ 的初条件为零, 则通过一闭曲面的电通量或磁通量必是零.

如果我们考察曲面 S 被曲线 Γ 界住的一部分, 就可从麦克斯韦方程组得到进一步的推论如下:

如果用下标 n 表示向量沿曲面 S 的法向分量，从麦克斯韦方程组 (44a, b) 可直接得到

$$(\operatorname{curl}\mathbf{E})_n = -\frac{1}{c}\frac{\partial H_n}{\partial t},$$
$$(\operatorname{curl}\mathbf{H})_n = +\frac{1}{c}\frac{\partial E_n}{\partial t}.$$

如果在以 $d\sigma$ 为面积元素的曲面上积分这些方程，用斯托克斯 (Stokes) 定理 (参看第 753 页) 就能把左端的积分变为沿边界 Γ 的线积分. 这样做了之后，又在积分号外对 t 取微商，我们得到方程组

$$\int_\Gamma E_s ds = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\iint_S H_n d\sigma,$$
$$\int_\Gamma H_s ds = +\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\iint_S E_n d\sigma,$$

这里左端积分号下的符号 E_s 和 H_s 是电或磁向量沿描述曲线 Γ 的弧长增加方向的 **切向分量**，并使弧长的增加方向与法线方向 n 构成右手螺旋.

这些方程表达的事实可用语言表述如下：

围绕一面元的电或磁力的线积分与通过该面元的电或磁通量的变化率成比例，比例常数是 $-1/c$ **或** $1/c$.

最后，我们将建立麦克斯韦方程组与波动方程之间的联系. 事实上，我们发现，向量 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$，也就是说，它们的每个分量，都满足波动方程

$$\Delta u = \frac{1}{c^2}u_{tt}.$$

为了证实这一点，我们从两个方程中，比如说，消去向量 $\mathbf{H}$：将第二个方程关于时间 t 求微商，并用第一个方程来替换 $\partial\mathbf{H}/\partial t$.

于是推知

$$c\operatorname{curl}(\operatorname{curl}\mathbf{E}) + \frac{1}{c}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = 0.$$

现在如果用向量关系式 [1]

$$\operatorname{curl}(\operatorname{curl}\mathbf{A}) = -\Delta\mathbf{A} + \operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{A}), \tag{46}$$

1) 从它们的坐标表达式可直接推得此向量关系式.

并注意到

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0,$$

我们立即得到

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \tag{47a}$$

同样，我们能够证实向量 $\mathbf{H}$ 满足同样的方程:

$$\Delta \mathbf{H} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}. \tag{47b}$$

练 习 6.8

1. 积分下列偏微分方程:

(a) $u_{xy} = 0$,

(b) $u_{xyz} = 0$,

(c) $u_{xy} = a(x, y)$.

2. 求方程

$$u_{xy} = u$$

满足 $u(x,0) = u(0,y) = 1$ 的幂级数解.

3. 求双参数球面族

$$z^2 = 1 - (x-a)^2 - (y-b)^2$$

满足的偏微分方程.

4. 证明：如果

$$z = u(x, y, a, b)$$

是一阶偏微分方程

$$F(x, y, z, z_x, z_y) = 0$$

的依赖于两个参数 a, b 的解，则从 $z = u(x, y, a, b)$ 中抽出的每一单参数解族的包络仍然是解.

5. (a) 求方程

$$u_x^2 + u_y^2 = 1$$

的形状是 $u = f(x) + g(y)$ 的特解.

(b) 求方程

$$u_x u_y = 1$$

的形状是 $u = f(x) + g(y)$ 和 $u = f(x) \cdot g(y)$ 的特解.

(c) 如果在

$$u = ax + \frac{1}{a}y + b$$

中令 $b = ka$ (k 是常数), 试用第 4 题的结果求出本题中 (b) 的另外的解.

6. 把方程

$$u_{xx} + 5u_{xy} + 6u_{yy} = e^{x+y}$$

化为第 1 题 (c) 的形式, 并求解.

7. 证明: 如果 K 是 x, y, z 的齐次函数, 则方程

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0$$

有一个解是 $(x^2 + y^2 + z^2)$ 的方幂.

8. 确定满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

及条件

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 = a^2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2$$

的解.

9. (a) 求波动方程

$$u_{xx} = \frac{1}{c^2}u_{tt}$$

满足边条件

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0$$

的形为 $u(x,t)=\phi(x)\psi(t)$ 的特解.

(b) 把 (a) 中的解表成 $f(x+ct)+g(x-ct)$ 的形式.

(c) 受到弹拨的弦的振动问题: 在区间 $[0,\pi]$ 上把 $f(x)$ 展成富氏正弦级数 (对于 $0\leq x\leq\pi$ 它定义了 $f(-x)=-f(x)$) 求对于 $0\leq x\leq\pi$, 满足初条件

$$u(x,0)=f(x)$$
$$u_t(x,0)=0$$

的上述类型的解，其中

(i) $f(x)=\begin{cases}x,\ 0\leq x\leq\pi/2\\ \pi-x,\ \pi/2\leq x\leq\pi,\end{cases}$

(ii) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\sin nx.$

10. 设 $u(x,t)$ 表示波动方程

$$u_{xx}=\frac{1}{a^2}u_{tt}\quad(a>0)$$

的解，它是二次连续可微的. 又设 $\phi(t)$ 是二次连续可微的给定函数，并且

$$\phi(0)=\phi'(0)=\phi''(0)=0.$$

试在 $x\geq 0$ 和 $t\geq 0$ 求解 u, 使它满足边条件

$$u(x,0)=u_t(x,0)=0\quad(x\geq 0),$$
$$u(0,t)=\phi(t)\quad(t\geq 0).$$

第七章　变分学

7.1　函数及其极值

在 n 元可微函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的通常极大值与极小值的理论中，f 在定义域中某一点达到极值的必要条件 (第 385 页) 是

$$df=0 \text{ 或} \operatorname{grad} f=0 \text{ 或} f_{x_i}=0\ (i=1,\cdots,n). \tag{1}$$

这些方程表明了函数 f 在该点的逗留特性. 至于这些逗留点是否确是极大或极小点，就只能取决于进一步的研究. 极值的充分条件是取不等式的形式 (见第 385 页), 跟方程 (1) 大不一样.

变分学也是讨论极值 (或逗留值) 问题的，然而是在完全新的情况下来讨论的. 现在，那些我们求极值的函数不再依赖于在某区域内的一个自变量或有限个自变量了，而是叫做泛函或函数的函数了. 明确地说，为了确定它们，我们需要知道一个或多个函数或曲线 (或曲面，看情形而定), 即所谓自变函数.

约翰 · 伯努利在 1696 年对最速降线问题的陈述首先引起了对这类问题的普遍注意.

在垂直的 x,y 平面上，点 $A=(x_0,y_0)$ 与点 $B=(x_1,y_1)$ (设 $x_1>x_0,\, y_0>y_1$) 用一条光滑曲线 $y=u(x)$ 如此连接起来，使得质点在重力 (它的作用方向为正 y 轴方向) 作用下，沿曲线无摩擦地从 A 滑行到 B 所用的时间是最短的.

问题的数学表达将依据如下的物理假设：沿这样的曲线 $y = \phi(x)$，速度 ds/dt (s 为曲线的弧长) 正比于 $\sqrt{2g(y-y_0)}$，即下落高度的平方根. 因此质点下落所需的时间为

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dt}{ds}\frac{ds}{dx}dx = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y-y_0}}dx$$

(参考第一卷，第 456 页). 如果我们舍去不重要的因子 $\sqrt{2g}$，并且取 $y_0 = 0$ (我们可以做到这一点而无损于一般性)，我们就得到下面的问题：在所有的连续可微函数 $y = \phi(x)$ ($y \geq 0$ 且 $\phi(x_0) = 0$，$\phi(x_1) = y_1$) 中，寻找一个函数，使得积分

$$I\{\phi\} = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}dx \tag{2a}$$

有最小的可能值.

在第 897 页上，我们将得到结果 (曾使伯努利的同代人感到震惊)：曲线 $y = \phi(x)$ 必定是**旋轮线**. 这里我们要强调，伯努利问题跟初等的极大值和极小值问题是完全不同的. 表达式 $I\{\phi\}$ 依赖于函数 ϕ 的全过程. 由于 ϕ 不能用自变量的有限个值来描述，因此 I 是一种新类型的函数. 我们用花括号来指出它的“函数 $\phi(x)$ 的函数”的特征.

下面是另一个性质类似的问题：两点 $A = (x_0, y_0)$ 与 $B = (x_1, y_1)$ ($x_1 > x_0, y_0 > 0, y_1 > 0$) 用一条位于 x 轴上的曲线 $y = u(x)$ 连接起来，使得当这条曲线绕 x 轴转动时所成的旋转曲面的面积是**尽可能地小**.

利用在第 562 页上给出的旋转曲面的面积表达式，并且舍去不重要的因子 2π，我们有该问题如下的数学陈述：在所有的连续可微函数 $y = \phi(x)$ ($\phi(x_0) = y_0$，$\phi(x_1) = y_1$，$\phi(x) > 0$) 中，寻找一个函数，使得积分

$$I\{\phi\} = \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}dx \quad [y = \phi(x)] \tag{2b}$$

有最小的可能值. 将会看到, 其解答是一条悬链线.

在平面上寻找连结两点 A 与 B 的最短曲线, 这个初等的几何问题属于相同的范畴. 这个问题在分析上是: 在一个区间 $t_0 \le t \le t_1$ 上, 寻找参数 t 的两个函数 $x(t), y(t)$, 它们取预定的值 $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ 与 $y(t_0) = y_0$, $y(t_1) = y_1$, 并且使积分

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \quad \left(\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \dot{y} = \frac{dy}{dt}\right) \tag{2c}$$

有最小的可能值. 当然, 其解答是一条直线.

在一个已知曲面 $G(x, y, z) = 0$ 上求测地线, 即在曲面上用最短的可能曲线连接曲面上以 (x_0, y_0, z_0) 与 (x_1, y_1, z_1) 为坐标的两点, 相应问题的解答就不是那样简单了. 用分析的话来说, 我们有下面的问题: 设参数 t 的三个为一组的函数 $x(t), y(t), z(t)$, 它们使方程

$$G(x, y, z) = 0 \tag{3a}$$

成为 t 的恒等式, 而且 $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, $z(t_0) = z_0$ 与 $x(t_1) = x_1$, $y(t_1) = y_1$, $z(t_1) = z_1$. 在所有这些函数组中寻找一组使积分

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt \tag{3b}$$

有最小的可能值.

在第 404 页上已经讨论的等周问题—— 求一条给定长度的闭曲线使它包围最大的可能面积 —— 也属于同一范畴. 我们在前面已经证明了它的解答是一圆周 [1].

---

1) 那里给出的证明只适用于凸的曲线; 然而, 下面的注解能使我们把结果直接推广到任何曲线: 我们考虑曲线 C 的凸壳 (即, 包含 C 的最小的凸集). 它的边界 K 由 C 的凸弧和那些跟 C 相切于两点并且在 C 的凹部上搭桥的 C 的切线段组成. 显然, 只要 C 不是凸的, K 内的面积就超过 C 内的面积, 而且另一方面, K 的周长要比 C 的短. 如果我们现在使 K 连续扩张使得它永远保持同类形状, 直到最后的曲线 K' 有预定的周长, 那么 K' 将是一条与 C 的周长相等然而包围的面积要大的曲线. 因此, 在等周问题中, 为了得到最大面积, 我们可以一开头就以凸曲线为限.

在这里遇到的这类问题的一般提法如下：给定三元函数 $F(x, \phi, \phi')$ 它在定义域中是连续的，并且有一阶和二阶的连续导数. 如果在这个函数 F 中我们用函数 $y = \phi(x)$ 代替 ϕ 以及用导数 $y' = \phi'(x)$ 代替 ϕ'，那么 F 变成 x 的函数，而且形如

$$I\{\phi\} = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx \tag{4}$$

的积分变成一个依赖于函数 $y = \phi(x)$ 的确定数；即，它是一“对于函数 $\phi(x)$ 计值的泛函”.

变分学的基本问题如下：

在所有定义在区间 $x_0 \le x \le x_1$ 上，取预定的边值 $y_0 = \phi(x_0)$ 与 $y_1 = \phi_1(x)$，连续且有连续的一阶与二阶导数的函数中，寻找一个函数使得泛函 $I\{\phi\}$ 有最小的可能值(或最大的可能值).

在讨论这个问题时，本质的一点是加在函数 $\phi(x)$ 上的**容许条件**. 作出值 $I\{\phi\}$ 只需要 F 在用 $\phi(x)$ 代入后是 x 的分段连续函数，而这只要导数 $\phi'(x)$ 分段连续就可得到保证. 但是我们对容许条件作了更严厉的要求：函数 $\phi(x)$ 的一阶甚至二阶导数是连续的. 当然，搜索极大值或极小值的领域因此受到限制. 然而，我们将会看到，这个限制实际上不影响到解，即在采用更大领域时的那些最合适的函数总可以在比较局限的具有连续的一阶和二阶导数的函数领域中找到.

这类问题在几何与物理中是很常见的，这里我们仅举一例：几何光学的基本原理. 我们考虑在 x, y 平面中的光束，并且假定光的速度是点 (x, y) 和方向 y' 的已知函数 $v(x, y, y')$ [设 $y = \phi(x)$ 为光的轨线方程， $y' = \phi'(x)$ 为相应的导数]，则费马的最小时间原理可叙述成：

一光线在两个已知点 A, B 之间的实际轨线是使得光线通过它所用的时间小于光线通过任何其他从 A 到 B 的轨线所用的时间.

换言之，如果 t 是时间，而 s 为任一连接点 A 与 B 的曲线的弧长，那么光线通过曲线在 A 与 B 之间的那部分所花的时间等于积分

$$I\{\phi\} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dt}{ds}\frac{ds}{dx}dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(x,y,y')}dx. \tag{5}$$

光的实际轨线是由那个使这积分取最小的可能值的函数 $y=\phi(x)$ 确定的.

我们看到，寻找光线的轨线，这个光学问题是前述一般问题的特例，对应的

$$F = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v}.$$

在大多数光学的例子中，光速 v 跟方向无关而只是位置的函数 $v(x,y)$.

7.2 泛函极值的必要条件

a. 第一变分等于零

我们的目的是求出函数 $y=\phi(x)$ 使由 (4) 规定的积分产生极大值或极小值的必要条件，或用一般的述语，极值的必要条件. 我们运用的方法十分类似于在求一元或多元函数极值的初等问题中所用的方法. 我们假定 $y=\phi=u(x)$ 是解. 然后我们需要说明一个事实：(对于极小值) 当 u 由别的容许函数 ϕ 取代时，I 必定增加. 而且，由于我们仅仅关心获得必要条件，我们可限于考虑那些与函数 u 接近的任一特殊类属的函数 ϕ，即那些使得差 $\phi-u$ 的绝对值保持在预定界限之内的函数.

我们设想函数 u 是属于以 ε 为参数的单参数函数族，其构造如下：取在区间的边界上为零的任一函数 $\eta(x)$，即对它有 $\eta(x_0)=0$，$\eta(x_1)=0$，而且它在闭区间上处处有连续的一阶和二阶导数. 然后我们作函数族

$$\phi(x,\varepsilon) = u(x) + \varepsilon\eta(x).$$

表达式 $\varepsilon\eta(x)=\delta u$ 叫作函数 u 的变分.[因为 $\eta(x)=\partial\phi/\partial\varepsilon$, 所以符号 δ 表示当 ε 作为自变量而 x 作为参数时所得的微分] 如果我们把函数 u 与函数 η 一样看成是固定的，那么泛函的值

$$I\{u+\varepsilon\eta\}=G(\varepsilon)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,u+\varepsilon\eta,u'+\varepsilon\eta')dx$$

就变成 ε 的函数；而且，u 给出 $I\{\phi\}$ 的极小值，这个假定蕴涵上述函数将在 $\varepsilon=0$ 处获得极小值. 由此作为必要条件我们得方程

$$G'(0)=0, \tag{6a}$$

并且还有不等式

$$G''(0)\geq 0. \tag{6b}$$

对于极大值相应的必要条件有相同的方程 $G'(0)=0$ 和相反的不等式 $G''(0)\leq 0$. 条件 $G'(0)=0$ 对一切函数 η 必定成立，其中 η 除了满足前面的条件外是任意的.

撇开极大值与极小值之间的判别问题，我们说：如果函数 u 对所有的函数 η 都满足方程 $G'(0)=0$, 那么积分 I 对 $\phi=u$ 是逗留的. 假如像以前那样，我们用符号 δ 表示对于 ε 的微分，我们还说：当方程

$$\delta I=\varepsilon G'(0)=0$$

由函数 $\phi=u$ 和任意的 η 所适合时，它表达了 I 的逗留性质. 表达式

$$\varepsilon G'(0)=\varepsilon\left\{\frac{d}{d\varepsilon}\int_{x_0}^{x_1}F(x,u+\varepsilon\eta,u'+\varepsilon\eta')dx\right\}_{\varepsilon=0} \tag{6c}$$

称之为积分的变分, 或更确切地，第一变分 [1]. 所以，积分的逗留性质与第一变分等于零完全意味着同一件事.

---

1) 变分学一词的应用由来于此，它指的意思是：在这个课题中我们研究"函数的函数"在独立函数或自变函数由改变一参数 ε 而变动时的性态.

逗留性质对于极大值或极小值的出现是必要的，但是，正如通常极大值或极小值的情况一样，它不是这两种可能性中的某一种出现的充分条件. 我们在这里将不研究充分性问题：以下，我们只考虑逗留性的问题.

我们的主要目标是按这样的方式变换积分的逗留性条件 $G'(0)=0$，使得它成为只是 u 而不再含任意函数 η 的条件.

练 习 7.2 a

1. 联系最速降线问题 (见第 883–884 页)，当点 A 与 B 用直线连接时，计算降落时间.

2. 设球坐标 (r,θ,ϕ). 令在三维空间中运动的一质点的速度为 $v=1/f(r)$. 该质点要用多少时间扫描点 A 与 B 之间的由参数 σ 给出的曲线弧 [曲线上点的坐标为 $r(\sigma),\theta(\sigma),\phi(\sigma)$]?

b. 欧拉微分方程的推导

下面的定理构成变分学基本的判定标准：

积分

$$I\{\phi\}=\int_{x_0}^{x_1}F(x,\phi,\phi')dx \tag{7a}$$

当 $\phi=u$ 时为逗留的必要和充分条件是：u 为容许函数，且满足欧拉微分方程

$$L[u]=F_u-\frac{d}{dx}F_{u'}=0, \tag{7b}$$

或

$$F_{u'u'}u''+F_{uu'}u'+F_{xu'}-F_u=0. \tag{7c}$$

为了证明这一点，我们注意到表达式

$$G(\varepsilon)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,u+\varepsilon\eta,u'+\varepsilon\eta')dx$$

对 ε 求微分可以在积分号下进行 (参考第 82 页), 倘若微分所得的 x 的函数是连续的或至少是分段连续的. 此时, 令 $u+\varepsilon\eta=y$ 并且微分, 由于对 f,u 和 η 所作的假设, 我们在积分号下得到的表达式 $\eta F_y+\eta' F_{y'}$ 满足刚才所讲的条件. 因此, 我们立即得到

$$G'(0)=\int_{x_0}^{x_1}[\eta F_u(x,u,u')+\eta' F_{u'}(x,u,u')]dx. \tag{7d}$$

为了后面的用途, 我们指出: 在推导这个方程时, 除了函数 u 和 η 的连续性及其一阶导数的分段连续性以外, 我们什么也没有用到. 在这个方程中, 任意函数在积分号下以双重形式, 即 η 和 η' 出现. 然而, 用分部积分, 我们立即可去掉 η'; 由 $\eta(x_0)$ 和 $\eta(x_1)$ 等于零的假定, 我们有

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1}\eta' F_{u'}dx&=\eta F_{u'}\Big|_{x_0}^{x_1}-\int_{x_0}^{x_1}\eta\left(\frac{d}{dx}F_{u'}\right)dx\\&=-\int_{x_0}^{x_1}\eta\left(\frac{d}{dx}F_{u'}\right)dx.\end{aligned}$$

在这个分部积分中我们应当假设表达式 $\frac{d}{dx}F_{u'}$ 有定义而且可积, 而由于我们假定了 F 二阶导数的连续性, 所以情况确实如此. 于是, 如果我们简写

$$L[u]=F_u-\frac{d}{dx}F_{u'}, \tag{7e}$$

那么我们有方程

$$\int_{x_0}^{x_1}\eta L[u]dx=0. \tag{7f}$$

对于每一个满足我们的条件, 而在其他方面则是任意的函数 η, 这个方程必须成立. 从这一点, 而且根据下面的引理得出结论:

$$L[u]=0. \tag{7g}$$

引理 I. 如果函数 $C(x)$ 在所考虑的区间内连续而且对任意函数 $\eta(x)$ (使得 $\eta(x_0)=\eta(x_1)=0$ 与 $\eta''(x)$ 为连续)满足关系式

$$\int_{x_0}^{x_1}\eta(x)C(x)dx=0.$$

那么对区间内的一切 x 值有 $C(x) = 0$. (这个引理的证明放到第 893 页.)

但是, 我们可以用不同的方法 [1] 得到条件 (7g): 由分部积分法可以在方程

$$\int_{x_0}^{x_1} (\eta F_u + \eta' F_{u'}) dx = 0$$

中消去 η, 因为如果在分部积分时我们为了简单起见写成 $F_{u'} = A$, $F_u = b = B'$, 并且记住 η 的边条件, 我们就得到

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta F_u dx = \int_{x_0}^{x_1} \eta B' dx = -\int_{x_0}^{x_1} \eta' B dx.$$

如果我们置 $\zeta = \eta'$, 我们就有类似于 (7f) 的条件

$$\int_{x_0}^{x_1} \zeta (A - B) dx = 0. \tag{7h}$$

在推导这个公式时我们不需要对 η 与 u 的二阶导数作任何假定. 相反, 只要假定 ϕ (或 u 和 η) 连续且有分段连续的一阶导数就足够了. 方程 (7h) 不是对任意的 (分段连续) 函数 ζ 必定成立, 而只是对那些在端点满足我们那些条件的函数 $\eta(x)$ 的导数 ζ 才成立. 然而, 若 $\zeta(x)$ 是任意给定的分段连续函数, 且满足关系

$$\int_{x_0}^{x_1} \zeta(x) dx = 0, \tag{7i}$$

我们就可以使

$$\eta = \int_{x_0}^{x} \zeta(t) dt;$$

于是我们构造了一个可容许的 η, 这是因为 $\eta' = \zeta$ 和 $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$. 我们从而得到下面的结果:

积分为逗留的必要条件是

$$\int_{x_0}^{x_1} \zeta (A - B) dx = 0, \tag{7j}$$

---

1) 第一个方法是拉格朗日的, 而第二个方法是雷蒙的.

其中 ζ 是一个仅仅满足条件(7i)的任意的分段连续函数.

现在我们需要借助下述引理:

引理 II. 如果分段连续函数 $S(x)$ 满足条件

$$\int_{x_0}^{x_1} \zeta S dx = 0, \tag{8a}$$

其中 $\zeta(x)$ 是在区间内分段连续而且满足

$$\int_{x_0}^{x_1} \zeta dx = 0 \tag{8b}$$

的任意函数, 那么 $S(x)$ 是一个常数.

这个引理也将在下面第 893 页得到证明. 如果在证明之前我们假定它是正确的, 那么由 (7h)—— 只要我们代以上面 A 和 B 的表达式 —— 推出

$$\int_{x_0}^{x} F_u dx + c = F_{u'}.$$

由于 F_u 是分段连续的, 上式左端作为一不定积分可以对 x 微分而且其导数为 F_u; 所以同样对右端做也是正确的. 因此, 对于所设的解 u, 表达式 $(d/dx)F_{u'}$ 存在, 而且方程

$$F_u = \frac{d}{dx}F_{u'} \tag{9a}$$

在 u' 的所有连续点上成立.

于是, 当容许函数类 $\{\phi(x)\}$ 一开始就扩充成为只要求 $\phi(x)$ 的一阶导数分段连续, 那么欧拉方程仍旧是极值的必要条件, 或积分为逗留的条件.

欧拉方程是二阶常微分方程,它的解叫作极小值问题的极值曲线. 为了解决极小值问题, 我们须在所有的极值曲线之中找出一条满足预定边条件的曲线.

如果勒让德条件

$$F_{u'u'} \neq 0 \tag{9b}$$

对 $\phi = u(x)$ 成立，那么该微分方程可以变成“正规的”形式 $u'' = f(x, u, u')$, 其中右边是含 x, u, u' 的已知表达式.

c. 基本引理的证明

现在我们来证明上面用过的两个引理. 为了证明引理 I, 我们假定在某一点，比如说 $x = \xi$, $C(x)$ 不是零而且是正的. 于是，由于 $C(x)$ 是连续的，我们自然可以划出一个 (x_0, x_1) 的子区间

$$\xi - a \leq x \leq \xi + a, \tag{9c}$$

使得 $C(x)$ 在其中仍旧是正的. 我们现在选取一个二次可微的 η, 它在此子区间内为正而在别处为零，比如说，对 (9c) 中的 x, 令

$$\eta(x) = (x - \xi + a)^4 (x - \xi - a)^4 = \{(x - \xi)^2 - a^2\}^4.$$

这个函数确实满足所有的给定条件； $\eta(x)C(x)$ 在子区间的内部为正而在外部为零. 所以积分

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta C dx$$

不可能是零 [1]. 因为这与我们的假设矛盾，所以 $C(\xi)$ 不可能是正的. 同理， $C(\xi)$ 也不可能是负的. 于是 $C(\xi)$ 如引理中所说的那样，必定对区间内所有的 ξ 都等于零.

为了证明引理 II, 我们指出，关于 $\zeta(x)$ 的假设 (8b) 直接导致关系式

$$\int_{x_0}^{x_1} \zeta(x)\{S(x) - c\} dx = 0, \tag{10}$$

这里 c 是任意常数. 我们现在这样来选取 c, 使得 $S(x) - c$ 是一个容许函数 $\zeta(x)$; 即，我们用方程

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} \zeta dx = \int_{x_0}^{x_1} \{S(x) - c\} dx = \int_{x_0}^{x_1} S(x) dx - c(x_1 - x_0)$$

1) 一个连续的非负函数的积分一定是正的，除非被积函数到处等于零；这直接可从积分的定义推出.

来确定 c. 把 c 的这一值代入方程 (10), 并且取 $\zeta = S(x) - c$, 我们马上得

$$\int_{x_0}^{x_1} \{S(x) - c\}^2 dx = 0.$$

因为被积函数根据假设是连续的, 或至少是分段连续的, 所以推得

$$S(x) - c = 0$$

是 x 的恒等式, 正如引理所说的那样.

d. 一些特殊情形的欧拉微分方程的解. 例子

为了求极小值问题的解, 我们必须求欧拉微分方程在区间 $x_0 \le x \le x_1$ 上的一个特解, 它在端点取预定的边值 y_0 与 y_1. 因为二阶的欧拉微分方程的完全积分包含两个积分常数, 所以我们期望使这两个常数适合边条件 —— 积分常数必须满足的两个方程 —— 来唯一确定一个解.

一般说来, 用初等函数或积分显式地解出欧拉微分方程是不可能的, 我们就只得满足于指明变分问题确实归结为一微分方程的问题. 另一方面, 对于一些重要的特例, 而且事实上对于大多数经典的例子, 微分方程可以用积分法解出.

第一种情形是 F 不显含导数 $y' = \phi'$, 即 $F = F(\phi, x)$. 在这里欧拉微分方程仅仅是 $F_u(u, x) = 0$; 就是说, 它完全不再是一个微分方程了, 而只构成了解 $y = u(x)$ 的隐式定义. 这里自然不存在积分常数的问题或满足边条件的可能性问题.

第二种重要的特殊情形是 F 不显含函数 $y = \phi(x)$, 即 $F = F(y', x)$. 在这里欧拉微分方程是 $\dfrac{d}{dx}(F_{u'}) = 0$, 它立刻给出

$$F_{u'} = c,$$

其中 c 是一任意的积分常数. 我们可以用这个方程把 u' 表示成 x 与 c 的函数 $f(x, c)$, 于是我们有方程

$$u' = f(x, c),$$

由此用简单的积分得到

$$u=\int_0^x f(\xi,c)d\xi+a,$$

即， u 表达成 x 和 c 连同另外一个任意的积分常数 a 的函数. 所以在这种情况下，欧拉微分方程可以用积分彻底解出.

第三种情况 —— 对一些实例和应用是最重要的 —— 是 F 不显含自变量 x, 即 $F=\dot{F}(y,y')$. 在这种情况，我们有下面的重要定理:

如果自变量 x 在变分问题中不明显地出现, 那么

$$E=F(u,u')-u'F_{u'}(u,u')=c \tag{11}$$

是欧拉微分方程的一个积分, 即如果我们把关于 F 的欧拉微分方程的一个解 $u(x)$ 代入这表达式, 那么该表达式就变成一个与 x 无关的常数.

只要我们求导数 dE/dx, 就可立刻推断这个说法的正确性. 我们有

$$\frac{dE}{dx}=F_uu'+F_{u'}u''-u''F_{u'}-u'^2F_{uu'}-u'u''F_{u'u'},$$

或由 (7c),

$$\frac{dE}{dx}=u'L[u]=0;$$

因此，对于欧拉微分方程的每一个解 u, 我们有 $E=c$, 其中 c 是常数.

如果我们把 u' 想作由方程 $E=c$ 算出的，比如说 $u'=f(u,c)$, 那么对方程

$$\frac{dx}{du}=\frac{1}{f(u,c)}$$

应用简单的积分就得到 $x=g(u,c)+a$ (这里 a 是另一积分常数); 即， x 表达成 u,c 和 a 的函数. 只要解出 u, 我们就得到函数

$u(x,c,a)$. 因此，欧拉微分方程依赖于两个任意积分常数的一般解可以用积分法得到.

现在我们将用这些方法来讨论若干个例子.

一般注解

有一类一般的例子，其中 F 的形式为

$$F = g(y)\sqrt{1+y'^2}$$

这里 $g(y)$ 只是一个明显地依赖于 y 的函数. 对于极值曲线 $y=u$，我们最后的那个法则立刻给出

$$g(u)\sqrt{1+u'^2} - \frac{g(u)u'^2}{\sqrt{1+u'^2}} = c$$

或

$$\frac{g(u)}{\sqrt{1+u'^2}} = c;$$

于是

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{\sqrt{(\{g(u)\}^2/c^2)-1}},$$

再进行积分，我们得到方程

$$x - b = \int \frac{du}{\sqrt{(\{g(u)\}^2/c^2)-1}}, \tag{12}$$

其中 b 是另一积分常数. 算出右边的积分，并且对 u 求解方程，我们得到 u 为 x 和两个积分常数 c 与 b 的函数 [1].

最小面积的旋转曲面

在这个情形，由第 884 页的 (2b)，我们有 $g=y$. 那积分 (11) 变成

$$x - b = \int \frac{du}{\sqrt{(u^2/c^2)-1}} = c \operatorname{arc\,cosh}\frac{u}{c};$$

1) 当然，我们不见得能用初等函数解出 u，但是对于所有实用的目的来说，这些步骤足以完全确定 u 了.

因此，结果是

$$y = u = c \cosh \frac{x-b}{c},$$

即，求一条曲线，使它在转动时给出一个有逗留面积的旋转曲面，这个问题的解是一条 悬链线 (见第一卷，第 424 页).

这样的逗留曲线出现的必要条件是：两个给定的点 A 和 B 可以用一条 $y > 0$ 的悬链线连接起来. 至于这悬链线是否真的表达了极小值，这个问题将不在这里讨论了.

最速降线

另一个例子是由取 $g = 1/\sqrt{y}$ 而得的. 根据第 884 页的 (2a), 这就是 最速降线 的问题. 利用替换 $1/c^2 = k^2, u = k\tau, \tau = \sin^2(\theta/2)$, 则积分 (12)

$$\int \frac{du}{\sqrt{1/(uc)^2 - 1}}$$

立即变到

$$x - b = k \int \sqrt{\frac{\tau}{1-\tau}} d\tau = \frac{k}{2} \int (1 - \cos\theta) d\theta,$$

由此

$$x - b = \frac{k}{2}(\theta - \sin\theta),$$
$$y = u = \frac{k}{2}(1 - \cos\theta).$$

最速降线从而是一条尖点在 x 轴上的普通旋轮线 (参考第一卷，第 371 页).

练　习　7.2 d

1. 对于下列的被积函数，求极值曲线：

(a) $F = \sqrt{y(1 + y'^2)}$,

(b) $F = \sqrt{1 + y'^2}/y$,

(c) $F = y\sqrt{1-y'^2}$.

2. 对于被积函数 $F = x^n y'^2$, 求极值曲线, 并且证明: 若 $n \geqq 1$, 则位于 y 轴两侧的两个点不能用一条极值曲线连接起来.

3. 对于被积函数 $y^n y'^m$ (这里 n 和 m 为偶整数), 求极值曲线.

4. 对于被积函数 $F = ay'^2 + 2byy' + cy^2$ (这里 a, b, c 是 x 的连续可微的给定函数), 求极值曲线. 试证欧拉微分方程是二阶的常微分方程. 为什么当 b 是常数时, 这个常数就完全不进入微分方程?

5. 对于被积函数 $F = e^x\sqrt{1+y'^2}$, 证明极值曲线由方程 $\sin(y-b) = e^{-(x-a)}$ 和 $y = b$ (这里 a, b 是常数) 给出. 讨论这些曲线的形状, 并且考查, 如果两点 A 和 B 可用形如 $y = f(x)$ 的极值曲线弧连接起来, 那么 A 和 B 的位置应该是怎样的?

6. 对于 F 不含导数 y' 的情形, 用初等方法推导出欧拉条件 $F_y = 0$.

7. 求一函数, 使它给出带边条件 (a) $y(0) = y(1) = 0$ 或 (b) $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ 的积分

$$I\{y\} = \int_0^1 y'^2 dx$$

的绝对极小值.

8. 求 $\int \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta$ 的极值曲线, 即在极坐标下的最短路径.

e. 欧拉表达式恒等于零的情形

在第 889 页对于 $F(x, y, y')$ 的欧拉微分方程 (7c) 可能退化为一个无意义的恒等式, 即每个容许函数 $y = \phi(x)$ 都适合的关系式. 换句话说, 对应的那个积分可能对任何容许函数 $y = \phi(x)$ 都是逗留的. 如果碰到这个退化的情形, 那么不管用什么函数 $y = \phi(x)$ 代入欧拉表达式

$$F_y - F_{xy'} - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'',$$

它在区间内的每一点 x 都必须等于零. 然而, 我们总可以找到一条曲线, 使得对于 x 的预定值, $y = \phi$, $y' = \phi'$ 与 $y'' = \phi''$ 取任意的

预定值. 所以, 对于任何四个为一组的数 x, y, y', y'', 欧拉表达式必须等于零. 我们断定 y'' 的系数 (即 $F_{y'y'}$) 必须为零. 于是 F 必定是 y' 的线性函数, 比如说, $F = ay' + b$, 这里 a 与 b 仅是 x 和 y 的函数. 如果我们把这个 F 代入微分方程的其余部分,

$$F_{yy'}y' + F_{xy'} - F_y = 0,$$

那么立即推出

$$0 = a_y y' + a_x - a_y y' - b_y$$

或

$$a_x - b_y$$

必须对 x 与 y 恒等于零. 换句说话, 欧拉表达式恒等于零当且仅当积分的形式为

$$I = \int \{a(x, y)y' + b(x, y)\}dx = \int ady + bdx,$$

其中 a 与 b 满足我们在第 113 页已经碰到过的可积性条件, 即这里的 $ady + bdx$ 是一个全微分.

7.3 推 广

a. 具有多于一个自变函数的积分

求积分的极值 (逗留值) 的问题可以推广到这个积分不是依赖于一个自变函数而是依赖于若干个这种函数 $\phi_1(x), \phi_2(x), \cdots, \phi_n(x)$ 的情形.

这种类型的标准问题可以叙述如下:

令 $F(x, \phi_1, \cdots, \phi_n, \phi_1', \cdots, \phi_n')$ 是 $(2n+1)$ 个变元 $x, \phi_1, \cdots, \phi_n'$ 的函数, 它是连续的, 并且在所考虑的区域内有直到二阶的连续导数. 如果我们用具有连续的一阶和二阶导数的 x 的函数代替 $y_i =$

ϕ_i, 而用其导数代替 ϕ_i', 那么 F 变为 x 的单元函数, 并且在区间 $x_0 \leq x \leq x_1$ 上的积分

$$I\{\phi_1, \cdots, \phi_n\} = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \phi_1, \cdots, \phi_n, \phi_n', \cdots, \phi_n') dx \tag{13}$$

由这些函数的选取而有一个确定值.

与极值相对照, 我们把那些满足上述连续性条件以及它们的边值 $\phi_i(x_0)$ 和 $\phi_i(x_1)$ 取预定值的所有函数组 $\phi_i(x)$ 看作是容许的. 换句话说, 我们在以 $y_1, y_2, \cdots, y_n$, x 为坐标的 $(n+1)$ 维空间中考虑那些连接两点 A 和 B 的曲线 $y_i = \phi_i(x)$. 现在, 变分问题要求我们在所有这些函数组 $\phi_i(x)$ 中寻找一组

$$[y_i = \phi_i(x) = u_i(x)],$$

使得积分 (13) 取得极值 (极大值或极小值).

我们又将不讨论极值的真实性质, 而只限于探究对于什么自变函数组 $\phi_i(x) = u_i(x)$, 积分是逗留的.

我们完全用第 888 页所用的同样方法来定义逗留值的概念. 我们按照下面的方法把函数组 $u_i(x)$ 嵌入到依赖于参数 ε 的函数组的单参数族: 令 $\eta_1(x), \cdots, \eta_n(x)$ 是 n 个任意选取的函数, 它们在 $x = x_0$ 和 $x = x_1$ 的值等于零, 而在区间上连续, 且有连续的一阶和二阶导数. 我们把 $u_i(x)$ 嵌入到函数族

$$y_i = \phi_i(x) = u_i(x) + \varepsilon\eta_i(x)$$

之中.

项 $\varepsilon\eta_i(x) = \delta u_i$ 叫作函数 u_i 的 **变分**. 如果我们把 ϕ_i 的表达式代入 $I\{\phi_1, \cdots, \phi_n\}$, 那么这个积分就变为参数 ε 的函数

$$G(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, u_1 + \varepsilon\eta_1, \cdots, u_n + \varepsilon\eta_n, u_1' + \varepsilon\eta_1', \cdots, u_n' + \varepsilon\eta_n') dx.$$

当 $\phi_i = u_i$ (即, 当 $\varepsilon = 0$) 时可能存在极值的必要条件是

$$G'(0) = 0.$$

正如一个自变函数的情形一样，如果不管怎样选取具有上述附加条件的函数组 η_i 都有 $G'(0)=0$ 成立，或

$$\delta I = \varepsilon G'(0) = 0$$

成立，那么我们说积分 I 对于 $\phi_i = u_i$ 有逗留值. 换句话说，积分对于一固定函数组 $u_i(x)$ 的逗留性质跟第一变分 δI 等于零意味着一回事.

问题仍旧是对于积分的逗留性质确立起不包含任意变分组 η_i 的条件. 这不需要新的概念. 我们着手进行如下：首先我们取 $\eta_2, \eta_3, \cdots, \eta_n$ 恒为零 (即，我们不让函数 $u_2, \cdots, u_n$ 变动). 于是我们只考虑第一个函数 $\phi_1(x)$ 作为变元，从而由第 890 页，条件 $G'(0)=0$ 等价于欧拉微分方程

$$F_{u_1} - \frac{d}{dx} F_{u_1'} = 0.$$

因为我们可同样挑选函数组 $u_i(x)$ 中的任何一个，所以我们得到下面的结果：

积分(13)为逗留的充要条件是这 n 个函数 $u_i(x)$ 满足欧拉方程组

$$F_{u_i} - \frac{d}{dx} F_{u_i'} = 0 \quad (i = 1, \cdots, n). \tag{13a}$$

这是对于 n 个函数 $u_i(x)$ 的二阶的 n 个微分方程的系统. 这个微分方程组的所有的解都叫作变分问题的 极值曲线. 因而，寻找积分的逗留值问题归结为求解这些微分方程并从其通解中选出满足边条件的解的问题 [1].

1) 利用引理 II (第 892 页，第 7.2 节)，我们可以在一般的假设 —— 容许函数只有分段连续的一阶导数 —— 下，证明这些微分方程必定成立. 然而，如果我们要想集中注意在主题的建立上，那么在函数组 $\phi_i(x)$ 的可容性条件中包括二阶导数的连续性是更为方便的. 这样，我们就能把表达式 $d/dx\ F_{u_i'}$ 写成形式

$$\sum_{k=1}^{n} F u_k' u_i' u_k'' + \sum_{k=1}^{n} F u_k u_i' u_k' + F x u_i'. \tag{13b}$$

b. 例子

给出欧拉微分方程组通解的可能性甚至比第 7.2 节的情形更为渺茫了. 仅仅在很特殊的情形我们能够明确地找到所有的极值曲线. 这里与第 895 页公式 (11) 的特殊情形类似, 下面的定理是经常用到的:

如果函数 F **不显含自变量** x, 即

$$F = F(\phi_1, \cdots, \phi_n, \phi_1', \cdots, \phi_n'),$$

那么表达式 $E = F(u_1, \cdots, u_n, u_1', \cdots, u_n') - \sum_{i=1}^{n} u_i' F_{u_i'}$ **是欧拉微分方程组的一个积分**. 即, 如果我们考虑欧拉方程 (13a) 的任一组解 $u_i(x)$, 我们就有

$$E = F - \Sigma u_i' F_{u_i'} = 常数 c, \tag{13c}$$

在这里, 这个常数值当然依赖于所代入的那一组解.

证明可仿照第 895 页的相同格式; 我们对表达式的左边关于 x 进行微分, 并且利用 (13b), 就可验证所得的结果等于零.

一个通俗的例子是在三维空间中求两点之间最短距离的问题. 这里我们需要确定两个函数 $y = y(x)$, $z = z(x)$, 使得积分

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx$$

有最小的可能值, 而 $y(x)$ 和 $z(x)$ 在区间端点的值是预定的. 欧拉微分方程 (13a) 给出

$$\frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = \frac{d}{dx} \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0,$$

由此立即推出导数 $y'(x)$ 和 $z'(x)$ 是常数; 因此, 极值曲线必定是直线.

在三维空间的最速降线问题就有点不简单了. (重力的作用方向又取作沿正 y 轴的方向.) 这里我们需要这样确定 $y = y(x)$,

$z=z(x)$, 使得积分

$$\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{\frac{1+y'^2+z'^2}{y}}dx=\int_{x_0}^{x_1}F(y,y',z')dx$$

是逗留的. 在欧拉微分方程组中有一个方程给出

$$\frac{z'}{\sqrt{y}}\frac{1}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=a.$$

另外，我们由 (13c) 得

$$F-y'F_{y'}-z'F_{z'}=\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{1}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=b,$$

其中 a 与 b 是常数. 相除后，即得 $z'=a/b=k$ 同样是常数. 所以使积分为逗留的曲线必定在平面 $z=kx+h$ 内. 从另一方程

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+k^2+y'^2}}=b$$

如第 869 页那样显然，可以推出这曲线必定又是旋轮线.

练 习 7.3 b

1. 假设在三维空间中 (采用球坐标 r,θ,ϕ) 光速是 r 的函数 (参考第 889 页第 2 题), 写出光线的轨线微分方程. 证明光线是平面曲线.

2. 证明在球面上的测地线 (连接两点的长度为最短的曲线) 是大圆.

3. 在直立圆锥面上求测地线.

4. 证明在两个不相交的光滑闭曲线之间距离为极小的路径是它们的公共法线.

5. 证明从一给定点到一给定曲线降落时间为最少的轨线是一条与该曲线正交的旋轮线.

6. $\int F(x,y)\sqrt{1+y'^2}dx$ 的端点在两条曲线上自由移动的极值曲线跟那两条曲线正交.

c. 哈密顿原理. 拉格朗日方程

欧拉微分方程组跟许多应用数学的分支, 尤其是动力学, 有很重要的联系. 特别, 由有限个质点组成的力学系统的运动可以用某一表达式 —— 叫作哈密顿积分 —— 的逗留条件表达出来. 这里我们将简要地说明这种关系.

一个力学系统如果它的位置可由 n 个独立的坐标 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 确定的话, 则它有 n 阶的自由度. 例如, 设系统由一个质点组成, 则我们有 $n=3$, 这是因为我们可以取 q_1, q_2, q_3 为三个直角坐标或三个球坐标. 又设系统由两个质点用刚性 —— 假设没有质量 —— 连结起来且保持单位的距离, 则 $n=5$, 这是因为对坐标 q_i, 我们可以取其中一个质点的三个直角坐标和决定这两个质点联线方向的另两个坐标.

用两个函数 —— 动能和势能 —— 足以一般地描述一动力系统. 如果系统在运动, 那么坐标 q_i 将是 t 的函数 $q_i(t)$, 而速度的分量 $\dot{q}_i = dq_i/dt$. 相应于动力系统的动能是如下形式的函数

$$T(q_1, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_n) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k \quad (a_{ik} = a_{ki}) \tag{14a}$$

所以动能是速度分量的齐次二次式, 系数 a_{ik} 为只依赖坐标 $q_1, \cdots, q_n$ 本身而不显含 t 的函数 [1].

假设动力系统由动能和另一个只依赖于位置坐标 q_i 而不依赖速度或时间 [2] 的势能函数 $v(q_1, \cdots, q_n)$ 来描述.

---

1) 为了得到动能 T 的这个表达式, 我们想象系统的质点, 其各自的直角坐标表成为坐标 $q_1, \cdots, q_n$ 的函数, 则各个质点速度的直角分量可以表成 $\dot{q}_i$ 的线性齐次函数; 因此, 我们再作动能的初等表达式, 即各自的质量与相应速度平方的乘积之和的一半.

2) 我们在这里限于讨论作用力与时间无关且是保守的力学系统. 如在力学教科书中所证明的那样, 势能确定了作用于系统的外力. 系统在一个位置转移到另一个位置时, 作了机械功; 这个功等于相应的 U 值之间的差, 而不依赖于从这个位置到另一位置的特殊的运动.

哈密顿原理是：一动力系统在时间区间 $t_0 \le t \le t_1$ 内从一个给定的初始位置到一个给定的最后位置的运动是这样的运动，它使积分

$$H\{q_1, \cdots, q_n\} = \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt \tag{14b}$$

在所有二阶连续可微且对 $t = t_0$ 和 $t = t_1$ 取预定的边值的函数类中是逗留的.

这个哈密顿原理是动力学的基本原理，它以简练的形式包含了动力学的一些定律. 当应用哈密顿原理时，欧拉方程 (13a) 给出拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{14c}$$

它们是理论动力学的基本方程组.

这里我们将只作一个值得注意的推导，即能量守恒律.

因为哈密顿积分的被积函数不明显地依赖于自变量 t，所以对于动力微分方程的解 $q_i(t)$，表达式

$$T - U - \sum \dot{q}_i \frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{q}_i}$$

必定是常数 [见 (13c)]. 由于 U 不依赖于 $\dot{q}_i$，且 T 是 $\dot{q}_i$ 的齐次二次函数 (见第二卷第 129 页)，所以

$$\sum \dot{q}_i \frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{q}_i} = \sum \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T.$$

因此

$$T + U = \text{常数};$$

即，在运动过程中动能与势能之和不随时间变化.

d. 含高阶导数的积分

类似的方法可以用来解决下面的积分极值问题: 在被积函数 F 中不仅包含所求的函数 $y=\phi$ 和它的导数, 而且还包含高阶导数. 例如, 假设我们欲求形式为

$$I\{\phi\}=\int_{x_0}^{x_1} F(x,\phi,\phi',\phi'')dx \tag{15a}$$

的积分极值, 这里的极值相对于那些可容许的函数 $y=\phi(x)$ 而言, 即 $\phi(x)$ 连同其一阶导数在区间的端点取预定的值, 而且 $\phi(x)$ 有直到四阶的连续导数.

为了找到极值的必要条件, 我们又假设 $y=u(x)$ 是所求的函数. 我们把 $u(x)$ 嵌入到一函数族 $y=\phi(x)=u(x)+\varepsilon\eta(x)$, 其中 ε 为一任意参数和 $\eta(x)$ 为一任意选取的四阶连续可微的函数, 并且 $\eta(x)$ 连同 $\eta'(x)$ 在端点都等于零. 从而, 积分变成形式 $G(\varepsilon)$, 而且对于一切选取的函数 $\eta(x)$, 必要条件

$$G'(0)=0 \tag{15b}$$

必须成立. 仿照与第 890 页相同的方法, 我们在积分号下求微商, 因而得到上述条件的形式为

$$\int_{x_0}^{x_1}(\eta F_u+\eta' F_{u'}+\eta'' F_{u''})dx=0, \tag{15c}$$

只要用 u 代替 $\phi(x)$. 分部积分一次, 我们就把含 $\eta'(x)$ 的项化成一个含 η 的项, 而分部积分二次, 我们又把含 $\eta''(x)$ 的项化成一个含 η 的项, 再把边条件考虑在内, 我们容易得到

$$\int_{x_0}^{x_1}\eta\Big(F_u-\frac{d}{dx}F_{u'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{u''})dx=0. \tag{15d}$$

因此, 极值的必要条件 (即, 积分为逗留的条件) 是欧拉微分方程

$$L[u]=F_u-\frac{d}{dx}F_{u'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{u''}=0 \tag{15e}$$

读者可自己验证，这是一个四阶的微分方程 [1).

e. 多自变量

求极值必要条件的一般方法可照样应用于积分不再是单重积分而是多重积分的情形. 令 D 为 x, y 平面上由曲线 Γ 围成的已知区域. 我们假设 D 和 Γ 是足够规则的，使得允许应用分部积分公式 (第 696 页). 令 $F(x, y, \phi, \phi_x, \phi_y)$ 是它的五个变元的二次连续可微的函数. 设在 F 中我们用一个函数 $\phi(x, y)$ 替代 ϕ, 而 $\phi(x, y)$ 在 Γ 上取预定的边值和在 D 内有直到二阶的连续导数，又设用 ϕ 的偏导数替代 ϕ_x 和 ϕ_y, 那么 F 变成 x 和 y 的一个函数，而且积分

$$I\{\phi\} = \iint_D F(x, y, \phi, \phi_x, \phi_y) dx dy \tag{16a}$$

有一个与 ϕ 的选取有关的值. 问题在于寻求一个函数 $\phi = u(x, y)$, 使得这个值是一极值.

为了找到必要条件，我们又采用老方法. 选取一个在边界 Γ 上等于零的函数 $\eta(x, y)$; 它有直到二阶的连续导数; 而除此以外，它是任意的. 我们假设 u 是所求的函数，而 ε 是任意参数，然后把 $\phi = u + \varepsilon\eta$ 代入积分. 这积分又变为 ε 的函数 $G(\varepsilon)$, 而且极值的必要条件是

$$G'(0) = 0.$$

象以前一样，这个条件取下面的形式

$$\iint_D (\eta F_u + \eta_x F_{u_x} + \eta_y F_{u_y}) dx dy = 0. \tag{16b}$$

为了消除在积分号下的 η_x 和 η_y 的项，我们把其中一项对 x 进行分部积分，而把另一项对 y 进行分部积分. 因为 η 在 Γ 上等于零，所以在 Γ 上的边值不出现了，而我们有

$$\iint \eta \left[F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y}\right] dx dy = 0. \tag{16c}$$

---

1) 从 (15d) 推导 (15e) 时，我们须要在引理 1 (第 890 页) 中限制函数 η 属于 C^4 类，而且 η 和 η' 在端点等于零. 从第 892 页引理的证明中明显可见，这个结论在这些比较局限的条件下也成立.

引理 I (第 890 页) 可以立刻推广到高维情形, 而且我们立即得到二阶的欧拉偏微分方程

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x}F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y}F_{u_y} = 0. \tag{16d}$$

例子

1. $F = \phi_x^2 + \phi_y^2$. 如果我们略去因子 2, 那么欧拉微分方程变成

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

即, 从一变分问题得到了拉普拉斯方程.

2. 极小曲面. 柏拉梯奥问题是这样的: 在一个区域 D 上, 求一曲面 $z = f(x, y)$, 它通过一预定的其投影为 Γ 的空间曲线, 并且它的面积

$$\iint_D \sqrt{1 + \phi_x^2 + \phi_y^2}dxdy$$

为极小.

这里的欧拉微分方程是

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{u_y}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} = 0,$$

或, 以展开的形式,

$$u_{xx}(1 + u_y^2) - 2u_{xy}u_xu_y + u_{yy}(1 + u_x^2) = 0.$$

这是著名的极小曲面的微分方程, 我们已在别处对它进行了广泛的研究 [1].

7.4 含附带条件的问题. 拉格朗日乘子

在第 3 章 (第 365 页) 对多元函数通常的极值讨论中, 我们考虑了对那些变元加某些附带条件的情形. 在这种情形, 不定乘子法

1) R. Courant, Dirichlet's Principle, Conformal Mapping and Minimal Surfaces, Interscience: New York, 1950.

对函数可能有逗留值的条件导出了一个特别清楚的表达式. 类似的方法在变分学中甚至更为重要. 在这里我们将仅仅简要地讨论一些最简单的情形.

a. 通常的附带条件

一个典型的例子是: 在三维空间中, 求一条表成参数 t 的曲线 $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ $(t_0 \le t \le t_1)$, 它服从附带条件 —— 曲线位于给定的曲面 $G(x, y, z) = 0$ 上, 并且通过该曲面上两个给定的点 A 和 B. 于是, 问题是从那些服从附带条件 $G(x, y, z) = 0$ 和通常的边界条件以及连续性条件的函数组 $x(t), y(t), z(t)$ 中进行适当的选取, 使得形式为

$$\int_{t_0}^{t_1} F(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) dt \tag{17}$$

的积分是逗留的. 这个问题可直接归结为在第 900 页已讨论过的情形. 我们假设 $x(t), y(t), z(t)$ 为所求的函数. 再设所求曲线所在的那部分曲面可以表示成形式 $z = g(x, y)$; 只要 G_z 在曲面的这部分上异于零, 这一点确是可能的. 如果我们假设在所讨论的曲面上三个方程 $G_x = 0$, $G_y = 0$, $G_z = 0$ 不同时成立, 并且如果我们限于考虑曲面的充分小的一块, 那么我们可以不失一般性设 $G_z \neq 0$. 把 $z = g(x, y)$ 和 $\dot{z} = g_x \dot{x} + g_y \dot{y}$ 代入积分内, 我们得到一个以 $x(t)$ 和 $y(t)$ 为彼此独立函数的问题. 从而, 我们可以直接应用第 903 页的结论, 而且对被积函数

$$F(x, y, g(x, y), \dot{x}, \dot{y}, \dot{x} g_x + \dot{y} g_y) = H(x, y, \dot{x}, \dot{y})$$

应用方程 (13a), 写出积分 I 可能是逗留的条件. 我们因而有两个方程

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} H_{\dot{x}} - H_x &= \frac{d}{dt} F_{\dot{x}} - F_x + \frac{d}{dt}(F_{\dot{z}} g_x) - F_z g_x - F_{\dot{z}} \frac{\partial \dot{z}}{\partial x} = 0, \\
\frac{d}{dt} H_{\dot{y}} - H_y &= \frac{d}{dt} F_{\dot{y}} - F_y + \frac{d}{dt}(F_{\dot{z}} g_y) - F_z g_y - F_{\dot{z}} \frac{\partial \dot{z}}{\partial y} = 0.
\end{aligned}$$

但是，我们在微分时立刻看出

$$\frac{d}{dt}g_x = \frac{\partial \dot{z}}{\partial x}, \quad \frac{d}{dt}g_y = \frac{\partial \dot{z}}{\partial y}.$$

因此

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}F_{\dot{x}} - F_x + g_x\left(\frac{d}{dt}F_{\dot{z}} - F_z\right) = 0, \\
&\frac{d}{dt}F_{\dot{y}} - F_y + g_y\left(\frac{d}{dt}F_{\dot{z}} - F_z\right) = 0.
\end{aligned}$$

为了简单起见，如果我们以一适当的乘子 $\lambda(t)$ 写出

$$\frac{d}{dt}F_{\dot{z}} - F_z = \lambda G_z, \tag{18a}$$

并且利用关系式 (第 248 页) $g_x = -G_x/G_z$, $g_y = -G_y/G_z$, 那么我们得到另外两个方程

$$\frac{d}{dt}F_{\dot{x}} - F_x = \lambda G_x, \tag{18b}$$

$$\frac{d}{dt}F_{\dot{y}} - F_y = \lambda G_y. \tag{18c}$$

于是我们有以下的积分可能为逗留的条件: 如果我们设 G_x, G_y, G_z 在曲面 $G = 0$ 上不同时为零，那么极值的必要条件是存在一个乘子 $\lambda(t)$, 使得三个方程 (18a, b, c) 在附带条件 $G(x, y, z) = 0$ 下同时得到满足；即，我们有决定函数 $x(t), y(t), z(t)$ 和乘子 $\lambda(t)$ 的四个对称的方程.

最重要的特例是在给定的曲面 $G = 0$ 上 (设 G 的梯度不为零) 求连接两点 A 和 B 的最短曲线的问题，这里有

$$F = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2},$$

而欧拉微分方程为

$$\frac{d}{dt}\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = \lambda G_x,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}=\lambda G_y,$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}=\lambda G_z.$$

这些方程关于新参数 t 的引进是不变的. 即, 读者可自己容易验证, 如果 t 换成任何别的参数 $\tau=\tau(t)$, 只要这个变换是一一的、可逆的和连续可微的, 那么这些方程保持相同的形式. 如果我们取弧长为新的参数, 因此 $\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=1$, 我们的微分方程有形式

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\lambda G_x,\quad \frac{d^2y}{ds^2}=\lambda G_y,\quad \frac{d^2z}{ds^2}=\lambda G_z. \tag{19}$$

这些微分方程的几何意义是, 我们问题的极值曲线的主法向量[1] 正交于曲面 $G=0$. 我们称这些曲线为曲面的**测地线**. 因而, 在曲面上两点之间的最短距离必定由一测地线弧给出.

练 习 7.4 a

1. 证明一个不受外力的、约束在一给定的曲面 $G=0$ 上运动的质点的轨线也同样是测地线. 在这个情形中, 势能 U 等于零, 并且读者可应用哈密尔顿原理 (第 904 页).

2. 令 C 为一给定曲面 $G(x,y,z)=0$ 上的曲线. 在 C 的每一点上取一段定长的而且相对于 C 是定向的垂直测地线. 测地线的自由端画出一条曲线 C'. 证明 C' 也垂直于那些测地线段.

b. 其他类型的附带条件

在上面讨论的问题中, 我们能够消去附带条件, 是由于解出了确定附带条件的方程, 从而把问题直接归结为以前讨论过的类型. 然而, 对于经常出现的其他种类的附带条件是不可能做到这一点的. 这种类型的最重要的情形是**等周的**附带条件. 下面是一个典

1) 即, 向量 $(\ddot{x},\ddot{y},\ddot{z})$; 见第 230 页.

型的例子：在前面的边条件和连续性条件下，要使积分

$$I\{\phi\} = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \phi, \phi')dx \tag{20a}$$

是逗留的，这里的自变函数服从另外的附带条件

$$H\{\phi\} = \int_{x_0}^{x_1} G(x, \phi, \phi')dx = \text{给定的常数 } c. \tag{20b}$$

特别， $F = \phi, G = \sqrt{1 + \phi'^2}$ 是经典的等周问题.

这类问题不能只靠我们以前用一个在边界上等于零的任意函数来构造“变动的”函数 $\phi = u + \varepsilon\eta$ 的方法予以解决，因为一般而言，这些函数 (除去 $\varepsilon = 0$) 在 $\varepsilon = 0$ 的邻域内不满足附带条件. 然而，用一个类似在问题中最早所用的那种方法，不是引进一个函数和一个参数，而是两个在边界上等于零的函数 $\eta_1(x)$ 和 $\eta_2(x)$，以及两个参数 ε_1 和 ε_2，我们可以得到所需的结果. 假设 $\phi = u$ 为所求的函数，我们因此构造变动的函数

$$\phi = u + \varepsilon_1\eta_1 + \varepsilon_2\eta_2.$$

如果我们把这个函数代入那两个积分，我们就把问题归结为：在附带条件

$$\begin{aligned} H &= \int_{x_0}^{x_1} G(x, u + \varepsilon_1\eta_1 + \varepsilon_2\eta_2, u' + \varepsilon_1\eta_1' + \varepsilon_2\eta_2')dx \\ &= M(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = c \end{aligned}$$

下，推导积分

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, u + \varepsilon_1\eta_1 + \varepsilon_2\eta_2, \mu' + \varepsilon_1\eta_1' + \varepsilon_2\eta_2')dx = K(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

的逗留性的必要条件；即，函数 $K(\varepsilon_1\varepsilon_2)$ 对 $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 0$ 是逗留的，这里 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 满足附带条件

$$M(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = c.$$

根据以前有附带条件的通常极值的结果，以及在第 889 页给出的类似的其他原由，作一简单的讨论就可导出这一结果：

积分的逗留性质等价于存在一个常数乘子 λ，使得方程 $H=c$ 和欧拉微分方程

$$\frac{d}{dx}(F_{u'}+\lambda G_{u'})-(F_u+\lambda G_u)=0$$

成立．这结论的一个例外情形只可能出现在函数 u 满足方程

$$\frac{d}{dx}G_{u'}-G_u=0$$

时．

证明的细节留给读者，可参考这个课题的有关文献[1]．

练　习　7.4 b

1．证明圆柱面上的测地线是螺旋线．

2．求下列例子的欧拉方程：

(a) $F=\sqrt{1+y'^2}+yg(x)$,

(b) $F=y''^2/(1+y'^2)^3+yg(x)$,

(c) $F=y''^2-y'^2+y^2$,

(d) $F=\sqrt[4]{1+y'^2}$.

3．设有两个自变量，求以下例子的欧拉方程：

(a) $F=a\phi_x^2+2b\phi_x\phi_y+c\phi_y^2+\phi^2 d$,

(b) $F=\left(\phi_{xx}+\phi_{yy}\right)^2=(\Delta\phi)^2$,

(c) $F=(\Delta\phi)^2+\left(\phi_{xx}\phi_{yy}-\phi_{xy}^2\right)$.

---

1) 例如，见 M.R. Hestenes, Calculus of Variations and Optimal Control Theory. John Wiley and Sons, New York, 1966. R. Courant and D. Hilbert: Methods of Mathematical Physics, Interscience Publishers, New York, 1953, Vol. 1, Chapter IV.

4. 求下面等周问题的欧拉方程：在条件

$$\int_{x_0}^{x_1} u^2 dx = 1$$

下，积分

$$\int_{x_0}^{x_1} (au'^2 + 2buu' + cu^2) dx$$

是逗留的.

5. 令 $f(x)$ 为一给定的函数. 在积分条件

$$H(\phi) = \int_0^1 \phi^2 dx = K^2 \quad (\text{这里 } K \text{ 是给定的常数})$$

下，要使积分

$$I(\phi) = \int_0^1 f(x)\phi(x) dx$$

是极大的. (a) 从欧拉方程求解 $u(x)$. (b) 应用柯西不等式证明在 (a) 中找到的解给出 I 的绝对极大值.

6. 利用拉格朗日乘子法，证明经典等周问题的解是一个圆.

7. 一根密度均匀和给定长度的细线吊在两点 A 和 B 之间. 如果重力作用于负 y 轴的方向， 细线的平衡位置是使重心有最低的可能位置. 于是这是一个使形式为 $\int_{x_0}^{x_1 y} \sqrt{1+y'^2} dx$ 的积分在

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2} dx$$

等于给定的常数值的这种附带条件下的极小值问题. 证明细线将挂成一条悬链线.

8. 设 $y = u(x)$ 在所有具有预定边值 $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ 的连续可微函数族 $y(x)$ 中使积分 $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$ 产生最小的值. 证明 $u(x)$, 对于区间 $x_0 \leq x \leq x_1$ 内的所有 x, 满足不等式

$$F_{y'y'}(x, u(x), u'(x)) \geq 0 \quad (\text{勒让德条件})$$

9. 令 (x_0, y_0) 和 (x_1, y_1) 是位于 x 轴上方的两点. 求通过这两点的函数的图形下面积的极值曲线, 附加的条件为两点之间的轨线有固定的长度.

第八章　单复变函数

在第一卷 7.7 节中，我们已经提到单复变函数论，并且看到，这个理论有助于弄清楚一个实变数的函数的结构. 这一章，我们将就这个理论的基本原理给出一个简要的、更加系统的叙述.

8.1　幂级数表示的复函数

a. 极限. 复数项的无穷级数

我们从虚数单位 i 与任何两个实数 x, y 形成的复数 $z = x + iy$ 的基本概念开始 (见第一卷第 114 页). 我们对复数的运算如同对实数的运算一样，只要附加法则：i^2 总可以用 -1 来代替. 我们用 x, y 平面上或复平面 z 上的直角坐标表示 z 的 **实部** x 和 **虚部** y. 复数 $\bar{z} = x - iy$ 称为 z 的 **共轭复数**. 我们由关系式 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ 引进极坐标 (r, θ), 并且称 θ 为复数的 **辐角**, 与

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}} = |z|$$

为它的 **绝对值**(或 **模**). 我们有

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|.$$

我们能够直接建立复数 z_1, z_2 和 $z_1 + z_2$ 满足的所谓"**三角不等式**"

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

如果设 $z_1 = u_1 - u_2$, $z_2 = u_2$, 我们立即得到另一个不等式

$$|u_1| - |u_2| \le |u_1 - u_2|.$$

如果用 x, y 平面上分量为 x_1, y_1 和 x_2, y_2 的向量分别表示复数 z_1, z_2, 三角不等式可以得到几何上的解释：表示和数 $z_1 + z_2$ 的向量正是由前面两个向量相加而得到，由这个加法所得到的三角形的边长是 $|z_1|, |z_2|, |z_1 + z_2|$(见图 8.1). 于是，三角不等式表示三角形的任意一边小于另外两边的和.

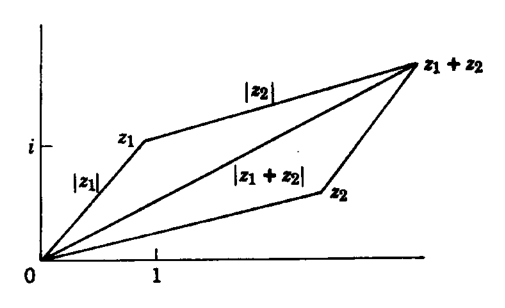


图 8.1　复数的三角不等式

现在我们考虑**复数序列的极限**概念，这个概念本质上是新的. 我们叙述下面的定义：复数序列 z_n 趋于极限 z, 如果 $|z_n - z|$ 趋于零. 当然这就意味着 $z_n - z$ 的实部和虚部都趋于零. 从柯西准则推出，序列 z_n 的极限 z 存在的充分必要条件是

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} |z_n - z_m| = 0.$$

一类特别重要的极限是由**复数项无穷级数**所引出的极限. 我们说复数项无穷级数

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu$$

是收敛的，并且有和 S, 如果部分和序列

$$S_n = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu$$

趋于极限 S. 如果实的非负项级数

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}|c_\nu|$$

收敛，如同在第一卷第七章所知，推出原来的复数项级数也收敛. 这种级数我们就说它是 绝对收敛的.

如果级数的项 c_ν 不是常数，而是依赖于区域 R 内变化的点的坐标 (x, y), 那么 一致收敛 的概念就有意义. 我们说这个级数在区域 R 内是一致收敛的，如果对于任意给定的正数 ε, 能够找到仅仅依赖于 ε 的固定的 N, 使得对于每个 $n \geq N$ 和区域 R 内的一切点 $z = x + iy$, 关系式 $|S_n - S| < \varepsilon$ 成立. 当然，对于依赖于 R 的点的复函数序列 $S_n(z)$, 一致收敛 完全一样定义. 所有这些关系、定义以及有关证明完全和我们已经熟知的实变数函数的理论相对应.

收敛级数的最简单例子是几何级数

$$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots.$$

和实变数的情形一样，这个级数的部分和是

$$S_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

并且，当 $|z| < 1$ 时，有

$$1 + z + z^2 + \cdots = \frac{1}{1 - z}. \tag{1}$$

我们看到，这个几何级数当 $|z| < 1$ 时绝对收敛，而当 $|z| \leq q$ 一致收敛，这里 q 是任意介于 0, 1 之间的固定正数. 换句话说， 几何级数对于单位圆内的一切 z 的值绝对收敛, 在每个与单位圆同心、 半径小于1的闭圆上一致收敛.

对于收敛性的研究，比较判别法仍然是适用的：如果 $|c_\nu| \leqq p_\nu$, p_ν 是实的、非负的，且无穷级数

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu$$

收敛，那么复级数 $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu$ 绝对收敛.

如果 p_ν 是常数，而 c_ν 依赖于在 R 内变化的点 z, 那么 Σc_ν 在 R 内一致收敛，其证明和实变数的相应证明完全一样 (见第一卷第七章第 600 页), 这里不必重复.

由第一卷中所知，如果 M 是任意一个正常数， q 是介于 0,1 之间的正数，那么以 $p_\nu = Mq^\nu$ 或 $M\nu q^{\nu-1}$ 或 $\frac{M}{\nu+1}q^{\nu+1}$ 为正项的无穷级数也收敛. 我们将直接利用这些级数来作比较.

b. 幂级数

最重要的复数项级数是幂级数： $c_\nu = a_\nu z^\nu$, 即幂级数可以表示为以下形式

$$P(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

或者稍为更一般的形式

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu,$$

其中 z_0 是一个固定点. 但是由于这种形式总可以通过替换 $z' = z - z_0$ 归结为前一种形式，所以我们只需考虑 $z_0 = 0$ 的情形.

有关幂级数的主要定理可以逐句照搬第一卷第七章 (第 605 页) 中有关实的幂级数的相应定理：

如果幂级数当 $z = \xi$ 时收敛，那么对于使得 $|z| < |\xi|$ 的每个 z 的值，级数绝对收敛，而且，如果 q 是小于1的正数，级数在圆 $|z| \leqq q|\xi|$ 上一致收敛.

我们能够立即继续讲下面进一步的定理：

两个级数

$$D(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu a_\nu z^{\nu+1},$$

$$I(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu+1} z^{\nu+1}$$

也绝对收敛, 并且对于 $|z| \leqq q|\xi|$ 一致收敛.

证明和以前完全一样. 由于级数 $P(z)$ 当 $z = \xi$ 时收敛, 因此第 n 项 $a_n\xi^n$ 当 n 增大时趋于零, 所以存在正常数 M, 使得对一切 n, 不等式 $|a_n\xi^n| < M$ 成立. 现在, 如果 $|z| = q|\xi|, 0 < q < 1$, 我们有

$$|a_n z^n| < Mq^n, \quad |na_n z^{n-1}| < \frac{M}{|\xi|} nq^{n-1},$$

$$\left|\frac{a_n}{n+1} z^{n+1}\right| < \frac{M|\xi|}{n+1} q^{n+1}.$$

于是我们得到已知的比较级数 (第 918 页), 所以级数收敛, 定理证毕.

在幂级数的情形, 有两种可能性: 或者它对一切 z 的值收敛, 或者有值 $z = \eta$ 使级数发散. 由上面的定理, 对于 $|z| > |\eta|$ 的一切 z, 级数一定发散 (见第一卷第 605 页), 并且如同实的幂级数一样, 有收敛半径 ρ, 使得当 $|z| < \rho$ 时级数收敛, 当 $|z| > \rho$ 时级数发散. 将此应用到 $D(z)$ 和 $I(z)$ 上, 它们的 ρ 和原来的幂级数相同. 圆 $|z| = \rho$ 称为幂级数的收敛圆. 对于收敛圆的圆周本身, 即对于 $|z| = \rho$ 上的点, 不能作出有关级数的收敛和发散的一般命题.

c. 幂级数的微分法和积分法

一个收敛的幂级数

$$P(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

在它的收敛圆内确定一个复变数 z 的函数. 在这个区域内, 它是多项式

$$P_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$$

当 n 趋于无穷时的极限.

和实变数的情形一样，一个多项式 $f(z)$ 可以对自变数 z 求微分. 首先，我们注意到代数恒等式

$$\frac{z_1^n - z^n}{z_1 - z} = z_1^{n-1} + z_1^{n-2}z + \cdots + z^{n-1}$$

成立. 如果现在我们让 z_1 趋于 z[1], 我们立即有

$$\frac{d}{dz}z^n = \lim_{z_1 \to z} \frac{z_1^n - z^n}{z_1 - z} = nz^{n-1}.$$

同样，我们立即有

$$P_n'(z) = \frac{d}{dz}P_n(z) = \lim_{z_1 \to z} \frac{P_n(z_1) - P_n(z)}{z_1 - z}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \nu a_\nu z^{\nu-1} = D_n(z).$$

自然，我们称表达式 $P_n'(z)$ 为复多项式 $P_n(z)$ 的 **微商**.

现在我们有下面的定理，它在幂级数理论中是基本的:

一个收敛的幂级数

$$P(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \tag{2a}$$

可以在它的收敛圆内部逐项微商，即极限

$$P'(z) = \lim_{z_1 \to z} \frac{P(z_1) - P(z)}{z_1 - z} \tag{2b}$$

存在，并且

$$P'(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu a_\nu z^{\nu-1} = \lim_{n \to \infty} P_n'(z) = \lim_{n \to \infty} D_n(z) = D(z). \tag{2c}$$

---

1) 一个 **连续** 复变数 $(z_1 \to z)$ 的极限概念可以和实变数的情形完全一样引进.

从这个定理显然有，幂级数

$$I(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu+1} z^{\nu+1}$$

可以作为第一个幂级数的**不定积分**，即 $I'(z) = P(z)$.

幂级数的逐项可微性证明如下:

从第 920 页我们知道关系式

$$D(z) = \lim_{n\to\infty} D_n(z)$$

在收敛圆内成立. 我们应当证明: 当 z_1 在收敛圆内充分接近 z 时，差商

$$\frac{P(z_1) - P(z)}{z_1 - z}$$

与 $D(z)$ 的差的绝对值小于预先指定的正数 ε. 为此，我们把差商写成

$$D(z_1, z) = \frac{P(z_1) - P(z)}{z_1 - z} = \frac{P_n(z_1) - P_n(z)}{z_1 - z} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu \lambda_\nu,$$

其中

$$\lambda_\nu = \frac{z_1^\nu - z^\nu}{z_1 - z} = z_1^{\nu-1} + z_1^{\nu-2} z + \cdots + z^{\nu-1}.$$

如果保持第 920 页上的记号，并且如果 $|z| < q|\xi|$, $|z_1| < q|\xi|$, 那么

$$|\lambda_\nu| \leqslant \nu q^{\nu-1} |\xi|^{\nu-1}.$$

因此,

$$|R_n| = \left| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu \lambda_\nu \right| \leqslant \sum_{\nu=n+1}^{\infty} |a_\nu| \nu q^{\nu-1} |\xi|^{\nu-1}$$

$$\leqslant \frac{M}{|\xi|} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu q^{\nu-1}.$$

由于正项级数 $\sum \nu q^{\nu-1}$ 收敛, 所以当 n 充分大, $|R_n|$ 可以任意地小. 我们选取 n, 使得 $|R_n| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, 并且如果必要的话可增大 n, 使得同时还有

$$|D(z) - D_n(z)| < \varepsilon/3.$$

现在我们选取如此接近于 z 的 z_1, 使得

$$\frac{P_n(z_1) - P_n(z)}{z_1 - z}$$

与 $D_n(z)$ 的差也小于 $\varepsilon/3$. 于是

$$\begin{aligned}|D(z_1, z) - D(z)| \leq & \left|\frac{P_n(z_1) - P_n(z)}{z_1 - z} - D_n(z)\right| \\ & + |D_n(z) - D(z)| + |R_n| \\ & < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

这个不等式就是所要证明的.

由于函数的微商仍然是具有相同收敛半径的幂级数, 我们能够再次求微商, 并且可不断地重复这个过程, 即**幂级数可以在它的收敛圆内部任意次地求微商**.

幂级数是它所表示的函数的泰勒级数, 即系数 a_ν 可由以下公式表示

$$a_\nu = \frac{1}{\nu!} P^{(\nu)}(0). \tag{3}$$

证明和实变数的情形完全一样 (见第一卷第 611 页).

d. 幂级数的例子

我们在第一卷第七章 (第 621 页) 中提到过, 初等函数的幂级数能够直接推广到复变数的情形. 换句话说, 我们能够将初等函数的幂级数看作复的幂级数, 并由此把这些函数的定义推广到复的邻

域. 例如, 级数

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{z^\nu}{\nu!},\quad \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\frac{z^{2\nu}}{(2\nu)!},\quad \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!},$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{z^{2\nu}}{(2\nu)!},\quad \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}$$

对一切 z 收敛 (这可以由比较判别法立即推出). 这些幂级数所表示的函数, 如同在实的情形一样, 仍然分别采用符号 $e^z, \cos z, \sin z, \cosh z, \sinh z$. 关系式

$$\cos z + i\sin z = e^{iz}, \tag{4a}$$

$$\cosh z = \cos iz,\quad i\sinh z = \sin iz \tag{4b}$$

现在可以立即从幂级数推出. 此外, 由逐项微商, 我们得到关系式

$$\frac{d}{dz}e^z = e^z. \tag{4c}$$

作为异于几何级数的、具有有穷收敛半径的幂级数例子, 我们考虑级数

$$\begin{aligned}\log(1+z) &= \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\frac{z^\nu}{\nu}, \\ \arctan z &= \sum_{\nu=0}^{\infty}(-)^\nu\frac{z^{2\nu+1}}{2\nu+1} \\ &= \frac{1}{2i}[\log(1+iz)-\log(1-iz)].\end{aligned} \tag{4d}$$

这两个级数的和, 我们仍用 log 和 arctan 表示. 这里, 收敛半径等于 1. 由逐项微商, 我们得到几何级数, 并且

$$\frac{d\log(1+z)}{dz} = \frac{1}{1+z},\quad \frac{d}{dz}(\arctan z) = \frac{1}{1+z^2}.$$

8.2 单复变函数一般理论的基础

a. 可微性条件

上面我们已经看到，由幂级数表示的函数具有微商和不定积分. 这个事实可以作为单复变函数一般理论的出发点. 这个理论的目的在于把微积分学推广到单复变函数上去，特别地，重要的是把函数概念推广到复变数的函数，使其包含任何在一个复区域内可微的函数.

当然，我们可以一开始就限于考虑由幂级数表示的函数，于是它满足可微性条件. 但是这样做有两个缺点. 首先，我们不能预先知道是否复变数函数的可微性条件一定蕴涵函数能够展开幂为级数 (在实变数的情形，我们知道，确实存在具有任意阶微商而不能展开为幂级数的函数，见第一卷第 515 页). 其次，我们从仅在单位圆内收敛，它的幂级数是几何级数的简单函数 $\dfrac{1}{1-z}$ 知道，即使对于简单的函数表达式，它的幂级数并不是处处代表这个函数. 在这个特别情形，我们已经用别的方法知道这个函数.

这些困难能够通过外尔斯特拉斯方法加以避免，并且单复变函数论能够在幂级数的理论基础上展开. 但是值得强调的是另一种观点，即柯西和黎曼的观点. 他们的方法不是用 **明显的表达式** 而是用简单 **性质** 来表征函数. 更确切地说，是用函数在定义域内的可微性而不是用幂级数来表征.

我们从复变数 z 的复函数 $\zeta = f(z)$ 的一般概念开始. 如果 R 是 z 平面上的一个区域， R 内的每个点 $z = x + iy$ 借助某种关系联系着一个复数 $\zeta = u + iv$, 则称 ζ 是 R 内的一个复函数. 这个定义只表示使得点 (x, y) 位于 R 内的实数偶 x, y 有相应的实数偶 u, v, 即 u, v 是定义在 R 内的两个实变数 x, y 的两个实函数 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$.

对于复的微积分来说，函数概念的要求是非常强的. 首先，我们限于 $u(x, y), v(x, y)$ 在 R 内有连续一阶偏微商 u_x, u_y, v_x, v_y. 我

们称 $u+iv=\zeta=f(z)$ 在 R 内关于自变数 z 是可微的, 意思 就是，极限

$$\lim_{z_1\to z}\frac{f(z_1)-f(z)}{z_1-z}=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=f'(z)$$

对于 R 内的一切 z 的值存在. 称这个极限为 $f(z)$ 的微商.

要使 $f(z)$ 是可微的，仅仅 u,v 具有关于 x,y 的连续偏微商是不够的. 可微性条件比实函数的可微性条件要强得多. 因为如果函数可微，当 $h=r+is$ 经实数 $(s=0)$ 和经纯虚值 $(r=0)$ 或任何别的方式趋于零时，必需有 相同 的极限值 $f'(z)$.

例如，如果我们设 $u=x,v=0$, 即 $f(x)=f(x+iy)=x$, $u(x,y),v(x,y)$ 是连续可微的. 但是对于 f 关于 z 的微商，如果设 $h=r$, 我们得到

$$\lim_{r\to 0}\frac{f(z+r)-f(z)}{r}=\lim_{r\to 0}\frac{x+r-x}{r}=1,$$

如果设 $h=is$, 则有

$$\lim_{s\to 0}\frac{f(z+is)-f(z)}{is}=\lim_{s\to 0}\frac{0}{is}=0;$$

即，我们得到完全不同的极限值. 类似地，对于 $f(z)=u+iv=x+2iy$, 当 h 以不同方式趋于零时，我们得到差商的不同极限值.

所以，为确保 $f(z)$ 对于 z 的可微性，必需加上别的限制. 复变函数论中的这个基本事实可表达为下面的定理:

如果 $\zeta=u(x,y)+iv(x,y)=f(z)=f(x+iy)$, 其 中 $u(x,y),v(x,y)$ 是连续可微的, 则函数 $f(z)$ 在复区域内可微的必要条件是所谓柯西-黎曼微分方程

$$u_x=v_y,\quad u_y=-v_x \tag{5a}$$

成立.

在每个使 u, v 连续可微且满足柯西-黎曼微分方程的开集 R 内, $f(z)$ 称为复变数 z 的解析函数[1), 并且 $f(z)$ 的微商为

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = \frac{1}{i}(u_y + iv_y). \tag{5b}$$

我们首先证明柯西 - 黎曼微分方程是 必要 条件. 设 $f'(z)$ 存在, 因此取 h 等于实值 r, 我们一定得到极限值 $f'(z)$, 即

$$f'(z) = \lim_{r\to 0}\left(\frac{u(x+r,y) - u(x,y)}{r} + i\frac{v(x+r,y) - v(x,y)}{r}\right) = u_x + iv_x.$$

同样地, 如果取 h 为纯虚值 is, 我们一定得到 $f'(z)$, 即

$$f'(z) = \lim_{s\to 0}\left(\frac{u(x,y+s) - u(x,y)}{is} + i\frac{v(x,y+s) - v(x,y)}{is}\right) = \frac{1}{i}(u_y + iv_y).$$

所以

$$u_x + iv_x = \frac{1}{i}(u_y + iv_y).$$

取实部和虚部, 我们立即得到柯西 - 黎曼方程.

但是这两个方程也是函数 $f(z)$ 可微性的 充分 条件. 为了证明这一点, 我们作差商 [见第二卷第一分册第 44 页公式 (13)]

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

---

1) 也称为 全纯. 这里不予以证明的一个较为深刻的定理是: 对于在一个区域内可微的函数 f 而言, u, v 的偏微商不仅存在而且一定是连续的. 因此, f 的可微性实际上蕴涵连续可微性. 但是在今后我们并不利用这个定理, 而总是 假定 我们所考虑的可微函数 f 有连续可微的实部和虚部, 即 $f'(z)$ 是 z 的连续函数.

$$=\frac{u(x+r,y+s)-u(x,y)+i\{v(x+r,y+s)-v(x,y)\}}{r+is}$$

$$=\frac{ru_x+su_y+irv_x+isv_y+\varepsilon_1|h|+i\varepsilon_2|h|}{r+is},$$

其中 ε_1 和 ε_2 是两个实的，随 $|h|=\sqrt{r^2+s^2}$ 一起趋于零的量. 现在如果柯西 - 黎曼方程成立，上面的表达式立即变成

$$u_x+iv_x+\varepsilon_1\frac{|h|}{r+is}+i\varepsilon_2\frac{|h|}{r+is}.$$

我们立即看出当 $h\to 0$ 时，这个表达式趋于极限值 u_x+iv_x，而不依赖于 $h\to 0$ 所取的方式.

现在我们利用柯西 - 黎曼方程，或与此等价的可微性作为解析函数的定义，并以此作为推导解析函数一切性质的基础.

b. 微分学的最简单运算

一切多项式和一切在收敛圆内部的幂级数是解析函数 (见第 923 页). 我们立即看出，导致微分学基本法则的运算，如同在实变数的情形一样，能够以完全相同方式进行 (见第一卷第 227—230 页，第 244—247 页). 特别，以下法则成立：解析函数的和、差、乘积以及商 (只要分母不为零) 能够按照微积分的基本法则求微商，从而仍然是解析函数. 此外，一个解析函数的解析函数能够按照链式法则求微商，所以它本身也是解析函数.

我们也注意到下面的定理：

如果解析函数 $\zeta=f(z)$ 的微商在区域 R 内处处为零，则 $f(z)$ 是常数.

证明. 由 (5a), (5b), $v_y-iu_y=0$ 在 R 内处处成立. 因此 $v_y=0, u_y=0$. 根据柯西 - 黎曼方程， $v_x=0, u_x=0$, 即 u 和 v 是常数，因此， ζ 是一常数.

对于指数函数的应用

我们利用这个定理，推导出指数函数的某些基本性质. 对一切复数 z, 指数函数由如下的幂级数来定义：

$$e^z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots.$$

由于我们可以微商这个级数，我们得到

$$\frac{d}{dz}e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots=e^z. \tag{6}$$

于是，指数函数 $f(z)=e^z$ 是微分方程

$$f'(z)=f(z)$$

的解 (对一切 z). 由微分法的链式法则，对于任意固定的复数 ζ, 有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}e^{z+\zeta}e^{-z}&=\frac{d}{dz}f(z+\zeta)f(-z)\\&=f'(z+\zeta)f(-z)-f(z+\zeta)f'(-z)\\&=f(z+\zeta)f(-z)-f(z+\zeta)f(-z)=0.\end{aligned}$$

利用上面的定理

$$e^{z+\zeta}e^{-z}$$

是一个不依赖 z 的常数. 令 $z=0$, 并且由于 $e^0=1$, 我们可求出这个常数，并得到

$$e^{z+\zeta}e^{-z}=e^{\zeta} \tag{6a}$$

对于一切 z 和 ζ 成立. 对于 $\zeta=0$, 有

$$e^ze^{-z}=1. \tag{6b}$$

因此，对于一切复数 z, 指数函数不等于零, 而且 e^z 的倒数是 e^{-z}. 用 e^z 乘(6a)的两边, 我们得到指数函数的函数方程

$$e^{z+\zeta}=e^ze^{\zeta}, \tag{6c}$$

这个方程直接从幂级数表示式推导出来不是如此容易.

如果 $f(z)$ 是微分方程

$$f'(z) = f(z) \tag{7a}$$

的任意解，则我们有

$$\frac{d}{dz}f(z)e^{-z} = f'(z)e^{-z} - f(z)e^{-z} = 0.$$

因此

$$f(z)e^{-z} = c \quad (常数).$$

于是，微分方程 (7a) 的一般解有以下形式

$$f(z) = ce^{z}, \tag{7b}$$

其中 c 是一个常数.

在第 940 页，我们已经看到

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z, \tag{8a}$$

其中 $\cos z, \sin z$ 是由它们的幂级数定义的. 用 $-z$ 代替 z，由于 $\sin(-z) = -\sin z$, 我们发现

$$e^{-iz} = \cos z - i\sin z.$$

这两个关系式相乘，得到

$$e^{iz}e^{-iz} = \cos^2 z + \sin^2 z.$$

由于 $e^{iz}e^{-iz} = e^{iz-iz} = 1$, 所以我们证明了恒等式

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \tag{8b}$$

对一切复数 z 成立.

由 (6c) 和 (8a), 有

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y). \tag{8c}$$

如果 x, y 是实的，我们求得 $e^z = e^{x+iy}$ 的绝对值为

$$\begin{aligned} |e^z| &= |e^{x+iy}| = |e^x \cos y + ie^x \sin y| \\ &= \sqrt{(e^x \cos y)^2 + (e^x \sin y)^2} = \sqrt{e^{2x}(\cos^2 y + \sin^2 y)} \\ &= e^x. \end{aligned} \tag{8d}$$

如果令 $z = 2\pi$, 我们就得到联系指数函数和三角函数的关系式 (8a) 的另一个重要结论:

$$e^{2\pi i} = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1. \tag{9a}$$

更一般地，在 (6c) 中令 $\zeta = 2\pi i$, 我们有

$$e^{z+2\pi i} = e^z. \tag{9b}$$

于是，复变数的指数函数是周期函数, 周期是 $2\pi i$.

公式 (8a) 表明，对于任意整数 n

$$e^{2n\pi i} = \cos(2n\pi) + i\sin(2n\pi) = 1. \tag{9c}$$

容易看出，仅当 $z = 2n\pi i$ ($n=$ 整数) 时,

$$e^z = 1.$$

因为如果 $z = x + iy$, x, y 是实数，由 $e^z = 1$ 及 (8d) 知道 $e^x = 1$, 所以 $x = 0$, 于是由

$$1 = e^{iy} = \cos y + i\sin y$$

得到

$$\cos y = 1, \qquad \sin y = 0.$$

所以, y 必是 2π 的倍数.

我们推知方程

$$e^z = e^\zeta \tag{9d}$$

成立, 当且仅当

$$z = \zeta + 2n\pi i,$$

其中 n 是整数, 因为用 $e^{-\zeta}$ 乘 (9d), 得到

$$e^{z-\zeta} = e^z e^{-\zeta} = 1.$$

c. 保角变换. 反函数

通过函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 建立了 z 平面或 x,y 平面的点到 ζ 平面或 u,v 平面的点的对应. 于是, 我们得到一个由 $\zeta = f(z) = u + iv$ 确定的, 从 x,y 平面上的区域到 u,v 平面上的区域的变换或映照. 由第 926 页上的 (5a), (5b), 这变换的雅可比行列式是

$$D = \frac{d(u,v)}{d(x,y)} = u_x v_y - u_y v_x = u_x^2 + v_x^2 = |f'(z)|^2.$$

所以, 只要 $f'(z) \neq 0$ 时, 雅可比行列式不等于零, 并且是正的. 如果假定 $f'(z) \neq 0$, 我们前面的结果 (第二卷第一分册第 285 页) 表明, 在 z 平面上点 z_0 的充分小的邻域被一一对应地、连续地映照到一个区域, 这个区域在 ζ 平面上点 $\zeta_0 = f(z_0)$ 的邻域内. 这个映照是**保角的**(即它保持角度不变), 因为如同我们在第三章 (第二卷第一分册第 316 页) 已经看到的那样, 柯西 - 黎曼方程是变换不仅保持角度大小、而且保持方向的充分必要条件. 于是我们有以下结果:

除去那些使得 $f'(z_0) = 0$ **的点** z_0 **外, 由** $u(x,y)$ **和** $v(x,y)$ **给定的变换的保角性与函数** $f(z) = u + iv$ **的解析性恰恰意味着同一件事情.**

读者应当研究在第三章 (第二卷第一分册第 265—266 页) 中讨论过的那些保角表示的例子, 并且证明所有这些变换能够表示为简单形式的解析函数.

因为 z_0 的邻域到 ζ_0 的邻域的一一对应的保角表示, 其反变换也是保角的, 所以 $z=x+iy$ 也可以看作是 $\zeta=u+iv$ 的解析函数 $\phi(\zeta)$, 这个函数称为 $\zeta=f(z)$ 的 反函数.

不用这个几何论证, 如同在第二卷第一分册第 275 页上 (24d) 所做的那样, 通过计算 $x(u,v),y(u,v)$ 的偏微商, 我们能够直接建立反函数的分析特征. 我们有

$$x_u=\frac{v_y}{D},x_v=-\frac{u_y}{D},\ y_u=-\frac{v_x}{D},y_v=\frac{u_x}{D}, \tag{10a}$$

由此可见反函数满足柯西 - 黎曼方程 $x_u=y_v,x_v=-y_u$. 我们能够立即验证, 函数 $\zeta=f(z)$ 的反函数 $z=\phi(\zeta)$ 的微商由下面的公式给出:

$$\frac{dz}{d\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dz}=1. \tag{10b}$$

8.3 解析函数的积分

a. 积分的定义

实变数函数的微积分学的主要定理, 是一个函数的 不定积分 (变上限的积分) 可以看作是这个函数的原函数或 反微商. 相应的关系构成单复变函数论的核心.

我们从给出已知函数 $f(z)$ 的积分定义开始. 这里, 用 $t=r+is$ 而不用自变量 z 表示积分变量是方便的. 设 $f(t)$ 在区域 R 内解析, $t=t_0,t=z$ 是这个区域 R 内的两个点. 用一条完全位于 R 内的分段光滑的 (见第一章第 96 页) 有向曲线连接这两点 (图 8.2), 然后借助于分点 $t_0,t_1,\cdots,t_n=z$ 将曲线 C 细分为 n 部分, 作和数

$$S_n=\sum_{\nu=1}^{n}f(t'_\nu)(t_\nu-t_{\nu-1}), \tag{11a}$$

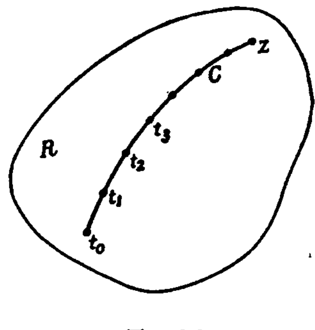


图 8.2

其中 t'_ν 是 C 上位于 $t_{\nu-1}$ 和 t_ν 之间的任意一点. 如果现在分割越来越细: 无限地增加分点, 使得长度 $|t_\nu - t_{\nu-1}|$ 的最大值趋于零, 这时 S_n 趋于极限, 并且这个极限和特殊的中间点 t'_ν 及分点 t_ν 的选取无关.

采用与证明实变数的定积分存在定理相类似的方法, 我们可以直接证明这一点. 但是, 化为关于实的曲线积分 (见第一章第 97 页) 的定理就更方便: 设

$$f(t) = u(r,s) + iv(r,s), \quad t_\nu = r_\nu + is_\nu,$$

$$\Delta t_\nu = t_\nu - t_{\nu-1} = \Delta r_\nu + i\Delta s_\nu,$$

则有

$$S_n = \sum_{\nu=1}^{n} u(r'_\nu, s'_\nu)\Delta r_\nu - v(r'_\nu, s'_\nu)\Delta s_\nu$$
$$+ i\Big\{\sum_{\nu=1}^{n} v(r'_\nu, s'_\nu)\Delta r_\nu + u(r'_\nu, s'_\nu)\Delta s_\nu\Big\}.$$

当 n 增大时, 右边的和数分别趋于实的线积分

$$\int_C udx - vdy \text{ 和 } i\int_C vdx + udy,$$

所以, 我们断言 S_n 趋于一极限. 我们把这个极限值称为函数 $f(t)$

沿曲线 c 从 t_0 到 z 的定积分，记为

$$\int_{t_0}^{z} f(t)dt \quad 或 \quad \int_C f(t)dt.$$

于是，有

$$\int_C f(t)dt = \int_C (udx - vdy) + i\int_C (vdx + udy). \tag{11b}$$

从这个定积分的定义立即给出一个重要估计：如果在积分路径上，$|f(t)| \le M$，其中 M 是一个常数，L 是积分路径的长度，那么

$$\left|\int_C f(t)dt\right| \le ML, \tag{11c}$$

因为由 (11a) 和第一卷

$$|S_n| \le M\sum_{\nu} |t_\nu - t_{\nu-1}| \le ML.$$

此外，我们指出，复积分 (特别地，不同积分路径的组合) 的运算满足第一章 (第二卷第一分册第 101—103 页) 中所述曲线积分的一切法则.

b. 柯西定理

单复变函数最重要的性质是从 t_0 到 z 的积分大多和积分路径 C 的选取无关. 事实上，我们有柯西定理：

如果函数 $f(t)$ 在单连通域 R 内解析，则积分

$$\int_{t_0}^{z} f(t)dt = \int_C f(t)dt$$

不依赖于 R 内连接 t_0 和 z 的积分路径 C 的特殊选取；这个积分是一个解析函数 $F(z)$，并且

$$\frac{d}{dz}F(z) = \frac{d}{dz}\left[\int_{t_0}^{z} f(t)dt\right] = f(z).$$

因此,$F(z)$ 是 $f(z)$ 的一个原函数或不定积分.

柯西定理也可以表述如下:

如果 $f(t)$ 在单连通域内解析,则 $f(t)$ 沿位于这个区域内的闭曲线的积分等于零.

可从 (11b) 和曲线积分的主要定理 (第二卷第 113 页) 推出积分和路径无关; 因为由柯西 - 黎曼方程知, 被积表达式的实部 $udx - vdy$ 和虚部 $vdx + udy$, 满足可积性条件, 于是这个积分是 x, y 或 $x + iy = z$ 的函数 $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$, 并且由曲线积分的已知结果有以下关系:

$$U_x = u, U_y = -v, V_x = v, V_y = u,$$

即 (见第 926 页 (5b))

$$U_x = V_y, U_y = -V_x, U_x + iV_x = u + iv.$$

这就表明, $F(z)$ 确实在 R 内是解析的, 且导数 $F'(z) = f(z)$.

单连通区域 的假定对于确保柯西定理成立是不可缺少的. 例如, 考虑函数 $1/t$, 它在 t 平面上除去原点外处处解析. 我们不能从柯西定理推断 $1/t$ 沿环绕原点的闭曲线的积分等于零, 因为这条曲线不能范围一个单连通域, 使得 $1/t$ 在这个区域内解析. 区域的单连通性在例外点 $t = 0$ 受到破坏. 例如, 如果我们沿圆 $K : |t| = r$ 或 $t = re^{i\theta}$ 方向为正向取积分, θ 为积分变量 $(dt = rie^{i\theta}d\theta)$, 就有

$$\int_K \frac{dt}{t} = \int_0^{2\pi} \frac{rie^{i\theta}}{re^{i\theta}} d\theta = 2\pi i. \tag{12a}$$

即积分的值不是零而是 $2\pi i$.

但是, 我们能够推广柯西定理到多连通域:

如果多连通域 R 是由有限多个分段光滑的闭曲线 $C_1, C_2, \cdots$ 所围 成, $f(z)$ 在这个区域内和它的边界上解析 [1], 则函数沿一切

1) 称一个函数在一条曲线上是解析的, 如果它在这条曲线的一个 (不管多么小) 邻域内是解析的.

边界曲线的积分为零，只要一切边界的取向对于区域 R 的内部是相同的，即当沿边界曲线移动时，区域总在它的同一边，比如说总是在左边.

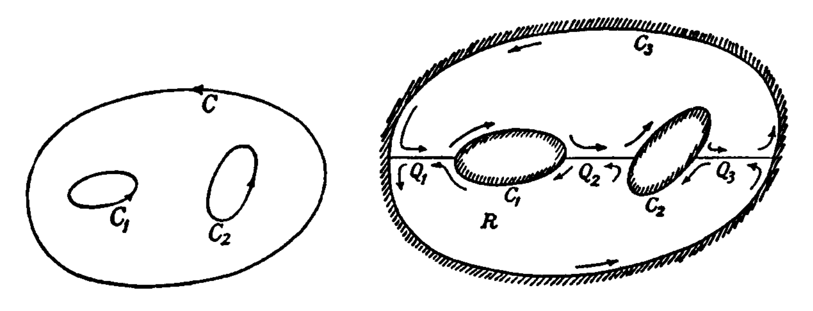


图 8.3 $\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2}$　　图 8.4 用线段 $Q_1, Q_2, \cdots$ 分多连通域为单连通域

其证明可从曲线积分相应的证明方法立即得到：我们分割区域 R 为有限个单连通域 (见图 8.3 和图 8.4)，应用柯西定理于这些区域，并把这些结果加起来. 我们能够用稍为不同的方式来表述这个定理：

如果区域 R 是由闭曲线 C 的内部除去 $C_1, C_2, \cdots$ 的内部所组成，则

$$\int_C f(t)dt = \sum_\nu \int_{C_\nu} f(t)dt, \tag{12b}$$

其中积分是沿外边界 C 和内边界的相同方向取的.

c. 应用. 对数函数，指数函数及一般幂函数

现在，我们能够利用柯西定理作为对数函数、指数函数、从而也是其他初等函数的理论基础，只要仿效类似于对实变数采取过的做法.

我们从定义函数 $1/t$ 的积分作为对数函数开始. 首先我们限定积分路径使它位于沿负实轴作割痕而得到的解析性单连通域内，即不允许积分路径跨过负实轴. 更精确地说，如果 $t = |t|(\cos\theta + i\sin\theta)$,

我们限定 $-\pi < \theta \le \pi$. 在作了这条割痕后的 t 平面内，我们用任意曲线 C 接连点 $t=1$ 和任意点 z, 于是我们能够利用柯西定理于这两点间的函数 $1/t$ 的积分，这个积分和路径无关．它对于 $z \ne 0$ 唯一确定一个解析函数．我们称它为 z 的对数 $\log z$:

$$\zeta = \log z = \int_1^z \frac{dt}{t} = f(z). \tag{12c}$$

对数有性质

$$\frac{d}{dz}(\log z) = \frac{1}{z}. \tag{12d}$$

对数函数的逆与指数函数一致．按照对数函数的定义，在沿负实轴割开的平面内，我们考虑函数 $e^{\log z}, z \ne 0$. 利用微商的链式法则，从 (12d) 和 (6), 对于 $z \ne 0$, 有

$$\frac{d}{dz}\frac{1}{z}e^{\log z} = -\frac{1}{z^2}e^{\log z} + \frac{1}{z^2}e^{\log z} = 0.$$

因此

$$\frac{1}{z}e^{\log z} = c \ (\text{常数}).$$

如果取 $z=1$, 有

$$c = e^{\log 1} = e^0 = 1.$$

于是，对于一切 $z \ne 0$[1], 有

$$e^{\log z} = z. \tag{13a}$$

方程 (13a) 表示，方程

$$e^w = z \tag{13b}$$

1) 人们试图从

$$\frac{d}{dz}\log(e^z) = \frac{1}{e^z}e^z = 1$$

类似地推断

$$g(z) = \log(e^z) - z = \text{常数}$$

但是，这是不对的，因为 $g(0)=0$, $g(2\pi i) = -2\pi i$. 这个推理的谬误之处留给读者去找出.

对于每一个 $z \neq 0$ 至少有一个解 w, 即

$$w = \log z. \tag{13c}$$

所以, 指数函数取到除0以外的一切复数.

但是, 这个解不是唯一的. 从第 932 页我们知道, 如果 w 是 (13b) 的任意一个特解, 则一般解为

$$w + 2n\pi i,$$

其中 n 是整数. 因此有: 对于任意 $z \neq 0$, 方程

$$e^w = z \tag{13d}$$

等价于

$$w = \log z + 2n\pi i, \tag{13e}$$

其中 n 是整数.

作为一个应用, 我们推导出对数的加法定理. 对于任意两个都不为零的复数 z, ζ, 由 (13a), 我们有

$$z\zeta = e^{\log z} e^{\log \zeta} = e^{\log z + \log \zeta}.$$

另一方面,

$$z\zeta = e^{\log(z\zeta)}.$$

所以

$$\log(z\zeta) = \log z + \log \zeta + 2n\pi i, \tag{14}$$

其中 n 是整数. 这里, 对于正实值 z, ζ, 我们总可以取 $n = 0$. 但是如同下面的例子所表明的那样, 对于其他情形这是不行的.

通过取连接 $t = 1$ 和 $t = |z|$ 的直线段与圆弧 $|t| = |z|$ 作为积分路径, 积分

$$\log z = \int_1^z \frac{dt}{t}$$

容易明显地计算出来. 在圆上, 设 $t=|z|e^{i\zeta}$, 我们有

$$\log z=\int_1^{|z|}\frac{dt}{t}+\int_0^\theta id\zeta=\log|z|+i\theta, \tag{15}$$

其中 θ 是复数 z 的辐角 (图 8.5), 例如

$$\log 1=0,\ \log i=\frac{\pi i}{2},\ \log(-1)=\pi i.$$

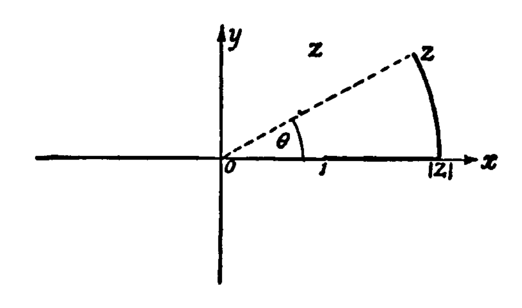


图 8.5　$\log z=\log|z|+i\theta$

我们注意到

$$\log[(-1)(-1)]=\log 1=0=\log(-1)+\log(-1)-2\pi i.$$

于是, 在公式 (14) 中, 当 $z=\zeta=-1$ 时, 我们不能取 $n=0$.

对于辐角位于区间 $-\pi<\theta\leq\pi$ 内的任意复数 z, 用这个方法得到的对数值常称为对数的**主值**. 这个术语是基于这样的事实: 对数的其他值可以由去掉不准跨越负实轴这个条件而得到. 这样, 我们能够取连接点 1 和点 z 的、并环绕原点 $t=0$ 的路径. 在这条曲线上, t 的辐角增加到某一个值, 这个值比原先 z 的辐角大了或小了 2π. 所以, 我们得到积分的值为

$$\log z=\log|z|+i\theta\pm 2\pi i$$

(图 8.6). 同样地, 如果取曲线围绕原点从正方向或反方向绕行 n

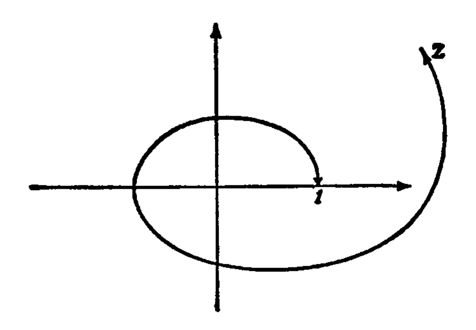


图 8.6 $\log z = \log|z| + i\theta + 2\pi i$

次，我们得到值

$$\log z = \log|z| + i\theta + 2n\pi i. \tag{16}$$

这表示出对数的多值性[1]. 公式 (16) 表示方程 $e^{\log z} = z$ 的一般解.

引进了对数和指数函数，现在我们容易定义 a^z 和一般幂函数 z^α, 其中 α 和 a 是常数 (见第一卷第 168 页对于实变数的相应的讨论). 我们通过关系

$$a^z = e^{z\log a} \quad (a \neq 0), \tag{16a}$$

定义 a^z, 其中 $\log a$ 取主值. 同样可通过关系

$$z^\alpha = e^{\alpha\log z} \quad (z \neq 0) \tag{16b}$$

定义 z^α.

如果利用 $\log a$ 主值的定义，函数 a^z 是唯一确定的，而函数 z^α 的多值性则更深入一步. 注意到 $\log z$ 的多值性，我们看出，由 z^α 的任一个值，乘以 $e^{2n\pi i\alpha}$ 可得到其他的一切值，这里 n 是任意的正整数或负整数. 如果 α 是有理数，比如 $\alpha = p/q, p, q$ 是互素的，则这些乘数仅取有限个不同的值 (其 q 次幂必为 1). 但是，如果 α 是无理数，我们就得到无穷多个不同的乘数. 函数 z^α 的多值性将在第 957 页详细地讨论.

1) 当然，多值性对数不是对每个数 z 的复对数在单值意义下的函数，而主值是这种意义下的函数.

从链式法则看出，这些函数满足微商公式

$$\frac{d(a^z)}{dz} = a^z \log a, \quad \frac{d(z^\alpha)}{dz} = \alpha z^{\alpha-1}. \tag{16c}$$

8.4 柯西公式及其应用

a. 柯西公式

对于复连通域的柯西定理引出一个仍属于柯西的基本公式：一个在整个闭区域解析的函数，在其内部任意一点 $z = a$ 处的值可以用这个函数在边界 C 上的值表示出来.

设函数 $f(z)$ 在单连通域 R 和它的边界 C 上解析，则函数

$$g(z) = \frac{f(z)}{z - a}$$

除去点 $z = a$ 外，在 R 内以及边界 C 上处处解析. 在域 R 内去掉一个以 $z = a$ 为中心、ρ 为半径、且整个位于 R 内的小圆 (图 8.7)，然后应用柯西定理 (第 936 页) 于函数 $g(z)$. 如果 K 表示这个方向

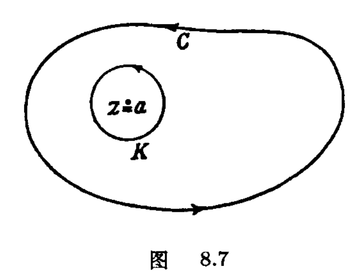


图 8.7

为正向的小圆周，且 R 的边界 C 也是正向，由柯西定理 [见第 937 页 (12b)]

$$\int_C g(z)dz = \int_K g(z)dz.$$

在圆 K 上，有 $z - a = \rho e^{i\theta}$. 这里 θ 决定圆周上点的位置，所以在这个圆上， $dz = \rho i e^{i\theta} d\theta$, 因此

$$\int_K g(z)dz = i\int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\theta})d\theta.$$

由于 $f(z)$ 在点 a 是连续的，所以只要 ρ 充分小，我们就有

$$f(a+\rho e^{i\theta}) = f(a) + \eta,$$

其中 $|\eta|$ 小于任意指定的正数 ε.

因此

$$\left|\int_0^{2\pi} f(a+\rho e^{i\theta})d\theta - \int_0^{2\pi} f(a)d\theta\right| = \left|\int_0^{2\pi} \eta d\theta\right| \le 2\pi\varepsilon,$$

所以

$$\int_0^{2\pi} f(a+\rho e^{i\theta})d\theta = 2\pi f(a) + \kappa,$$

其中 $|\kappa| \le 2\pi\varepsilon$. 于是，如果 ρ 充分小，

$$\int_C g(z)dz = 2\pi i f(a) + \kappa i,$$

其中 $|\kappa i| \le 2\pi\varepsilon$.

如果使 ε 趋于零 (当 ρ 趋于零时), 上边等式的右边趋于 $2\pi i f(a)$, 而左边，即

$$\int_C g(z)dz$$

不变，于是我们得到柯西基本积分公式

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz. \tag{17a}$$

如果我们现在回到用 t 表示积分变量，然后用 z 代替 a, 这个公式有以下形式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{t-z}dt. \tag{17b}$$

这个公式表明，一个在闭区域内解析的函数，其内部的值可以用这个函数在边界上的值表示出来.

特别地，如果 C 是以 z 为中心的圆 $t = z + re^{i\theta}$, 即如果 $dt = ire^{i\theta}d\theta$, 则

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+re^{i\theta})d\theta.$$

用文字来表达就是：一个函数在圆盘中心的值等于圆周上的平均值，只要这个圆及其内部包含在 $f(z)$ 是解析的区域内.

b. 解析函数的幂级数展式

柯西公式有许多重要的推论，其中主要的是，每个解析函数能够展为幂级数，这就把当前的理论和 8.1 节的理论联系起来了. 更明确地说，我们有以下定理：

如果函数 $f(z)$ 在圆 $|z-z_0|\leq R$ 的内部和边界上解析，则这个函数能够展为在这个圆内收敛的 $z-z_0$ 的幂级数.

不失证明的一般性，我们取 $z_0=0$(否则只要由变换 $z-z_0=z'$ 引进新的自变量 z'). 现在应用柯西积分公式 (17b) 于圆 C, $|t|=R$, 并把被积函数写成 (利用几何级数) 以下形式：

$$\begin{aligned}\frac{f(t)}{t-z}&=\frac{f(t)}{t}\frac{1}{1-z/t}\\&=\frac{f(t)}{t}\left(1+\frac{z}{t}+\cdots+\frac{z^n}{t^n}\right)+\frac{f(t)}{t}\left(\frac{z}{t}\right)^{n+1}\frac{1}{1-z/t}.\end{aligned}$$

由于 z 是圆内的点，所以 $|z/t|=q$ 是小于 1 的正数，我们估计几何级数的余项

$$r_n=\frac{1}{t}\cdot\frac{z^{n+1}}{t^{n+1}}\cdot\frac{1}{1-z/t}$$

为

$$|r_n|\leq\frac{1}{R}q^{n+1}\frac{1}{1-q}.$$

将这个表达式代入柯西公式，并逐项积分，得到

$$f(z)=c_0+c_1z+\cdots+c_nz^n+R_n,$$

其中

$$c_\nu=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(t)}{t^{\nu+1}}dt,$$

$$R_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(t) r_n dt.$$

如果 M 是 $|f(t)|$ 在圆周上的上界，由复积分的估计式 (11c), 对余项立即有

$$|R_n| \leq \frac{1}{2\pi R}\frac{q^{n+1}}{1-q}2\pi RM = \frac{q^{n+1}}{1-q}M.$$

由于 $q<1$, 这个余项当 n 增加时趋于零，我们得到 $f(z)$ 的幂级数表达式

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu,$$

$$c_\nu = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{t^{\nu+1}}dt. \tag{18a}$$

于是我们的断言得到了证明.

这个定理有重要的推论. 首先，我们从第 923 页知道，每个幂级数在它的收敛圆内部可以任意次微商，而每个解析函数可以表示为幂级数，由此推出，**一个函数在其解析区域之内，他的微商仍然是可微的(即仍是解析函数)**. 换句话说，**解析函数类的微商运算是自封的**. 如同我们已知的那样，对于积分运算也是如此，所以**解析函数的微商和积分能够无任何限制地进行**，这是一件很适意的事情，这在实函数的情形是没有的.

因为如同在 8.1 节 (第 923 页) 已经看到的那样，每个幂级数是它所表示的函数的泰勒级数，现在我们推出，每个解析函数在它解析的区域 R 内的点 $z=z_0$ 的邻域内能够展开为泰勒级数

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}(z-z_0)^\nu. \tag{18b}$$

因此 (18a) 中的系数 c_ν 由公式

$$\frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z_0+t)}{t^{\nu+1}}dt \tag{18c}$$

给出.

从这个结果我们也可以推出关于幂级数收敛半径的一个重要事实. 函数 $f(z)$ 在点 $z=z_0$ 邻域内的泰勒级数, 在其内部整个地位于函数有定义并且解析的区域内的最大圆内收敛.

借助于我们现在已经建立的对于复变数也成立的关于微分和积分的定理, 展开为泰勒级数的一切基本实变数函数, 对于复变数函数也有相同的泰勒级数. 我们已经看到对于这些函数的大多数, 这是对的.

例如, 这里我们指出, 如果 $|z|<1, \alpha$ 是任意复指数, 二项式级数 (见第一卷第 509 页)

$$(1+z)^\alpha = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha}{\nu} z^\nu \tag{19}$$

对于复变数也成立, 只要

$$(1+z)^\alpha = e^{\alpha \log(1+z)}$$

是由 $\log(1+z)$ 的 主值 构成的.

这个幂级数的收敛半径等于 1, 这是从我们刚才说过的, 以及函数 $(1+z)^\alpha$ 在 $z=-1$ 不再解析推出. 因为如果在 $z=-1$ 函数解析, 那么在这点就该有它的各阶微商, 而这是不对的. 所以半径为 1, 中心在 $z=0$ 的圆是这个函数在其中解析的最大圆.

这个例子说明, 借助于刚才我们证明过的关于收敛半径的事实, 实分析中玄奥的幂级数的收敛性就变得完全明了了.

例如, 表示 $1/(1+z^2)$ 的几何级数在单位圆上不收敛, 是这个函数在 $z=i$ 和 $z=-i$ 不再解析的一个简单推论. 我们现在也知道, 确定 伯努利数 的幂级数 (见第一卷第 588 页)

$$\frac{z}{e^z-1} = \sum \frac{B_\nu^* z^\nu}{\nu!}, \tag{20}$$

一定以圆 $|z|=2\pi$ 作为它的收敛圆. 因为这个函数的分母在 $z=2\pi i$ 为零, 但在圆 $|z|\leq 2\pi$ 内部没有使分母为零的点 (除原点 $z=0$ 外).

c. 函数论与位势理论

因为解析函数任意次可微, 由此推出, 函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 有任意阶连续微商. 所以可以微商柯西 - 黎曼方程, 如果对 x 微商第一个方程, 对 y 微商第二个方程, 并把它们加起来, 就得到

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0;$$

同样, 虚部 v 满足相同的方程

$$\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 0.$$

换句话说, **一个解析函数的实部和虚部是位势函数**.

如果两个位势函数 u,v 满足柯西 - 黎曼方程, 则称 v 对 u 是**共轭的**, 并且 $-u$ 对 v 共轭.

这就表示, 单复变函数论与二维的位势理论本质上是彼此等价的.

d. 柯西定理的逆定理

柯西定理的逆定理成立 (莫勒拉定理):

如果连续函数 $\zeta = u + iv = f(z)$ **沿位于定义域** R **内的每一条闭曲线** C **的积分为零, 则** $f(z)$ **在** R **内解析**.

为了证明这个定理, 我们注意到, 沿连接固定点 z_0 与变动点 z 的任意路径的积分

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(t)dt$$

与路径无关, 于是由第 935 页 (11c) 有

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)$$

$$
= \frac{1}{h} \int_{z}^{z+h} [f(t) - f(z)] dt \to 0 (h \to 0).
$$

因此, $F(z)$ 有微商, $F'(z) = f(z)$. 所以 $F(z)$ 解析, 由前面的结果, 它的微商 $f(z)$ 也解析.

柯西定理的逆定理表明, 可微性条件可以为可积性条件 (即线积分与路径无关) 所代替. 这两个条件的等价性是单复变函数论很特殊的性质.

e. 解析函数的零点, 极点和留数

如果函数 $f(z)$ 在 $z = z_0$ 为零, 那么 $f(z)$ 关于 $z - z_0$ 的泰勒级数的常数项消失, 并且这个级数的其他项也可能消失, 于是可以提出因子 $(z - z_0)^n$, 写成

$$
f(z) = (z - z_0)^n g(z),
$$

其中 $g(z_0) \neq 0$. 点 z_0 称为是**函数** $f(z)$ **的** n **阶零点**.

上面我们已经看到, 一个解析函数的倒数 $1/f(z) = g(z)$, 除去使 $f(z)$ 为零的那些点外, 也是解析的, 如果 z_0 是 $f(z)$ 的一个 n 阶零点, 在点 z_0 的邻域内, 函数 $g(t)$ 可表成

$$
q(z) = \frac{1}{(z - z_0)^n} \frac{1}{g(t)} = \frac{1}{(z - z_0)^n} h(z),
$$

其中 $h(z)$ 在 $z = z_0$ 邻域内解析. 在点 $z = z_0$, 函数 $q(z)$ 不再是解析的, 我们称这种点为**奇点**. 在现在这种特殊情形, 这个奇点称为**函数** $q(z)$ **的一个** n **阶极点**. 如果 $h(z)$ 展为 $(z - z_0)$ 的幂级数, 并且用 $(z - z_0)^n$ 除各项, 我们得到在极点邻域内以下形式的展式

$$
\begin{aligned}
q(z) = & c_{-n}(z - z_0)^{-n} + \cdots + c_{-1}(z - z_0)^{-1} \\
& + c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots,
\end{aligned}
$$

其中 $(z - z_0)$ 的幂的系数表示为 $c_{-n}, \cdots, c_{-1}, c_0, c_1, \cdots$.

如果我们讨论一阶极点 (即, 如果 $n=1$), 我们从关系式

$$c_{-1}=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)q(z)$$

立即得到系数 c_{-1}, 由于

$$\frac{1}{q(z)(z-z_0)}=\frac{f(z)}{z-z_0}=\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0},$$

在 $q(z)$ 展式中 $1/(z-z_0)$ 的系数

$$c_{-1}=\frac{1}{f'(z_0)}. \tag{21a}$$

同样, 如果 $q(z)=r(z)/\phi(z)$, 其中 $\phi(z)$ 在 $z=z_0$ 有一阶零点, 且 $r(z_0)\neq 0$, 则在 $q(z)$ 的展式中

$$c_{-1}=\frac{r(z_0)}{\phi'(z_0)}. \tag{21b}$$

如果一个函数在 z_0 的邻域内有定义, 并且除了这点本身外是解析的, 那么沿环绕点 z_0 的圆的积分, 一般是不等于零的. 但是, 由柯西定理, 这个积分与圆的半径无关, 并且对于一切闭曲线 C 有相同的值, 而 C 是包含 z_0 的充分小区域的边界. 以正方向绕这点取的积分值称为在这点的 **留数**.

如果奇点是 n 阶极点, 我们积分函数的展式, 具有正幂次的级数的积分等于零, 因为这个幂级数在 z_0 仍解析.

项 $c_{-1}(z-z_0)^{-1}$ 的积分等于 $2\pi i c_{-1}$, 而更高的负幂次的积分为零. 因为当 $\nu>1$ 时, $(z-z_0)^{-\nu}$ 的不定积分和实的情形一样, 是 $(z-z_0)^{-\nu+1}/1-\nu$. 于是沿闭曲线的积分为零.

所以, **一个函数在极点的留数是** $2\pi i c_{-1}$.

在下一节我们将熟悉这个概念的用处. 这个概念表述为下面的定理:

留数定理. **除去有限个内部的极点外, 如果函数** $f(z)$ **在区域** R **内和边界** C **上解析, 则此函数沿** C **的正向的积分等于边界** C **所包围的函数极点的留数和.**

证明立即从上面的叙述推出.

8.5　留数定理对复积分 (围道积分) 的应用

我们可以应用柯西定理和留数来计算实的定积分. 为此, 需把所要计算的积分看作复平面上沿实轴上的积分, 然后取适当的积分路径 [1], 通过简洁的论证而得到. 用这个方法, 我们有时可以极巧妙地计算出复杂的定积分, 而不必先求相应的不定积分. 我们将讨论某些典型例子.

a. 证明公式

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}. \tag{22}$$

这里给出这个重要公式的一个富有启发性的证明. 这个公式我们已经用别的方法讨论过 (第二卷第 606 页).

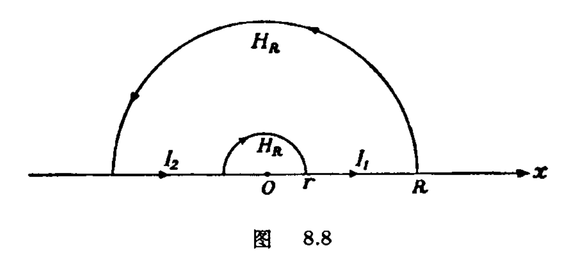


图　8.8

我们对函数 e^{iz}/z 在 z 平面沿图 8.8 所示的路径 C 求积分. 路径 C 是由以原点为中心, 以 R 和 r 为半径的半圆 H_R 和 H_r, 以及实轴上的两个对称区间 I_1 和 I_2 所组成. 由于函数 e^{iz}/z 在由这些边界所围成的圆环内正则, 这个围道积分值等于零. 合并沿 I_1 和 I_2 的积分, 我们有

$$\int_{H_R}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{H_r}\frac{e^{iz}}{z}dz+2i\int_r^R\frac{\sin x}{x}dx=0.$$

---

1) 总是把所考虑的积分归结为沿复平面上某一闭路径的积分.

现在令 R 趋于无穷，那么沿半圆 H_R 的积分趋于零，这是因为对于半圆上的点，$z = R(\cos\theta + i\sin\theta) = Re^{i\theta}$, 我们有

$$e^{iz} = e^{iR\cos\theta}e^{-R\sin\theta},$$

积分变成

$$i\int_0^{2\pi} e^{iR\cos\theta}e^{R\sin\theta}d\theta.$$

因子 $e^{iR\cos\theta}$ 的绝对值为 1, 而因子 $e^{-R\sin\theta}$ 的绝对值小于 1, 并且在每个区间 $\varepsilon \le \theta < \pi - \varepsilon$ 内，当 R 趋于无穷时，一致地趋于零，因此立即推出，当 $R \to \infty$ 时，沿 H_R 的积分趋于零. 读者自己容易证明，当 $r \to 0$ 时，沿 H_r 的积分趋于 $-\pi i$. 当 $R \to \infty, r \to 0$ 时，沿实轴上的两个对称区间 I_1, I_2 的积分趋于

$$2i\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx.$$

综上所述，我们立即得到关系式 (22).

b. 证明公式

$$\int_0^{\infty} (\cos ax)e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-a^2/4} \tag{23}$$

(比较第二卷第二分册第 611 页 4.12 节习题 9(a)).

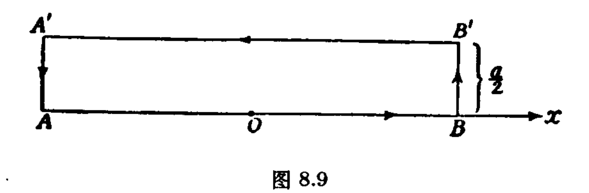


图 8.9

我们对 e^{-z^2} 沿矩形 $ABB'A'$ (图 8.9) 求积分，矩形的垂直边 AA',BB' 的长度为 $a/2$, 水平边 AB,$A'B'$ 的长度为 $2R$. 由柯西定理，这个围道积分值等于零. 在垂直边上，有

$$|e^{-z^2}| = |e^{-(x^2-y^2)}e^{-2ixy}| = e^{-R^2}e^{y^2} < e^{-R^2}e^{a^2/4},$$

当 R 趋于无穷时，它一致地趋于零，于是，如果令 $R \to \infty$，那么在垂直边上的那部分积分趋于零. 又注意到在 AB' 上， $dz = d\left(x + \frac{1}{2}ia\right) = dx$，我们可把柯西定理的结果表达如下：

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+i^{a/2})^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

即，无穷积分的积分路径能够用和它平行的路径所代替. 由前面的结果（见第二卷第二分册第 548 页），右边的积分等于 $\sqrt{\pi}$. 因为 $\sin ax$ 是奇函数， $\cos ax$ 是偶函数，左边的积分可直接写成

$$e^{a^2/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} (\cos ax - i \sin ax) dx = 2e^{a^2/4} \int_{0}^{\infty} \cos axe^{-x^2} dx.$$

这就证明了公式 (23).

c. 留数定理对于有理函数的积分的应用

对于有理函数

$$Q(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n},$$

如果分母没有实的零点，且它的次数比分子的次数至少大 2 次，则积分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} Q(x) dx$$

能够用下面的方法计算：我们先取沿半径为 R 的半圆周 H(在此半圆上， $z = Re^{i\theta}, 0 \le \theta \le \pi$) 和实轴上从 $-R$ 到 R 的线段所组成的围道积分. 半径 R 取得充分大，使得分母的全部零点都位于这个圆内，因此 $Q(z)$ 的全部极点都在这个圆的内部. 一方面，这个积分等于 $Q(z)$ 在这个半圆内的留数和，而另一方面，它等于积分

$$I_R = \int_{-R}^{R} Q(x) dx$$

加上沿半圆周 H 的积分. 由假设, 存在固定正数 M, 使得对于充分大的 R, 有 [1)]

$$|Q(z)| < \frac{M}{R^2}.$$

半圆弧的长度等于 πR. 由第 935 页的公式 (11c), 沿半圆弧的积分, 其绝对值小于

$$\pi R \frac{M}{R^2} = \frac{\pi M}{R}.$$

因此, 当 $R \to \infty$ 时, 它趋于零. 这就意味着, 积分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} Q(x) dx$$

等于 $Q(x)$ 在上半平面的留数和.

现在我们应用这个原理于若干有趣的特别情形, 我们首先取

$$Q(z) = \frac{1}{az^2 + bz + c} = \frac{1}{f(z)},$$

其中系数 a, b, c 是实数, 且满足条件 $a > 0$, $b^2 - 4ac < 0$. 函数 $Q(z)$ 在上半平面有一个一阶极点

$$z_1 = \frac{1}{2a}\{-b + i\sqrt{4ac - b^2}\},$$

其中平方根取正号. 所以由一般法则 (21a), 留数等于 $2\pi i / f'(z_1)$. 由于

$$f'(z_1) = 2az_1 + b = i\sqrt{4ac - b^2},$$

我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{2\pi}{\sqrt{4ac - b^2}}. \tag{24a}$$

作为第二个例子, 我们将证明公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{2}. \tag{24b}$$

---

1) 这从以下事实直接推出: $Q(z) = \left(\frac{1}{z^2}\right) R(z)$, 当 $z \to \infty$ 时, $R(z)$ 趋于零 (如果 $n > m + 2$), 或趋于 a_m / b_n(如果 $n = m + 2$).

这里，能够再次直接应用我们的一般原理. 在上半平面上，函数 $1/(1+z^4)=1/f(z)$ 有两个极点 $z_1=\varepsilon=e^{\pi i/4}$, $z_2=-\varepsilon^{-1}$(两个 -1 的四次方根，它们有正虚部). 留数和等于

$$2\pi i\left\{\frac{1}{f'(z_1)}+\frac{1}{f'(z_2)}\right\}=2\pi i\frac{1}{4}\left(\frac{1}{z_1^3}+\frac{1}{z_2^3}\right)=\frac{\pi i}{2}(\varepsilon^{-3}-\varepsilon^3)$$

$$=-\pi i\cdot i\sin\frac{3\pi}{4}=\pi\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\pi\sqrt{2}.$$

这就是所要证明的.

公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}=\frac{\pi}{4^n}\frac{(2n)!}{(n!)^2} \tag{24c}$$

的以下证明例示了应当计算高阶极点的留数的情形.

如果我们用 z 代替 x, 被积函数的分母为 $(z+i)^{n+1}(z-i)^{n+1}$ 的形式. 因此，被积函数在 $z=i$ 有 $(n+1)$ 阶极点. 为了求出在这点的留数，我们把它写成

$$\frac{1}{(z^2+1)^{n+1}}=\frac{1}{f(z)}=\frac{1}{(z-i)^{n+1}}\frac{1}{(2i+z-i)^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{(z-i)^{n+1}}\frac{1}{(2i)^{n+1}}\left(1+\frac{z-i}{2i}\right)^{-n-1}.$$

如果由二项式定理展开最后一个因子， $(z-i)^n$ 的系数为

$$\frac{1}{(2i)^n}\binom{-n-1}{n}=\frac{1}{(2i)^n}(-1)^n\frac{(n+1)\cdots 2n}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n}$$

$$=\frac{i^n}{2^n}\frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

所以，被积函数在点 $z=i$ 的邻域内展开为幂级数的系数 c_{-1} 等于

$$\frac{1}{2^{2n+1}}\frac{1}{i}\frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

所以留数 $2\pi ic_{-1}$ 等于

$$\frac{\pi}{2^n}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

这就证明了公式.

作为进一步的练习，读者自己可以由留数理论证明

$$\int_0^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+c^2}dx = \frac{1}{2}\pi e^{-|C|} \tag{24d}$$

(用 e^{ix} 代替 $\sin x$).

d. 留数定理与常系数微分方程

设

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n = P(z)$$

是 n 次多项式， t 是实参变数. 我们把沿 z 平面上不通过 $P(z)$ 的零点的闭曲线 C 的积分

$$u(t) = \int_C \frac{e^{tz}f(z)}{P(z)}dz \tag{25}$$

作为参变数 t 的函数 $u(t)$. 设 $f(z)$ 是一个常数或次数小于 n 的任意一个多项式. 由于积分号下求微商的法则对于复平面仍然成立，我们能够求 $u(t)$ 的关于 t 的一阶或高阶微商. 积分号下对 t 求微商按情况它就等价于在被积函数上乘以 $z, z^2, \cdots$. 如果我们现在作微分表达式 $L[u] = a_0 u + a_1 u' + \cdots + a_n u^{(n)}$ 或用符号 $P(D)u$ 表示，其中 D 表示微分符号 $D = d/dt$. 我们有

$$P(D)u = L[u] = \int_C e^{tz}f(z)dz.$$

由柯西定理，右边的复积分值为零，即函数 $u(t)$ 是微分方程 $L[u]=0$ 的解. 如果 $f(z)$ 是 $(n-1)$ 次的任意多项式，这个解包含 n 个任意常数. 因此我们可以期望用这个方法得到常系数线性微分方程 $L[u]=0$ 的一般解.

事实上, 假设曲线 C 包含分母 $P(z) = a_n(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)$ 的全部零点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$, 由留数定理计算积分，可以得到我们已知的解的形式 (见第六章第 841 页). 如果首先假定全部零点是简

单零点，它们是被积函数的简单极点，由公式 (21b), 在点 z_ν 的留数等于

$$2\pi i\frac{f(z_\nu)}{P'(z_\nu)}e^{tz_\nu}.$$

适当选取多项式 $f(z)$, 可使 $f(z_\nu)/P'(z_\nu)$ 为任意常数. 因此，我们得到解的形式为

$$u(t)=\sum_{\nu=1}^{n}c_\nu e^{z_\nu t}, \tag{26}$$

这与我们前面的结果一致.

如果多项式 $P(z)$ 的零点是多重的，比如说是 r 重的，被积函数的相应极点是 r 阶的. 在 z_ν 的留数必需由分子 $e^{tz}f(z)=e^{tz_\nu}e^{t(z-z_\nu)}f(z)$ 展为 $(z-z_\nu)$ 的幂级数来决定. 我们留给读者去证明，在 z_ν 的留数给出解 $te^{tz_\nu},\cdots,t^{r-1}e^{tz_\nu}$ 以及 e^{tz_ν}.

8.6　多值函数与解析开拓

迄今为止，不论在定义实变数函数还是复变数函数，我们总是采取这样的观点: 对于每个自变数的值, 函数的值必需是唯一的. 例如, 柯西定理也是基于假定函数在所考虑的区域内是唯一确定的. 虽然如此，在函数的实际构造中，常常必然出现多值性 (例如找出如 n 次幂那样的单值函数的反函数). 在实变数的情形, 我们在求反函数的过程中可以分出不同的**单值分支**, 比如 $\sqrt{z}$ 或 $\sqrt[n]{z}$. 但是，我们将看到，在复变数的情形，这样做不再是合理的，因为现在不同的单值分支是相互连结的, 以致于它们的任意分离都是颇为勉强的.

这里，我们只好限于对典型例子作些很简单的讨论.

例如, 我们考虑函数 $z=\zeta^2$ 的反函数 $\zeta=\sqrt{z}$. 对于每个非零值 z, 对应着方程 $z=\zeta^2$ 的两个解 ζ 和 $-\zeta$, 这个函数的两个分支是以下面的方式连接起来: 设 $z=re^{i\theta}$, 如果我们令 $\zeta=\sqrt{r}e^{i\theta/2}=f(z)$, $\zeta=f(z)$ 一定在除去原点 (在这点 $f(z)$ 不再是可微的) 外的每一个

单连通区域 R 内解析，在这样的区域内，由前述可知，ζ 是唯一确定的. 但是，如果我们让点 z 沿以原点为中心的圆 K 按正向绕一周，$\zeta = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$ 将连续变化，但是角 θ 将不再回到原来的值，而是增加了 2π. 因此，在这个连续开拓中，当我们回到点 z 时，函数不再回到原来的值 $\zeta = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$, 而是 $\sqrt{r}e^{i\theta/2}e^{2\pi i/2} = -\zeta$. 我们说，当函数 $f(z)$ 在闭曲线 K 上被连续开拓时，它不是单值的.

函数 $\sqrt[n]{z}$ (n 是整数) 也有同样的性质. 这里，z 绕原点一周，函数值就乘以 n 次单位根，即 $\varepsilon = e^{2\pi i/n}$, 绕 n 周后，函数才回到它原来的值.

在函数 $\log z$ 的情形，我们看到 (第 941 页) 有类似的多值性，z 以正方向绕原点一周，$\log z$ 的值就增加 $2\pi i$.

还有，每当 z 绕一周，函数 z^α 就乘以 $e^{2\pi i\alpha}$.

我们发现，尽管一开始时这些函数在区域 R 内都是唯一确定的, 但当我们连续地 (作为解析函数) 开拓它们, 并经过某一闭曲线回到出发点时，所有这些函数就都是多值的了. 这种多值现象和与之相联系的解析开拓理论，在本书的范围内不能作详细的讨论，我们仅仅指出，是能够在理论上确保函数值的唯一性的，只要在 z 平面上划某一条线，使得 z 的路径不允许超过这条线，或者说沿某一条线作 **割痕**, 使得平面上的闭路径不再可能导致函数的多值性.

例如, 函数 $\log z$ 可由于沿负实轴割开 z 平面而单值. 对 $\sqrt{z}$ 同样也是如此. 如果沿实轴在 -1 和 $+1$ 之间作割痕，函数 $\sqrt{1-z^2}$ 就变成单值的了.

一旦用这种方法割开平面后, 柯西定理就能应用于这些函数. 我们给出下面的简单例子：证明公式

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{(x-k)\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2-1}}, \tag{27}$$

其中 k 是一个不介于实轴上 -1 和 $+1$ 之间的常数.

我们首先注意到函数

$$\frac{1}{(z-k)\sqrt{1-z^2}}$$

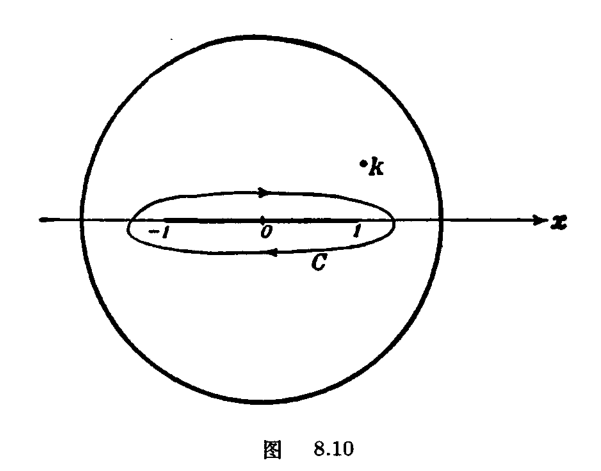


图 8.10

在 z 平面是单值的，只要沿实轴从 -1 到 $+1$ 作割痕，如果在 z 平面，我们先从上方然后从下方接近这条割痕 S，我们得到平方根 $\sqrt{1-z^2}$ 相等而反号的值，比如说，从上方是正的，从下方是负的. 现在沿图 8.10 所示的路径 C 取复积分

$$\int_C \frac{dz}{(z-k)\sqrt{1-z^2}}.$$

由柯西定理，我们可以使这条路径围绕割痕收缩，不改变积分值. 所以积分等于收缩后所得到的极限值. 这显然等于 $2I$. 另一方面，如果我们取同样的被积函数的积分，积分路径是以 R 为半径、以原点为中心的圆周 K，由前面的研究，这个积分当 R 增大时趋于零 [1). 但是，由留数定理，沿 C 和 K 的积分的和等于被积函数在 C,K 所范围的极点 $z=k$ 处的留数. 因此，$2I$ 等于这个留数. 这个留数是

$$2\pi i \lim_{z\to k}(z-k)\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{z-k}} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2-1}}.$$

公式得证.

解析开拓的例子:伽马函数.

最后，我们还要给出一个例子，表明如何将一个原来定义在平面一部分的解析函数开拓到原定义域之外去，我们要把对于 $x>0$,

---

1) 事实上，它的值是零，因为由柯西定理，它和 R 无关，只要这个圆包含极点 $z=k$.

由方程

$$\Gamma(z)=\int_{0}^{\infty} t^{z-1}e^{-t}dt \tag{28}$$

定义的伽马函数，解析地开拓到 $x \leq 0$ 去．这可借助于函数方程

$$\Gamma(z)=\frac{1}{z}\Gamma(z+1)$$

来实现，当 $\Gamma(z)$ 已知，就可用这个方程来定义 $\Gamma(z-1)$．利用这个方程，我们能够设想， $\Gamma(z)$ 首先被开拓到带域 $-1 < x \leq 0$，其次再被开拓到下一个带域 $-2 < x \leq -1$，如此等等．

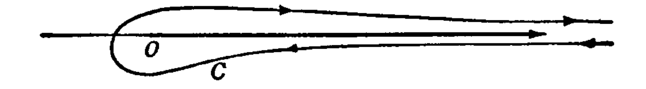


图 8.11　伽马函数的回路积分

对于伽马函数的开拓，我们也可采取更有理论兴趣的另一种方法．我们考虑 t 平面上如图 8.11 所示的路径 C，它环绕 t 平面的正实轴，并在两边渐近地接近这条轴．由柯西定理容易看出，回路积分 1)

$$\int_{C} t^{z-1}e^{-t}dt$$

的值，当回路收敛到 x 轴时是不变的．当 t 从上方和下方接近 x 轴时，被积函数趋于不同的值．它们相差一个因子 $e^{2\pi iz}$．

于是，对于 $x>0$，我们得到公式

$$(1-e^{2\pi iz})\Gamma(z)=\int_{C} t^{z-1}e^{-t}dt.$$

这个公式是在 z 的实部为正的假定下推导出来的．但是，现在我们看到这个回路积分对于一切复数 z 有意义，因为这个积分避开了原点 $t=0$．所以，这个回路积分代表一个定义在整个 z 平面上的函数．然后我们规定这个函数在整个 z 平面上等于 $(1-e^{2\pi iz})\Gamma(z)$．于

1) 这又是一个无穷积分．它是作为沿 C 的有穷部分的积分的极限．读者自己可以由前面使用过的类似方法证明这个极限是存在的．

是伽马函数解析开拓到了整个平面，除去 $x \leq 0$ 而使因子 $(1-e^{2\pi iz})$ 等于零的点，即除去 $z=0$, $z=-1$, $z=-2$, 等等.

更详细而广泛的研究，读者可以参考函数论的有关文献 [1].

练　　习

8.1 节

1. (a) 证明：复数取共轭的运算对于有理代数运算遵循分配律，例如

$$\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\overline{\beta}.$$

(b) 证明：如果 $f(z)$ 是实系数的幂级数所确定的函数，则

$$\overline{f(z)}=f(\overline{z}).$$

2. (a) 证明：对于实系数的多项式 $P(z)$, α 是它的根，当且仅当 α 的共轭复数是它的根.

(b) 证明：在上题假定下，如果 $P(\alpha)=0$, α 不是实的，$\alpha=a+ib$, $b\neq 0$, 则 $P(z)$ 有实的二次因子.

$$(z-\alpha)(z-\overline{\alpha})=z^2-2az+a^2+b^2.$$

3. (a) 证明：当 λ 是不等于 1 的实数，$|z-\alpha|=\lambda|z-\beta|$ 是圆的方程. 确定这个圆的中心 z_0 和半径 r. 如果 $\lambda=1$, 这个方程的轨迹是什么？

(b) 证明：一般线性变换

$$z'=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta},$$

其中 $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$, 把圆和直线变为圆和直线.

1) 例如，可参见 L.V. 阿尔福斯 (Ahlfors) 著的“复分析”.

4. 哪些点 $z=x+iy$ 满足条件

$$\left|\frac{z-1}{z+1}\right| \leq 1?$$

5. 证明：如果 $\sum a_n z^n$ 当 $z=\zeta$ 绝对 收敛，则这个级数在 $|z| \leq |\zeta|$ 一致收敛.

6. 利用 $\cos z$ 和 $\sin z$ 的幂级数，证明

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1.$$

7. 对于哪些 z 的值，级数

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^\nu}{1-z^\nu}$$

收敛？

8.2 节

1. 不用可微性的定义，而用柯西 - 黎曼方程证明：解析函数的积、商仍然是解析函数.

2. 证明：如果 $|f(z)|$ 在区域 R 内是常数，则 $f(z)$ 是常数.

3. 下列函数在何处连续？在何处可微？

$$\text{(a) } \overline{z}; \quad \text{(b) } |z|; \quad \text{(c) } \frac{z+\overline{z}}{1+|z|}; \quad \text{(d) } \frac{z^2+\overline{z}^2}{|z|^2}.$$

4. 证明：变换 $\zeta = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ 将 z 平面上的、以原点为中心的圆和过原点的直线分别变为 ζ 平面上的共焦椭圆和共焦双曲线.

5. 一般的线性变换

$$\zeta = \frac{az+b}{cz+d} \quad (ad-bc \neq 0),$$

可能有两个不动点 (就是使得 $\zeta = z$ 的值 z). 证明：如果变换有两个不动点，则过这两个不动点的圆族和与此圆族正交的圆族变为它

们自身 (为此，过这两个不动点的直线和这两个不动点连线的中垂线应分别作为族中的圆).

6. 叙述解析函数 $f(z)=1/z$ 在单位圆内的反演，并导出在本卷第一分册第 279 页 3.3d 节第 4 题中所述反演的基本性质.

7. 证明：形如

$$\zeta=\frac{\alpha z+\overline{\beta}}{\beta z+\overline{\alpha}}$$

的变换，其中 α,β 是满足关系

$$\alpha\overline{\alpha}-\beta\overline{\beta}=1$$

的任意复数，变单位圆周为它自身，圆的内部为它自身. 如果

$$\beta\overline{\beta}-\alpha\overline{\alpha}=1,$$

则圆的内部变为圆的外部.

8. 证明：任何一个圆可以通过形如 $\zeta=\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ 的变换变为由实轴所界的上半平面 (利用第 961 页上的第 4 题).

9. 证明：变换 $\zeta=\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$, 其中 $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$, 保持四点 z_1,z_2,z_3,z_4 的交比

$$\frac{(z_1-z_3)/(z_2-z_3)}{(z_1-z_4)/(z_2-z_4)}$$

不变.

8.3 节

1. 考虑 $\displaystyle\int\frac{2z-1}{z^2-1}dz$

(a) 分别沿以 1 和 -1 为中心的反时针方向的小圆，这个积分值是多少？

(b) 试描出同时环绕 1 和 -1 的一个闭路径，使积分为零.

2. 研究从实的到复的指数法则的推广：

$$a^s a^t=a^{s+t},\ s^a t^a=(st)^a,\ (a^s)^t=a^{st},$$

并讨论由定义 $z^\alpha = \exp[\alpha(\log z + 2n\pi i)]$ 中的多值性所引起的复杂性，这里 $\log z$ 是对数的主值.

3 (a) 证明 i^i 的一切值是实的.

(b) 要使 $z^\zeta (z \neq 0)$ 的一切值都是实数，关于复数 z 和 ζ 的一般条件是什么？

(c) 能否选取实数 x 和 ζ, 使得 x^ζ 的一切值是实的？

4. 伽马函数: 证明积分

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

是参变数 $z = x + iy, x > 0$ 的解析函数，其中 t^{z-1} 对积分变量 t 的一切实值取主值. 直接证明 $\Gamma(z)$ 能对 z 求微商. 证明复变数的伽马函数满足函数方程 $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

5. 黎曼采他函数: 取 n^z 的主值，作无穷级数

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^z} = \zeta(z) \qquad (z = x + iy).$$

证明这个级数当 $x > 1$ 时收敛，并表示一个可微函数 ($\zeta(z)$ 称为黎曼采他函数) 其证明可以采用类似于幂级数那样的方法 (见第一卷第 588 页).

6. (a) 应用柯西定理于积分

$$\int \left(z + \frac{1}{z}\right)^m z^{n-1} dz \qquad (n > m > 0),$$

积分路径是由下列曲线组成；第一象限内单位圆周 $|z| = 1$ 和以原点为中心的小圆周，以及轴上位于这两个圆弧之间的直线段. 由此推出

$$\int_0^{\pi/2} \cos^m \theta \cos n\theta d\theta = \frac{\sin\left[\frac{(n-m)\pi}{2}\right]}{2^{n+1}} \frac{\Gamma(m+1)\Gamma\left(\frac{n-m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}+1\right)}.$$

(b) 证明：如果 $n=m$, 后面这个积分值为 $\pi/2^{n+1}$. (复积分中的被积函数在正半实轴上取实数值).

8.4 节

1. 不直接利用幂级数的理论，而通过在柯西公式中积分号下逐次微商并验证其合理性，从而证明解析函数的微商是可微的.

2. 证明函数

$$f(z)-\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\frac{z^n}{\zeta^n}d\zeta$$

是 $(n-1)$ 次多项式 $g(z)$, 且

$$g^{(m)}(0)=f^{(m)}(0)\quad(m=0,1,2,\cdots,n-1),$$

其中积分是沿包含点 $\zeta=0$ 及 $\zeta=z$ 的简单围道.

3. 证明：只要区域是单连通的，则对于每个位势函数 u, 就能够构造一个共轭函数 v, 并且除去相差一个常数外， v 是唯一确定的.

4. 函数 $f(z)=(2z-1)/(z^2-1)$ 在它的极点的留数是多少？

5. 如果 $f(z)$ 在整个复平面是有界的， $|f(z)|<M$, 证明：当积分路径为充分大的圆时，积分

$$f(z)-f(0)=\frac{1}{2\pi i}\int f(\zeta)\Big[\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta}\Big]d\zeta$$

可以任意地小，因此， $f(z)=f(0)$, 即 $f(z)$ 是常数.

6. 设 $f(z)$ 在 $|z|\le\rho$ 解析，如果 M 是 $|f(z)|$ 在圆 $|z|=\rho$ 上的最大值. 则 $f(z)$ 的幂级数

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu z^\nu$$

的系数满足不等式

$$|a_\nu|\le\frac{M}{\rho^\nu}.$$

注意：第 5 题的结论也可以从这个结果推出.

7. 设 $P(z)=\alpha_n z^n+\alpha_{n-1}z^{n-1}+\cdots+\alpha_0$ 是正 n 次多项式. 证明： $P(z)$ 没有根蕴涵 $f(z)=1/P(z)$ 是有界的，因此是常数. 于是由第 5 题和第 6 题， $f(z)$ 恒等于零. 这就证明了 **代数基本定理**: 每个正次的复系数的多项式至少有一个复根.

8. 设：可能除去有限个点外， $f(z)$ 在简单闭曲线 C 内，以及在 C 上解析，考虑沿 C 的正向的积分

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

(a) 证明：如果 f 在 α 有 n 阶零点，在 C 内和 C 上没有其他的极点和零点，则 $I=n$.

(b) 证明：如果 f 在 α 有 m 阶极点，在 C 内或 C 上没有任何别的极点或零点，则 $I=-m$.

(c) 证明：如果在 C 内有有限多个零点和极点，在 C 上没有零点和极点，则 I 等于零点数减去极点数. 零点和极点按重数计算，即如果零点的重数是 $n_1,n_2,\cdots,n_j$, 极点的重数是 $m_1,m_2,\cdots,m_k$, 则

$$I=n_1+n_2+\cdots+n_j-m_1-m_2-\cdots-m_k.$$

9. (a) 两个多项式 $P(z)$ 和 $Q(z)$, 在闭围道 C 上的每一点有

$$|Q(z)|<|P(z)|.$$

证明：方程 $P(z)=0$ 和 $P(z)+Q(z)=0$ 在 C 内有相同数目的根. （考虑函数族 $P(z)+\theta Q(z)$, 其中参数 θ 从 0 变到 1).

(b) 证明：如果 $|a|<r^4-\dfrac{1}{r}$, 则方程

$$z^5+az+1=0$$

的一切根位于圆 $|z|=r$ 内.

10. 利用第 8 题 (b), 证明 n 次多项式 $P(z)$ 按重数计算有 n 个根.

11. (a) 如果 $f(z)$ 在 C 内只有一个简单根 α, 证明这个根

$$\alpha = \frac{1}{2\pi i}\int_C z\frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

(b) 当 $f(z)$ 在 C 内有有限多个零点和极点，而在 C 上没有零点和极点时，说明 (a) 中积分的意义.

12. 证明：对于任意 z, e^z 恒不为零.

8.5 节

1. (a) 设 $f(z)$ 解析， $g(z)$ 有 n 阶极点 $z=\alpha$, 求 $f(z)g(z)$ 在 $z=\alpha$ 的留数.

(b) 特别地，如果 $g(z)=(z-\alpha)^{-n}$, 证明：留数等于

$$\frac{2\pi i}{(n-1)!}f^{(n-1)}(\alpha).$$

2. 如果 α 是 $f(z)$ 的二阶零点，证明 $1/f(z)$ 在 α 的留数等于

$$-\frac{4\pi i}{3}\frac{f'''(\alpha)}{f''(\alpha)^2}.$$

3. 对于非负整数 $n, m, n>m$, 求下列积分:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx$;

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+x^4)^2}dx$;

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx$.

4. 设 $f(z)$ 是以 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为简单根的 n 次多项式，证明

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\alpha_\nu^k}{f'(\alpha_\nu)}=0 \quad (k=0,1,2,\cdots,n-2).$$

$\left(\text{考虑沿环绕一切 } a_\nu \text{ 的闭曲线的积分} \displaystyle\int\frac{z^k}{f(z)dz}.\right)$

5. 推导 (24d) 的结果，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + c^2} dx = \frac{1}{2}\pi e^{-|c|}.$$

杂题

1. 写出三点 z_1, z_2, z_3 位于一条直线上的条件.

2. 证明：复平面上三个不同点 α, β, γ 能作成以 γ 为顶点的等腰三角形，当且仅当，存在一正实数 k, 使得

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \frac{\gamma - \alpha}{\alpha - \beta} = k.$$

3. 写出四点 z_1, z_2, z_3, z_4 位于一个圆周上的条件.

4. 设 A, B, C, D 是 z 平面上依次位于圆周上的四个点，其坐标为 z_1, z_2, z_3, z_4, 利用这些复坐标, 证明 $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$.

5. 证明：对一切 c 的值，方程 $\cos z = c$ 有解.

6. 对于哪些 c 的值，方程 $\tan z = c$ 无解？

7. 对于哪些 z 的值 (a) $\cos z$, (b) $\sin z$ 是实的？

8. 求幂级数 $\sum a_n z^n$ 的收敛半径，其中

(a) $a_n = \dfrac{1}{n^s}$, s 是实部为正的复数,

(b) $a_n = n^n$,

(c) $a_n = \log n$.

9. 用复积分计算以下积分：

(a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1 + x^4} dx$;

(b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2 \cos x}{1 + x^4} dx$;

(c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{q^2 + x^2} dx (q \neq 0)$;

(d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha - 1}}{(x + 1)(x + 2)} dx, 1 < \alpha < 2$.

10. 求函数

$$\frac{1}{\sin z}, \frac{1}{\cos z}, \ \Gamma(z), \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

的极点及其留数.

11. 证明：如果 x, y 是实数，则

$$|\sinh (x+iy)| \geq A(x),$$

其中 $A(x)$ 与 y 无关，且当 $x \to \pm\infty$ 时，趋于 ∞.

沿适当的围道序列求 $\dfrac{1}{(z-w)\sinh z}$ 的积分，从而证明

$$\frac{1}{\sinh w} = \frac{1}{w} + 2w\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{w^2+\pi^2 n^2}.$$

12. 求出当 $n \to \infty$ 时，积分

$$\int_{C_n}\frac{\cot \pi t}{t-z}dt$$

的极限值，其中积分路径是正方形 C_n，它的边平行于坐标轴，且与原点的距离等于 $n \pm \dfrac{1}{2}$. 利用留数定理，从而得到 $\cot \pi z$ 的部分分式表达式.

13. 利用方程

$$\log(1+z) = \int_0^z \frac{dt}{1+t},$$

证明： $\log(1+z)$ 的幂级数在单位圆 $|z|=1$ 上除去点 $z=-1$ 外处处收敛. 由幂级数的虚部等于 $\log(1+e^{i\theta})$ 的虚部，得到傅里叶级数

$$\frac{1}{2}\theta = \sin\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta + \frac{1}{3}\sin 3\theta - \cdots \quad (-\pi < \theta < \pi).$$

(见第一卷第 667 页)

14. 证明：如果 f 是解析的，则 $\dfrac{d^u}{dx^n}f\left(\sqrt{x}\right)$ 等于表达式

$$2\frac{\partial^n}{\partial y^n}\frac{yf(y)}{(y+a)^{n+1}}$$

中令 y 和 a 等于 $\sqrt{x}$ 时的值.

15. (a) 证明级数

$$f(z)=f(x+iy)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu^{z}}$$

当 $x>0$ 收敛.

(b) 借助于对于 $x>1$ 成立的公式

$$f(z)=(1-2^{1-z})\zeta(z),$$

证明：表示 $f(z)$ 的级数给出采他函数 (其定义见第 963 页上的第 5 题) 到带形 $0<x\leq 1$ 的开拓.

(c) 证明：采他函数在 $z=1$ 有一极点，其留数为 1.

解　答

第 四 章

练　习　4.1

1. 在第 n 次分划中，任何一个包含 S 的点的正方形必包含 T 的点，$A_n^+(S) \le A_n^+(T)$, 当 $n \to \infty$ 取极限，我们得到结果.

2. 在第 n 次分划中，任何一个包含 $T - S$ 的点的正方形不可能是整个由 S 中的点组成, 而两类正方形都包含 T 中的点；所以,

$$A_n^+(T) \ge A_n^+(T - S) + A_n^-(S).$$

类似地

$$A_n^+(T) \le A_n^-(T - S) + A_n^+(S).$$

综合这些结果，由于 $A_n^-(T - S) \le A_n^+(T - S)$, 我们发现

$$\begin{aligned} A_n^+(T) - A_n^+(S) &\le A_n^-(T - S) \\ &\le A_n^+(T - S) \\ &\le A_n^+(T) - A_n^-(S), \end{aligned}$$

从此，通过 $n \to \infty$ 取极限即得结果.

3. 为了证明 (a), 注意任何一个参加 $A_n^+(S)$ 或 $A_n^+(T)$ 的第 n 次分划的正方形，可以只参加其中一个或两个都参加；如果正方形只参加一个，它就参加到 $A_n^+(S \cup T)$; 如果它两个都参加，就参加

到 $A_n^+(S\cup T)$; 但不需要参加到 $A_n^+(S\cap T)$, 因为正方形可以既包含 S 中的点又包含 T 中的点而不包含这两者的公共点，因此

$$A_n^+(S\cup T)+A_n^+(S\cap T)\le A_n^+(S)+A_n^+(T),$$

从此， (a) 成立.

对于 (b) 我们注意任何一个这样的正方形，它参加到一个和式而不参加另外一个，比如说，参加 $A_n^-(S)$ 而不参加 $A_n^-(T)$, 将参加 $A_n^-(S\cup T)$ 而不参加 $A_n^-(S\cap T)$, 而任何一个既参加 $A_n^-(S)$ 又参加 $A_n^-(T)$ 的正方形也既参加 $A_n^-(S\cap T)$ 又参加 $A_n^-(S\cup T)$. 于是

$$A_n^-(S)+A_n^-(T)\le A_n^-(S\cap T)+A_n^-(S\cup T),$$

从此， (b) 成立.

注意，由 $S\cup T$ 中的点组成的正方形，不需要全部由 S 中的点组成或全部由 T 中的点组成，因此，不等号不能去掉.

4. 在第 n 次分划中，考虑任一个完全由 $S\cup T$ 的点组成的正方形. 如果它包含 S 的任何一个点，则正方形参加 $A_n^+(S)$, 但不能参加 $A_n^-(T)$, 因为它不能全部由 T 中的点组成. 如果正方形不包含 S 的点，则它必须全部地由 T 中的点组成，因此它参加 $A_n^-(T)$. 最后我们注意任何一个参加 $A_n^+(S)$ 而不整个地落在 $S\cup T$ 中的正方形必须包含 $S\cup T$ 的一个边界点，因而参加 $A_n^+(\partial[S\cup T])$. 综合这些结果，我们发现

$$A_n^-(S\cup T)\le A_n^+(S)+A_n^-(T)\le A_n^-(S\cup T)+A_n^+(\partial[S\cup T]).$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n^-(S\cup T)=A(S\cup T)$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n^+(\partial[S\cup T])=0$, 从而推得所需要的结果.

5. (a) 设 Jordan 容度在原坐标系中用 A 表示，而在变换了的坐标系中用 B 表示. 因为 $A(\partial S)=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}A_n^+(\partial S)=0$. 设 p 是 ∂S 中的任何一个点，注意在第 n 次分划中，在包含 p 的正方形中任何一个点到 p 的最大距离是 $2^{-n}\sqrt{2}$. 现在，在第 n 次分划中相对于

新的坐标系，设 R_B 是任何一个包含 p 的正方形，用 R_B 中心，5 个分划正方形在一边形成的一个大的正方形 R_B^*. 从 R_B 的任何一个点到 R_B^* 边界的最短距离是 $2\cdot 2^{-n}$. 于是 R_B^* 包含每个这样的正方形 R_A, 它们在相对于原来坐标系统的分划中包含 p. 我们得出结论，对于每一个参加到 $A_n^*(\partial S)$ 的正方形不超过 25 个参加 $B_n^+(\partial S)$ 的正方形，因为 $0 \le B_n^+(\partial S) \le A_n^+(\partial S)$, 由此推出

$$\lim_{n\to\infty} B_n^+(\partial S) = 0.$$

(b) 观察到在两个坐标系中的第 n 次分划，任何一个参加到 $A_n^-(S)$ 的正方形为参加 $B_n^+(S)$ 的正方形所覆盖. 由此推出 $A_n^-(S) \le B_n^+(S)$, 并且通过 $n\to\infty$ 取极限，$A(S) \le B(S)$. 通过平行的论证得到 $B(S) \le A(S)$. 因此，$A(S) = B(S)$.

上述的论证中默用了这样一个假设，如果两个集合 U 和 V 是由各自网格的不相重迭的全等的正方形组成并且 $U \subset V$, 则在 U 中的正方形数小于或等于 V 中的正方形数，用数学归纳法证明如下，设 u 和 v 是两个从各自的网格中取出的不相重迭的边长为 a 的正方形的集合，使得 u 的正方形的并集 U 包含在 v 的正方形的并集 v 内，如果 p 是 u 的正方形的个数，而 q 是 v 的正方形的个数，则 $p \le q$, 等号当且仅当 $u = v$ 时成立. 为了证明，我们对 p 用数学归纳法.

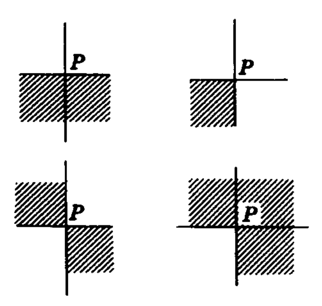
若 $p = 1$, 我们不能有 $q < p$, 因为，那时 $q = 0$ 从而 V 不能包含 U, 此外，如果 $q = p = 1$, 我们注意 u 的正方形的相对的顶点一定是 v 的正方形的相对的顶点，因为在每一个正方形内，任何两点的最大距离 $a\sqrt{2}$ 只能在相对的顶点上达到. 因此两正方形是重合的而且 $u = v$.

现在我们证明, 假定结论对 p 正确便能推出假定对 $p+1$ 正确: 设 u 是 $p+1$ 个正方形的集合而且设 u^* 是 p 个正方形的任一个子集合. 假设 $q < p+1$, 因为按照数学归纳法假设 $V \supset U \supset U^*, q \ge p$. 然而，$p \le q < p+1$ 蕴涵着 $q = p$ 因而由数学归纳法假设，$v = u^*$. 但是，由此 V 不能包含不属于 u^* 的 u 的正方形，这与 $V \supset U$ 矛

盾. 我们得出结论 $q \geq p+1$. 如果等式成立, $q=p+1$, 现在我们证明 $v=u$, 我们将指出集合 $U(=V)$ 在边界上应有一个角点, 这也就是, 至少有一个 u 的正方形 R 必须有这样的顶点, 它所在的两邻边在 U 的边界上. 如我们将要证明的, 这正方形 R 也必须属于 v. 按照归纳法假设, 从 u 和 v 通过删去 R 而得到的 u^*, v^* 应当是一样的, 因此 $u=v$.

为了证明 U 有一角点, 设 p 是 U 的任意一个到任意给定点 Q 有最大距离的点. 这个点 p 一定落在 U 的边界上, 否则它应该是一个内点, 因而在它的在 U 内的邻域中包含到 θ 更远的点, 而且 p 一定是 u 中的一个正方形的一个顶点, 因为, 如果它是边上的内点, 那么该边上的两顶点中至少有一个到 Q 的距离比 p 更远, 因为, 若从 Q 引出一条垂直于这边所在直线的垂线, 则到这条直线的距离它比 p 远些. 相交于 p 点的两条直线不可能成为一直线, 因为同样的论证证明了组成这两条边的线段端点之一到 Q 的距离一定比到 p 的距离远些, 故 p 和它的所在邻边可以只属于 u 的一个正方形 R(如下图形指出了, 在边界顶点邻域内的所有可能的图形). 完全一样的论证用到 v, 但是如所要求的 R 必须属于 v.

6. 如果 p 是 S 的边界点, 则它或是 S 的点而且受覆盖或是 S 的极限点使得每一个 p 的去掉 p 点的邻域包含无限多 S 的点, 于是 p 是 S 中互异点的收敛序列的极限. 因为覆盖集合是有限的, 至少其中有一个集合必须包含一个子序列, 而且因为这个集合是闭的, 它一定包含这个子序列的极限, p.



7. 集合面积是 0. 设 S_n 是这样一些点的集合，对这些点，p 和 q 都比 n 大，而 T_k 是这样一些点的集合，对这些点不是 p 就是 q 等于 k.

$$S = S_n \cup T_1 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_n.$$

注意 S_n 包含在正方形

$$\left\{(x,y)|0 \leq x < \frac{1}{n}, 0 \leq y < \frac{1}{n}\right\}.$$

因此，

$$A_n^+(S^n) \leq \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2^n}\right)^2.$$

还注意到 T_k 包含 $2k-1$ 个点，其中的每一个点可以落在第 n 次分划中的不多于 4 个的正方形. 因此，

$$A_n^+(T_k) \leq \frac{4(2k-1)}{2^{2n}}.$$

综合之，我们看到

$$\begin{aligned} A_n^+(S) &\leq A_n^+(S_n) + \sum_{k=1}^{n} A_n^+(T_k) \\ &\leq \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2^n}\right)^2 + \frac{4n^2}{2^{2n}}; \end{aligned}$$

因此，

$$\lim_{n\to\infty} A_n^+(S) = 0.$$

练　习　4.6

1. (a) $a^2b^2(a^2-b^2)/8$.

   (b) -4.

   (c) $\log 2$.

   (d) $-a + (e^{ab}-1)/b$.

   (e) $\pi/16$.

(f) 4/3.

2. $\pi/2$.

3. 0.

4. 2π.

5. 用极坐标:

(a) $\displaystyle\int_{-4/\pi}^{\pi/4}\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}}\frac{r}{(1+r^2)^2}drd\theta=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$.

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/3}\int_0^{\sqrt{3}/\cos(\theta-\pi/6)}\frac{r}{(1+r^2)^2}drd\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\frac{1}{2}$.

6. 用代换 $x=a\xi, y=b\eta, z=c\zeta$; 然后用极坐标和对称性得到

$$8a^2b^2c^2\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^1\rho^5\cos\phi\sin\phi\sin^3\theta\cos\theta d\rho d\varphi d\theta=\frac{a^2b^2c^2}{6}.$$

7. 用图形是对称的这样一个事实; 体积的 1/16 落在以 (0,0),(1,0),(1
为顶点的三角形的上方以及曲面 $x^2+z^2=1$ 的下方; 16/3.

8. $\pi(2r^3-3r^2h+h^3)$.

9. 0.

10. 0, 在附加限制 $z\geq 0$ 之下; $\pi/8$.

11. 1/50400.

12. 用柱坐标和按顺序对 θ, r, z 积分. $\pi[\alpha-(3/2)\log 3]$.

13. 用球坐标, 取原点在 $\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$. 具有 $\alpha=\cos^{-1}[\rho-(3/4\rho)]$.
当 $\frac{1}{2}\leq\rho\leq 3/2$.

$$\int_{1/2}^{3/2}\int_0^{\alpha}\int_0^{2\pi}+\int_0^{1/2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin\theta d\varphi d\theta d\rho$$

$$=\pi\left\{\alpha+\frac{3}{2}\log 3\right\}.$$

14. 用极坐标: $4\log(1+\sqrt{2})$.

15. 设 (a,b) 是定义域中任意一个点, 并取 (a,b) 在 D 内部的一个 δ 邻域 R_δ 足够小, 以致于 $|f(x,y)-f(a,b)|<\varepsilon$ 在此邻域内

成立. 根据中值定理

$$\int_{R_\delta} f(x,y)dxdy = \mu\delta^2.$$

其中 $|\mu - f(a,b)| < \varepsilon$. 因为这个积分是 0, 所以 $\mu = 0$. 因此, $|f(a,b)| < \varepsilon$ 对于任意正数 ε 成立, 而因此, $f(a,b) = 0$.

16. 用 $d(x,y)/d(u,v) = u/(1+v^2)$, 我们得到

$$\iint\limits_R e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^\infty \int_{-u/a}^{u/a} \frac{e^{-(u^2+v^2)}u}{1+v^2}dvdu$$
$$= 2e^{-a^2}\int_0^\infty ue^{-u^2}\arctan\frac{u}{a}du,$$

再通过分部积分得到结果.

17. 设 $\rho^2 = \xi^2+\eta^2$. 从 $\xi_x = \eta^2-\xi^2, \xi_y = -2\xi\eta, \eta_x = -2\xi\eta, \eta_y = \xi^2-\eta^2$, 由此推出 $|d(x,y)/d(\xi,\eta)| = 1/\rho^4$ 而且还有 $u_x^2+u_y^2 = \rho^4(u_\xi^2+u_\eta^2)$.

18. 对于同一尺度的新笛卡尔坐标, 变换的雅可比是 1, 由于 $r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$, 选笛卡尔坐标 u, v, w, 对此 $u = (xz+y\eta+z\zeta)/r$ 这样积分成为在球 $u^2+v^2+w^2 \leq 1$ 上的积分

$$I = \iiint \cos ru du dv dw$$

在柱坐标 $u, v = \rho\cos\theta, w = \rho\sin\theta$ 下, 我们发现

$$I = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{1-u^2}} \rho\cos ru d\rho d\theta du = 4\pi\left(\frac{\sin r}{r^3} - \frac{\cos r}{r^2}\right).$$

19. $-\int_1^2 (4-y)\int_{4/y}^{(20-8y)/(4-y)} dxdy = 16\log 2 - 12.$

练 习 4.7

1. (a) $K = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_0^\beta \int_\varepsilon^a r\log r^2 drd\theta.$

(b) $K = \left(\int_0^{a\cos\beta}\int_0^{x\tan\beta} + \int_{a\cos\beta}^{a}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\right)\log(x^2+y^2)dydx.$

2. (a) π. $(b)\pi^2$.

3. 对称性表明积分顺序的颠倒改变符号. 因为 I 不是 $0, I = \frac{1}{2}$, 结果成立. 另一方面 $0 < a, b \leq 1$, 设

$$J = \int_b^1 \int_a^1 \frac{y-x}{(x+y)^3}dxdy = \frac{(1-a)(1-b)(b-a)}{2(1+a)(1+b)(a+b)}.$$

先对 x 后对 y 的积分等价于取

$$I = \lim_{b\to 0}\lim_{a\to 0} J = \frac{1}{2};$$

先对 y 后对 x 的积分等价于取

$$\lim_{a\to 0}\lim_{b\to 0} J = -\frac{1}{2}.$$

练　习　4.8

1. 应用古鲁金定律;　$2\pi^2 ab$.

2. $\frac{1}{2}\pi abh^2$.

3. 令 $x = a\xi, y = b\eta, z = c\zeta$. 设

$$d = p/\sqrt{a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2},$$

则体积是 $\pi abc(2 - 3d + d^3)/3$.

4. (a) 以 θ 和 ϕ 为两曲面的参数,　$\sqrt{EG - F^2} = a^2\sin\theta$.

(b) $a^2\int_0^{2\pi}\int_0^{f(\phi)} a^2\sin\theta d\phi d\theta = a^2\int_0^{2\pi}\{1 - \cos f(\phi)\}d\phi$.

(c) 取 $f(\phi) = \pi/4; \pi a^2(2 - \sqrt{2})$.

5. 设 a, b, c 分别是 A, B, C 的对边的长度而且 p 是从 C 引出的高, 应用古鲁金定律,

(a) $\frac{1}{3}\pi cp^2$,

(b) $\pi p(a+b)$.

6. $\frac{1}{3}\pi(n-m)(4n^2+4mn+4m^2-6n-6m+3)$.

7. 在 x,y 平面上取极坐标作为柱面 $x^2+z^2=a^2$ 的曲面参数, 于是 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=\sqrt{a^2-r^2}$ 而且 $E=a^2/(a^2-r^2), F=0, G=r^2$. 则曲面的面积为

$$\begin{aligned}S=&8\int_0^{\pi/4}\int_0^{b\sec\theta}\frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}}drd\theta=-8a\int_0^{\pi/4}\sqrt{a^2-r^2}\Big|_0^{b\sec\theta}d\theta\\=&2a^2\pi-8aI,\end{aligned}$$

其中

$$I=\int_0^{\pi/4}\sqrt{a^2-b^2\sec^2\theta}d\theta.$$

令 $\theta=\arctan(\sqrt{(a^2-b^2)/b^2}\sin\omega)$ 得到

$$I=\int_0^{\lambda}\frac{(a^2-b^2)\cos^2\omega}{a^2\sin^2\omega+b^2\cos^2\omega}d\omega,$$

其中 $\tan\lambda=b/\sqrt{a^2-2b^2}$, 显式积分是

$$I=a\ \arctan\left(\frac{a}{b}\tan\ \omega\right)-b\omega\Big|_0^{\lambda}.$$

所以

$$S=8a^2\left[\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{a}{\sqrt{a^2-2b^2}}\right]-8ab\arctan\frac{b}{\sqrt{a^2-2b^2}}.$$

8.

$$\begin{aligned}\Sigma=&\iint\sqrt{EG-F^2}drd\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\theta\int_0^{f'(\theta)}\sqrt{r^2+f'^2}dr\\=&[\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})]\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{1}{2}f'^2d\theta\end{aligned}$$

(参看卷一, 3.2,d), 它是投影面积

$$\theta_1\le\theta\le\theta_2, 0\le r\le f'(\theta)$$

的 $[\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})]$ 倍.

练　习　4.9

1. (a) 用柱坐标. 在圆锥的轴线上，从顶点到底面路径的 3/4.

   (b) 在圆锥的轴线上，从顶点到底面路径的 2/3.

2.$x = 2x_0/3$, 而 $y = z = 0$.

3. 设 (ξ, η, ζ) 是形心:

$$\xi = \frac{1}{V}\int_0^a \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} \int_0^{c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})} xdzdydx.$$

其中 V 是在上述三重积分中用 1 代替被积函数 x 而得到的四面体体积. 积分得到 $\xi = a^2bc/24V$, 其中 $V = abc/b$, 因此，根据代数对称性，$\xi = a/4, \eta = b/4, \zeta = c/4$.

4. (a) 用球坐标 $z = 3(b^4 - a^4)/8(b^3 - a^3), x = y = 0$.

   (b) 在 (a) 分题的解答中，从分子和分母中约去因子 $b - a$ 并取极限.

5. $m(b^2 + c^2)/3$.

6. 如果 μ 是密度,

   (a) $\pi \cdot \mu h(R^2 - R'^2)$.

   (b) $2\pi\mu h(R - R')\left[\frac{1}{4}(R + R') + \frac{1}{3}h^2\right]$.

7. 应用球坐标、质量，$\frac{1}{3}\pi a^3[\mu_0 + 3\mu_1]$, 惯性矩，$4\pi a^5[\mu_0 + 5\mu_1]/45$.

8. 作代换 $x = a\xi, y = b\eta, z = c\zeta$; 用在正文中给出的惯性矩表示式和椭球的对称性:

   (a) $\frac{4}{15}\pi abc(a^2 + b^2)$,

   (b) $\frac{4}{15}\pi abc\{(1 - \alpha^2)a^2 + (1 - \beta^2)b^2 + (1 - \gamma^2)c^2\}$.

9. 例如，在 $A = \int_R (y^2 + z^2)dV, B = \int_R (z^2 + x^2)dV$ 和 $C = \int_R (x^2 + y^2)dV$ 的情况下,

$$A + B = \int_R (x^2 + y^2 + 2z^2)dV = C + \int_R 2z^2dV > C.$$

10. 设 (ξ,η,ζ) 是射线上的一个点，它到 0 点的距离为 $1/\sqrt{I}$. 点 (x,y,z) 到直线的距离平方是

$$x^2+y^2+z^2-(\xi x+\eta y+\zeta z)^2/(\xi^2+\eta^2+\zeta^2).$$

因此,

$$I=\iiint\limits_R\left[x^2+y^2+z^2-\frac{(\xi x+\eta y+\zeta z)^2}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\right]dxdydz$$
$$=\frac{1}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}.$$

用 $\xi^2+\eta^2+\zeta^2$ 乘方程的两边，我们得到一个 (ξ,η,ζ) 的正定二次型；因此，这个方程是椭球的方程.

11.

$$a^2(x-\xi)^2+b^2(y-\eta)^2+c^2(z-\zeta)^2$$
$$=\{a^2+b^2+c^2+5(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\}$$
$$\times\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\}.$$

12. $\left(\frac{1}{3},0,0\right)$.

13. $x=\dfrac{5a(2a^2+b^2+c^2)}{16(a^2+b^2+c^2)}$.

14. $I=(I_1+m_1r_1^2)+(I_2+m_2r_2^2)$, 其中 r_1 和 r_2 是过两部分各自的质心的轴到过质点组质心的轴之间的距离. 用 $m_1r_1=m_2r_2$ 和 $r_1+r_2=d$.

15. 点 (x,y,z) 与平面 $ux+vy+wz=-1$ 的距离由下式

$$\frac{ux+vy+wz+1}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}$$

给出. 因此，椭球相对这个平面的惯性矩由下式

$$\frac{Au^2+Bv^2+Cw^2+V}{u^2+v^2+w^2}$$

给出. 其中 A, B, C 表示相对于坐标平面的惯性矩而 V 是椭球的体积, 即 $B = 4ab^3c/15, C = 4abc^3/15$ 和 $V = 4abc/3$. 现在我们必须求这些平面的包络, 这个表达式等于 h. 包络由下列方程给出 $(A-h)u = \lambda x, (B-h)v = \lambda y, (C-h)w = \lambda z$, 其中 λ 表示一个公共乘子, 根据惯性矩的表示式和平面的方程发现 $\lambda = V$, 通过平方这三个方程我们得到包络方程, 也就是

$$\frac{x^2}{h-A} + \frac{y^2}{h-B} + \frac{z^2}{h-C} = \frac{1}{V}.$$

16.

$$\frac{2\pi a^2 b\mu}{\sqrt{b^2-a^2}} \log\left\{\frac{1}{a}(b+\sqrt{b^2-a^2})\right\},$$

其中 μ 是常数密度.

17. $2\pi\mu\int_a^b \sqrt{z^2+\{f(z)\}^2}dz - \pi\mu|b^2 \pm a^2|$, 这里, 若原点在物体内部, 则取 "−" 号, 否则取 "+" 号.

18. 设 $\mathbf{X}$ 是物体中的一个变点, $\mathbf{O}$ 是物体的质心, 而 $\mathbf{Y}$ 是要计算其位势的空间的变点, 则在 $\mathbf{Y}$ 的位势是

$$U(\mathbf{Y}) = \iiint_S \frac{\mu dV}{|\mathbf{Y}-\mathbf{X}|}.$$

设 $\mathbf{a}$ 是 $|\mathbf{X}|$ 在 S 中的最大值, 则 $|\mathbf{X}| \le a$ 并假设 $|\mathbf{Y}| > a$, 则, 如果 M 是物体的质量, 便有

$$\begin{aligned}\left|U(\mathbf{Y}) - \frac{M}{|\mathbf{Y}|}\right| &= \left|\iiint_S \mu\left(\frac{1}{|\mathbf{Y}-\mathbf{X}|} - \frac{1}{|\mathbf{Y}|}\right)dV\right| \\ &\le \iiint \mu\left|\frac{1}{|\mathbf{Y}-\mathbf{X}|} - \frac{1}{|\mathbf{Y}|}\right|dV \\ &\le \iiint \mu\frac{\mathbf{X}}{|\mathbf{Y}|(|\mathbf{Y}|-|\mathbf{X}|)}dV\end{aligned}$$

(因为根据三角不等式 $||\mathbf{Y}| - |\mathbf{Y}-\mathbf{X}|| \le |\mathbf{X}|$)

$$\le \iiint \mu \frac{a}{|\mathbf{Y}|(|\mathbf{Y}|-a)} dV$$
$$\le \frac{2a}{|\mathbf{Y}|^2} \iiint \mu dV$$

(这里我们假定 $|\mathbf{Y}| \ge 2a$)

$$\le \frac{2aM}{|\mathbf{Y}|^2}.$$

19. 因为 $A - BR^2 = \frac{5}{2}, A - \frac{3}{5}BR^2 = \frac{11}{2}$, 我们有 $A = 10, B = \frac{15/2}{R^2}$. 在内点处的引力等于将半径为 r 的球内的点的总质量集中于球中心所产生的引力.

20. 应用柱或球坐标.

21. 通过平移我们可以保证三角形落在上半平面，因此它的惯性矩等于

$$\phi(x_1y_1, x_2y_2) + \phi(x_2y_2, x_3y_3) + \phi(x_3y_3, x_1y_1),$$

其中 $\phi(x_1y_1, x_2y_2)$ 表示顶点为 $(x_1, 0), (x_1, y_1), (x_2, 0)$ 的四边形的惯性矩乘以 $(x_1 - x_2)$ 的符号，然后证明

$$\phi(x_1y_1, x_2y_2) = \frac{1}{12}(x_1 - x_2)(y_1^3 + y_1^2y_2 + y_1y_2^2 + y_2^3).$$

22. $I = \int_1^2 (y-4)dy \int_{(8y-20)/(y-4)}^{4/y} dx = 12 - 16\log 2.$

23. 设 $f(\rho)$ 是与单位点电荷相应的电位，在中心位于原点并具有单位电荷密度的薄球壳内的一点 $(0,0,z)$ 处的电位是

$$U(z) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\rho) a^2 \sin\theta d\theta d\varphi,$$

其中，在被积函数中，若 a 是球的半径，则 ρ 由

$$\rho = \sqrt{a^2 + z^2 - 2az\cos\theta}$$

给定，如果 g 是这样一个函数，使得 $g'(\rho)=\rho f(\rho)/z$ 这里 z 保持常数，则

$$U(z)=2\pi a g(\rho)\Big|_{\theta=0}^{\pi}=2\pi a[g(a+z)-g(a-z)].$$

因为对于 $|z|<a$ 力为 0, 我们得到

$$U'(z)=2\pi a[g'(a+z)+g'(a-z)]=0,$$

因此，

$$(a+z)f(a+z)=(a-z)f(a-z).$$

这是一个对一切正数 a 和具有 $|z|<a$ 的 z 都成立的关系，引进新的自变量 $\xi,\eta,\xi=a+z,\eta=a-z$. 我们得到

$$\xi f(\xi)=\eta f(\eta)$$

对一切正数 ξ,η 成立，因此 $\rho f(\rho)=C$, 其中 C 是常数，因此，我们得到

$$f(\rho)=\frac{C}{\rho}\quad (C=\text{常数}),$$

这就是逆平方引力定律的电位.

练　习　4.11

1. 作替换 $x_1=a_1\xi_1,\cdots,x_n=a_n\xi_n$: $\dfrac{\sqrt{\pi^n}}{\Gamma\left(\dfrac{n+2}{2}\right)}a_1a_2\cdots a_n$.

2. $I=\displaystyle\int\cdots\int\frac{f(x_1)+f(-x_1)}{\sqrt{1-x_2^2-\cdots-x_n^2}}dx_2\cdots dx_n$, 积分区域取在 $x_2\cdots x_n$ 空间中的 $n-1$ 维单位球的内部，引进极坐标我们得到

$$I=\int_0^1 dr\int_{S(r)}\frac{f(\sqrt{1-r^2})+f(-\sqrt{1-r^2})}{\sqrt{1-r^2}}\sigma,$$

其中 $S(r)$ 表示在 $x_2\cdots x_n$ 空间中，中心为 0, 半径为 r 的球. 由于积分只与 r 有关，

$$I=\omega_{n-1}\int_0^1\frac{f(\sqrt{1-r^2})+f(-\sqrt{1-r^2})}{\sqrt{1-r^2}}-r^{n-2}dr.$$

令 $y=\sqrt{1-r^2}$, 我们有

$$I=\omega_{n-1}\int_{-1}^{+1}f(y)(1-y^2)^{(n-3)/2}dy.$$

3. $a_1a_2\cdots a_n/n!$.

练　习　4.12

1. 令 $I_n(a)=\int_0^\infty x^n e^{-ax^2}dx$; 则 $I_n(a)=-I''_{n-2}(a)$, 这里撇 " ′ " 表示对 a 微商, 另外通过分部积分.

当 n 为奇数时, $\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{2}\right)!$;

当 n 为偶数时, $\sqrt{\pi}\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(n-1)}{2^{(n+2)/2}}$.

2. 通过分部积分, 对于 $y\leq 0$, 发散; 对于 $y>0, F(y)=0$.

3. 用关系式

$$\begin{aligned}\frac{1}{z}(f_x\cos\phi+f_y\sin\phi)=&f_{xx}\sin^2\varphi-2f_{xy}\sin\phi\cos\phi\\&+f_{yy}\cos^2\varphi+\frac{1}{z}\frac{d}{d\varphi}(f_x\sin\phi-f_y\cos\phi).\end{aligned}$$

4. 对 u_{xx} 分部积分两次 (在 $p<5/2$ 情况下, 需要特别小心).

5. 作变量代换 $\xi=\alpha x+\beta y, \eta=\gamma x+\delta y$, 这里选择 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 使得 $\xi^2+\eta^2=ax^2+2bxy+cy^2$, 那么 $(\alpha\delta-\beta\gamma)^2=ac-b^2$, 而且积分变为

$$\frac{1}{\sqrt{ac-b^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(\xi^2+\eta^2)}d\xi d\eta,$$

$$ac-b^2=\pi^2, a>0.$$

6. 作与第 5 题同样的代换, 并计算所得到的积分. (a) 利用第 1 题的结果, (b) 引进极坐标.

$$\text{(a)}\ \frac{\pi(aC+cA+2bB)}{(ac-b^2)^{3/2}}.\quad \text{(b)}\frac{\pi}{(ac-b^2)^{1/2}}.$$

7. 对 x 微商并分部积分得到

$$\begin{aligned} J_0' = & -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sin xt\frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}} \\ = & -\frac{x}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\cos xtdt. \end{aligned}$$

对此表示式的第一个对 x 微商得到

$$J_0'' = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\cos xtdt.$$

现在合并在被积函数中具有余弦因子的积分表示式.

8. 将答案与第 7 题比较.

9. (a) 通过形成 $K'(a)$, 这里 “ $'$ ” 表示对 a 微商, 并分部积分两次, (取 xe^{-ax^2} 作为一个因子), 我们有

$$K'(a) = -K(a)/2a + K(a)/4a^2,$$

即

$$K(a) = Ca^{-1/2}e^{-1/4a},$$

这里 C 由

$$C = \lim_{a\to\infty}\sqrt{a}K(a) = \lim_{a\to\infty}\int_0^{\infty}e^{-t^2}\cos\frac{t}{\sqrt{a}}dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

给出, 故,

$$K(a) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-1/4a}.$$

(b) 将公式 $t/(1+t^2) = \int_0^{\infty}e^{-tx}\cos xdx$ 关于 t 从 a 到 b 积分

$$\frac{1}{2}\log\frac{1+a^2}{1+b^2}.$$

(c) 在 $I'(a)$ 的表示式中作变量替换 $x = \frac{1}{t}$, 证明 $I' = -2I$. 于是 $I = Ce^{-2a}$, 这里 $C = \lim\limits_{a\to 0} I = \int_0^{\infty}e^{-x^2}dx$.

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-2a}.$$

(d) 代换 J_0 的积分表示式并改变积分次序，用公式 $a\sin ax \cdot \cos bxt = \sin(a+bt)x + \sin(a-bt)x$; 参看第四章， 4.12 节的

$$\int_0^\infty \frac{\sin xy}{y} dy$$

的表示式.

当 $a > b, \pi/2$; 当 $a < b, \arcsin a/b$.

10. 令 $\sin^2 ax = (1-\cos 2ax)/2$. 与卷一 3.15 节练习第 8 题和第 9 题 (b) 相比较.

11. 存在某一个 $\varepsilon > 0$ 使得对每一个 A, 存在 $A' > A$ 使得

$$\left|\int_{A'}^\infty f(x,y)dy\right| \geq \varepsilon$$

对 x 的某一个值成立.

练　习　4.13

1. (a) $iC(e^{-ia\tau}-1)/\sqrt{2\pi}\tau$.

(b) $1/\sqrt{2\pi}(a+i\tau)$.

(c) 根据 4.12 第 8 题， $J_n(x)/x^n$ 是函数

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{n!2^n}{\sqrt{2\pi(2n!)}}(1-t^2)^{n-1}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

的傅里叶变换，因此，按傅里叶积分定理 $f(-t) = f(t)$ 是 $J_n(x)$ 的傅里叶变换.

练　习　4.14

1. 根据 (97b)

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{2n(2n-1)(2n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1\sqrt{\pi}}{2^n(2n)(2n-2)\cdots 2},$$

它直接给出所要的结果.

2. 根据 (97a)

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)=\frac{\pi}{\sin\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}=(-1)^n\pi$$

再代入 (97b) 的结果得到

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)=\frac{(-2)^n\sqrt{\pi}}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}.$$

3. 根据 (98d)

$$\begin{aligned}B(x,x)=&2\int_0^{\pi/2}\frac{(\sin2t)^{2x-1}}{2^{2x-1}}dt\\=&\int_0^{\pi}\frac{(\sin s)^{2x-1}}{2^{2x-1}}dx\quad(s=2t)\\=&2\int_0^{\pi/2}\frac{(\sin s)^{2x-1}}{2^{2x-1}}ds=2^{1-2x}B\left(x,\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

4. 在此积分中设 $s=t^x$, 得到

$$\begin{aligned}I=&\frac{1}{x}\int_0^1 s^{(1/x)-1}(1-s)^{-1/2}ds\\=&\frac{1}{x}B\left(\frac{1}{x},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{x}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{x}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1/x+1/2)}.\end{aligned}$$

5. 在积分

$$I=\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

中，令 $t=x^2$, 得到

$$\begin{aligned}I=&\frac{1}{2}\int t^{(\alpha-1)/2}(1-t)^{-1/2}dt=\frac{1}{2}B\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{1}{2}\right)\\=&2^{\alpha-1}B\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{\alpha+1}{2}\right),\end{aligned}$$

这里最后一个等号用了第 3 题的结果.

(a) 对于 $\alpha = 2n+1$, 这给出

$$I = 2^{2n}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+2)} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

(b) 对于 $\alpha = 2n$, 借助第 1 题的结果, 我们得到

$$\begin{aligned} I =& 2^{2n-1}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2n+1)} \\ =& 2^{2n-1}\left[\frac{(2^n)!\sqrt{\pi}}{n!4^n}\right]^2 /(2n)!, \end{aligned}$$

它直接给出所要的结果.

6. 令 $x^m = a^m h\xi/c, y^m = b^m h\eta/c, z = h\zeta$ 得到体积分

$$V = \frac{abh}{m^2}\left(\frac{h}{c}\right)^{2/m}\int_0^1\int_0^{1-\xi}\int_{\xi+\eta}^1 \xi^{(1/m)-1}\eta^{(1/m)-1}d\zeta d\eta d\xi.$$

然后对 ζ 和 η 积分立即得到

$$\begin{aligned} V =& \frac{abh}{m}\left(\frac{h}{c}\right)^{2/m}\left[B\left(\frac{1}{m},\frac{1}{m}+1\right) - B\left(\frac{1}{m}+1,\frac{1}{m}+1\right)\right. \\ & \left. - \frac{1}{m+1}B\left(\frac{1}{m},\frac{1}{m}+2\right)\right] \\ =& abh\left(\frac{h}{c}\right)^{2/m} B\left(\frac{1}{m}+1,\frac{1}{m}+1\right). \end{aligned}$$

7. 令 $x^2 = a^2\xi, y^2 = b^2\eta, z^2 = c^2\zeta$, 把积分化成

$$I = \frac{a^p b^q c^r}{8}\iiint f(\xi+\eta+\zeta)\xi^{(p/2)-1}\eta^{(q/2)-1}\zeta^{(r/2)-1}d\xi d\eta d\zeta.$$

积分区域是整个四面体, 这个四面体由坐标平面和平面 $\xi+\eta+\zeta=1$ 围成, 用满足 $\zeta = t-\xi-\eta$ 的新变量 t 代替 ζ, 得到

$$\begin{aligned} I =& \frac{a^p b^q c^r}{8}\int_0^1\int_0^t\int_0^{t-\eta} f(t)\xi^{(p/2)-1}\eta^{(q/2)-1}(t-\xi-\eta)^{(r/2)-1}d\xi d\eta dt \\ =& \frac{a^p b^q c^r}{8}\int_0^1\int_0^t f(t)\eta^{(q/2)-1}(t-\eta)^{(p/2)+(r/2)-1} \\ & \times\int_0^1 u^{(p/2)-1}(1-u)^{(r/2)-1}du d\eta dt, \end{aligned}$$

这里我们已经令 $\xi=(t-\eta)u$, 于是

$$I=\frac{a^pb^qc^r}{8}B\left(\frac{p}{2},\frac{r}{2}\right)\int_0^1\int_0^t f(t)\eta^{(q/2)-1}(t-\eta)^{(p/2)+(r/2)-1}d\eta dt.$$

现在在此式中令 $\eta=tv$, 我们得到

$$I=\frac{a^pb^qc^r}{8}B\left(\frac{p}{2},\frac{r}{2}\right)B\left(\frac{q}{2},\frac{p+r}{2}-1\right)\int_0^1 f(t)t^{(p+q+r)/2-1}dt,$$

它直接给出所要的结果. 注意一般结果蕴涵于以前出现过的下式中

$$\begin{aligned}J&=\iiint f(\xi+\eta+\zeta)\xi^{\alpha-1}\eta^{\beta-1}\zeta^{\gamma-1}d\xi d\eta d\zeta\\&=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^1 f(t)t^{\alpha+\beta+\gamma-1}dt,\end{aligned}$$

这里三重积分取在被平面 $\xi+\eta+\zeta=1$ 所界的正卦限上，许多积分能导致这个形式，正如下面练习所看到的那样.

8. 令 $x=a\xi^n, y=b\eta^n, z=c\zeta^n$ 得到

$$\bar{x}=\frac{a\iiint\xi^{2n-1}\eta^{n-1}\zeta^{n-1}d\xi d\eta d\zeta}{\iiint\xi^{n-1}\eta^{n-1}\zeta^{n-1}d\xi d\eta d\zeta},$$

这里积分是取在被平面 $\xi+\eta+\zeta=1$ 所界的整个正卦限上，而且具有在第 7 题解答中的积分 J 的形式，因此,

$$\bar{x}=\frac{3a}{4}\frac{\Gamma(2n)\Gamma(3n)}{\Gamma(n)\Gamma(4n)}.$$

9. 令 $x=R\xi^{2/3}, y=R\eta^{3/2}$ 得到

$$I=4\iiint x^2dxdy=9R^4\iint\xi^{7/2}\eta^{1/2}d\xi d\eta,$$

这里后面的二重积分取在 ξ,η 平面上，以直线 $\xi+\eta=1$ 为界的整个第一象限，如在第 8 题中那样，这给出

$$I=2R^4B\left(\frac{11}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{21}{2^9}\pi R^4.$$

10. 如在第 7 题中那样，通过 $x_0=t-x_1-\cdots-x_n$ 代替 x_0 则

$$
\begin{aligned}
I=&\int_0^1\int_0^{1-x_0}\cdots\int_0^{1-x_0\cdots-x_{k-1}}\cdots\\
&\times\int_0^{1-x_0\cdots x_{n-1}}f(x_0+\cdots+x_n)x_0^{a_0-1}\cdots x_n^{a_n-1}\\
&\times dx_n\cdots dx_k\cdots dx_1dx_0\\
=&\int_0^1\int_0^t\cdots\int_0^{t-x_1\cdots x_{k-1}}\int_0^{t-x_1\cdots x_{n-2}}x_1^{a_1-1}\cdots x_{n-1}^{a_{n-1}-1}f(t)\\
&\times\int_0^{t-x_1\cdots-x_{n-1}}x_n^{a_n-1}(t-x_1\cdots-x_n)^{a_0-1}\\
&\times dx_ndx_{n-1}\cdots dx_k\cdots dx_1dt.
\end{aligned}
$$

在对 x_n 的积分中，令 $x_n=(t-x_1\cdots x_{n-1})u_n$, 它给出

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{t-x_1\cdots x_{n-1}}x_n^{a_n-1}(t-x_1\cdots-x_n)^{a_0-1}dx_n\\
&=(t-x_1\cdots-x_{n-1})^{a_0+a_n-1}\int_0^1u_n^{a_n-1}(1-u_n)^{a_0-1}du_n\\
&=(t-x_1\cdots-x_{n-1})^{a_0+a_n-1}B(a_n,a_0).
\end{aligned}
$$

对 $x_k=(t-x_1\cdots-x_{k-1})u_k,k=2,\cdots n$ 而 $x_1=tu_1$, 重复这个过程，我们最后得到

$$
\begin{aligned}
I=B(a_n,a_0)B(a_n-1,a_n+a_0)\cdots B(a_1,a_2+\cdots\\
+a_n+a_0)\int_0^1f(t)t^{a_0+\cdots+a_n-1}dt,
\end{aligned}
$$

它直接给出所要的结果.

11. 证明对于按照第四章，公式 (86e) 右边极限号后面的表示式定义的 $G_n(x)$, 有

$$
G_{2n}(2x)=\frac{1}{2}\cdot2^{2x}G_n(x)G_n\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{(2n)!\sqrt{n}}{2^{2n}(n!)^2};
$$

然后令 $n\to\infty$ 并应用瓦里斯公式 (卷一，第 314 页).

12. (a) 设 $u=\alpha-p, v=\beta-q$. 重复地对 $D^{-u}f(x)$ 进行分部积分，我们得到

$$\text{(i)}\quad D^{-u}f(x)=\frac{f(0)x^u}{\Gamma(u+1)}+\cdots+\frac{f^{(p-1)}(0)x^{u+p-1}}{\Gamma(u+p)}$$
$$+\frac{1}{\Gamma(u+p)}\int_0^x (x-t)^{u+p-1}f^{(p)}(t)dt.$$

注意在 0 点的导数为零并对 x 微商 p 次，然后我们求得

$$\text{(ii)}\quad g(x)=D^\alpha f(x)=\frac{d^p}{dx^p}[D^{-u}f(x)]=D^{-u}f^p(x)$$
$$=\frac{1}{\Gamma(u)}\int_0^x (x-t)^{u-1}f^{(p)}(t)dt.$$

进一步分部积分给出

$$g(x)=\frac{f^{(p)}(0)x^n}{\Gamma(u+1)}+\cdots+\frac{f^{(p+q+1)}(0)x^{u+q-1}}{\Gamma(u+q)}$$
$$+\frac{1}{\Gamma(u+1)}\int_0^x (x-t)^{u+q-1}f^{(p+q)}(t)dt.$$

因为 f 在原点的导数为 0, 所以我们求得

$$\begin{aligned}D^{-v}D^\alpha f(x)=&D^{-v}g(x)\\=&\int_0^x\frac{(x-t)^{v-1}}{\Gamma(v)}\int_0^t\frac{(t-s)^{u+q-1}f^{(p+q)}(s)}{\Gamma(u+q)}dsdt\\=&\frac{1}{\Gamma(v)\Gamma(u+q)}\int_0^x f^{(p+q)}(s)\\&\times\int_0^x (x-t)^{v-1}(t-s)^{u+q-1}dtds.\end{aligned}$$

我们通过引进新的积分变量 $z=(t-s)/(x-s)$ 计算其内层积分得到

$$\begin{aligned}D^{-v}D^\alpha f(x)=&\frac{B(u+q,v)}{\Gamma(v)\Gamma(u+q)}\int_0^x (x-s)^{u+v+q-1}f^{(p+q)}(s)ds\\=&\frac{1}{\Gamma(u+v+q)}\int_0^x (x-s)^{u+v+q-1}f^{(p+q)}(s)ds.\end{aligned}$$

现在，微商 q 次我们得到

(iii) $D^{\beta}D^{\alpha}f(x)=D^{q}D^{-v}g(x)$

$$=\frac{1}{\Gamma(u+v)}\int_0^x (x-s)^{u+v-1}f^{(p+q)}(s)ds.$$

这最后结果对 u 和 v 是对称的，因此它与所作用的运算 D^{α} 和 D^{β} 的顺序无关，所以，

$$D^{\alpha}D^{\beta}f(x)=D^{\beta}D^{\alpha}f(x).$$

(b) 设 r 是比 $\alpha+\beta$ 大的最小整数， $w=\gamma-\alpha-\beta$, 则 (ii) 给出

$$D^{\alpha+\beta}f(x)=\frac{1}{\Gamma(w)}\int_0^x (x-t)^{w-1}f^{(r)}(t)dt,$$

若 $u+v\le 1$, 则 $r=p+q, w=u+v$, 而且这个积分是与对于 $D^{\beta}D^{\alpha}f(x)$ 在 (iii) 中得到的积分是一样的，然而，若 $1<u+v\le 2$ 则 $w=u+v-1$ 和 $r=p+q-1$, 现在我们只对表达式 (i) 求直到 $r-1$ 阶的导数，即

$$D^{-w}f(x)=\frac{1}{\Gamma(w+r-1)}\int_0^x (x-t)^{w+r-2}f^{(r-1)}(t)dt,$$

并对 x 微商 $r-2$ 次得到

$$\begin{aligned}D^{r-2}D^{-w}f(x)=&D^{\alpha+\beta-2}f(x)\\=&\frac{1}{\Gamma(w+1)}\int_0^x (x-t)^{w}f^{(r-1)}(t)dt\\=&\frac{1}{\Gamma(u+v)}\int_0^x (x-t)^{u+v-1}f^{(p+q)}(t)dt.\end{aligned}$$

于是，在这种情况下， $D^{\alpha}D^{\beta}f(x)\neq D^{\alpha+\beta}f(x)$.

第 五 章

练 习 5.2

1.(a) $-b/2\alpha^2\beta^2$.

(b) 0.

(c) 0.

4. 记 $d(u,v)/d(x,y)=(uv_y)_x-(uv_x)_y=\mathrm{curl}(u\mathrm{grad}v)$.

练 习 5.7

1. 注意 $\boldsymbol{\xi}=\mathbf{X}_u+\mathbf{X}_v,\boldsymbol{\eta}=\mathbf{X}_u-\mathbf{X}_v$.

2. 将外法线方向 $\mathbf{X}_r$ 与由 $\mathbf{X}_\theta\times\mathbf{X}_\phi$ 所表示的法线方向进行比较.

3. (a) 直线 $V=a/2$ 划分 S 为一部分 S', 由 $a/2<V<a$ 给定(或者，等价地由 $-a<V<-a/2$ 给定) 并且由 $\boldsymbol{\xi}=\mathbf{X}_u,\boldsymbol{\eta}=\mathbf{X}_v$ 定向，以及另外一部分 S'' 由 $-a/2<V<a/2$ 给定，它刚好是另一条梅比乌斯带.

(b) S_1 是可以用形式 (40a) 来表示的，在 V 被限制在区间 $0<V<a$ 的情况下，显然地，在 S_1 上任何两个点能被在 S_1 上的曲线连接，这也就是在参数平面上连接对应点 (u,v) 的直线段的像.

(c) S_1 被 $\boldsymbol{\xi}=\mathbf{X}_u,\boldsymbol{\eta}=\mathbf{X}_v$ 定向的.

4. 我们容易验证 $\mathbf{R}(t)$ 有长度 $|\boldsymbol{\xi}|$ 而且线性依赖于 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$ 从而落在 π 上，此外 $\mathbf{R}(t)\cdot\boldsymbol{\xi}/|\boldsymbol{\xi}|^2=\cos t$, 向量 $\mathbf{R}(t)$ 当 $t=0$ 时与 $\boldsymbol{\xi}$ 一致，而对于 0 到 180° 之间的某些 t, 即按如下关系确定的 t, 有 $\boldsymbol{\eta}$ 的方向.

$$\cos t=b/\sqrt{ac},\quad \sin t=\sqrt{1-b^2/ac}.$$

练 习 5.9a

1. $\displaystyle\iint\frac{z}{\rho}ds=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{c^2}\right)\iiint zdxdydz.$

这里体积分展布到整个椭球的上半部，(这上半椭球的底面对曲面对曲面积分没有贡献):

$$\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{c^2}\right)abc^2.$$

2. 因为 H 是四次调和函数，我们有

$$\begin{aligned}4\iint Hds &= \iint (xH_x+yH_y+zH_z)ds\\ &= \iint \frac{\partial H}{\partial n}ds = \iiint \triangle H dxdydz\\ &=6\iiint [x^2(2a_1+a_4+a_6)+y^2(2a_2+a_4+a_5)\\ &\quad+z^2(2a_1+a_2+a_6)]dxdydz\\ &\quad\frac{4}{5}\pi(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6).\end{aligned}$$

练　习　5.9 e

1. (a) 比较第 219 页 2.4 节练习第 8 题.

(c) 设 R 是任意区域并且 v 是任意一个在 R 的边界上为 0 的函数，则，按照格林第一公式

$$\begin{aligned}&\iiint\limits_R (u_{x_1}v_{x_1}+u_{x_2}v_{x_2}+u_{x_3}v_{x_3})dx_1dx_2dx_3\\ &\qquad= -\iiint\limits_R v\triangle u dx_1dx_2dx_3\\ &\qquad= -\iiint\limits_R v\triangle u\sqrt{e_1e_2e_3}dp_1dp_2dp_3.\end{aligned}$$

现在

$$\begin{aligned}u_{x_1} &= u_{p_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_i}+u_{p_2}\frac{\partial p_2}{\partial x_i}+u_{p_3}\frac{\partial p_3}{\partial x_i}\\ &= u_{p_1}\frac{a_{i1}}{e_1}+u_{p_2}\frac{a_{i2}}{e_2}+u_{p_3}\frac{a_{i3}}{e_3},\end{aligned}$$

而

$$v_{x_i}=v_{p_1}\frac{a_{i1}}{e_1}+v_{p_2}\frac{a_{i2}}{e_2}+v_{p_3}\frac{a_{i3}}{e_3},$$

因此,

$$\begin{aligned}&\iiint\limits_R(u_{x_1}v_{x_1}+u_{x_2}v_{x_2}+u_{x_3}v_{x_3})dx_1dx_2dx_3\\&=\iiint\left(\frac{1}{e_1}u_{p_1}v_{p_1}+\frac{1}{e_2}u_{p_2}v_{p_2}+\frac{1}{e_3}u_{p_3}v_{p_3}\right)dx_1dx_2dx_3\\&=\iiint\left(\sqrt{\frac{e_2e_3}{e_1}}u_{p_1}v_{p_1}+\sqrt{\frac{e_3e_1}{e_2}}u_{p_2}v_{p_2}+\sqrt{\frac{e_1e_2}{e_3}}u_{p_3}v_{p_3}\right)dp_1dp_2dp_3,\\&=\iiint(u_1v_{p_1}+u_2v_{p_2}+u_3v_{p_3})dp_1dp_2dp_3.\end{aligned}$$

这里我们记 $u_i=\dfrac{\sqrt{e_1e_2e_3}}{e_i}u_{p_i}$.

把高斯定理应用到向量 (u_1v,u_2v,u_3v) 上去，我们得到

$$-\iiint\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_1}+\frac{\partial u_2}{\partial p_2}+\frac{\partial u_3}{\partial p_3}\right)vdp_1dp_2dp_3,$$

于是对于任何一个在 R 的边界上为 0 的 v, 我们有

$$\begin{aligned}&\iiint v\,\triangle\, u\sqrt{e_1e_2e_3}dp_1dp_2dp_3\\&\qquad=\iiint v\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_1}+\frac{\partial u_2}{\partial p_2}+\frac{\partial u_3}{\partial p_3}\right)dp_1dp_2dp_3,\end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned}\triangle u=&\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_1}+\frac{\partial u_2}{\partial p_2}+\frac{\partial u_3}{\partial p_3}\right)\frac{1}{\sqrt{e_1e_2e_3}}\\=&\frac{1}{\sqrt{e_1e_2e_3}}\left[\frac{\partial}{\partial p_1}\left(\sqrt{\frac{e_2e_3}{e_1}}\frac{\partial u}{\partial p_1}\right)\right.\\&\left.+\frac{\partial}{\partial p_2}\left(\sqrt{\frac{e_3e_1}{e_2}}\frac{\partial u}{\partial p_2}\right)+\frac{\partial}{\partial p_3}\left(\sqrt{\frac{e_1e_2}{e_3}}\frac{\partial u}{\partial p_3}\right)\right].\end{aligned}$$

(d) 用第三章的 3.3d 节练习第 9 题 (c),

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}(t_2-t_1)(t_3-t_1)(t_3-t_2)\triangle u \\
&=(t_3-t_2)\sqrt{\phi(t_1)}\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\sqrt{\phi(t_1)}\frac{\partial n}{\partial t_1}\right) \\
&\quad+(t_3-t_1)\sqrt{-\phi(t_2)}\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\sqrt{-\phi(t_2)}\frac{\partial u}{\partial t_2}\right) \\
&\quad+(t_2-t_1)\sqrt{\phi(t_3)}\frac{\partial}{\partial t_3}\left(\sqrt{\phi(t_3)}\frac{\partial u}{\partial t_3}\right).
\end{aligned}$$

其中 $\phi(x)=(a-x)(b-x)(c-x)$.

练　习　5.10 a

1. (a) $I=-\iint\limits_{y^2+z^2<1/4}(zx_z+x)dydz$,

其中

$$x=\sqrt{1-y^2-z^2}.$$

(b)

$$I=\int\limits_{\partial S^*}L=-x\int\limits_{\partial S^*}ydz=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{3}{4}\cos^2\theta d\theta=-\frac{3}{8}\pi.$$

练　习　5.10 b

2. 如果 (ξ,η) 和 (x,y) 分别是 π 和 p 上的直角坐标, 则点 $M(x,y)$ 的运动可通过下列方程描写

$$\xi=x\cos\phi-y\sin\varphi+a,\quad \eta=x\sin\phi+y\cos\phi+b$$

(也就是通过旋转和平移), 因此,

$$S(M)=A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D.$$

(α) 若 $A=n\pi\neq 0$, 我们有 $S(M)=n\pi[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]+S(C)$, 这里 C 是点 $x=x_0=-B/2n\pi, y=y_0=-C/2n\pi$, 因此, A,B,C,D 取第 1 题中的值.

(β_1) 若 $A = n\pi = 0$ 但 $B^2 + C^2 > 0$ 则

$$S_M = \sqrt{B^2 + C^2}\frac{Bx + Cy + D}{\sqrt{B^2 + C^2}} = \lambda d(M),$$

其中 $\lambda = \sqrt{B^2 + C^2}$, 这时 $\triangle$ 是直线 $Bx + Cy + D = 0$.

(β_2) 若 $A = B = C = 0$, 我们有 $S(M) = D =$ 常数.

3. 对于刚性地贴在连杆 AB 上的平面 P 的运动, 我们有 $n = 0, S(A) = 0, S(B) = \pi\overline{CB^2} = \pi r^2$. 因此, $\triangle$ 通过 A 而且根据对称性, $\triangle$ 在 A 点与 AB 垂直. 于是 $S(M) = \pi r^2 e^{-1} d(M)$, 这里 $l = \overline{AB}$.

4. 对于刚性地贴在弦 AB 的平面 P 的运动, 我们有 $n = 1, S(A) = S(B) = S = \Gamma$ 的面积, 因此, Steiner 定理的点 C 是与 A 和 B 等距的, 而且 $S(A) = \pi\overline{CA^2} + S(C), S(M) = \pi\overline{CM^2} + S(C)$; 因此, $S(A) - S(M) = \Gamma$ 的面积 $-\Gamma'$ 的面积 $= \pi(\overline{CA^2} - \overline{CM}^2) = \pi ab$.

5. 若 l 是 Γ 的长度, 弗雷内公式 (219 页 2.5 节, 第 16 题) 给出:

$$\int \frac{\mathbf{n}}{\rho} ds = \int \frac{\xi_2}{\rho} ds = \int \boldsymbol{\xi}_1 ds = \int \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} ds = \mathbf{0};$$

$$\int \frac{\mathbf{x} \times \mathbf{n}}{\rho} ds = \int \mathbf{x} \times \boldsymbol{\xi}_1 ds = \mathbf{x} \times \boldsymbol{\xi}_1 \Big|_0^l - \int \mathbf{x} \times \boldsymbol{\xi}_1 ds$$

$$= -\int \boldsymbol{\xi}_1 \times \boldsymbol{\xi}_1 ds = 0.$$

6. 设 $\mathbf{n}' = (\alpha, \beta, \gamma), \mathbf{x} = (x, y, z)$, 如果在高斯公式

$$\iint (a\alpha + b\beta + c\gamma) d\sigma$$
$$= -\iiint \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}\right) dxdydz,$$

中, 我们代入 $a = 1, b = c = 0$, 以及 $a = 0, b = -z, c = y$, 我们分别得到 $\iint \alpha d\sigma = 0$ 和 $\iint (y\gamma - z\beta) d\sigma = 0$.

7. 取直角坐标 (x, y, z) 使得 $z = 0$ 是流体的自由水平表面, 并且 oz 指向下. 在 $d\sigma$ 上的压力为 $\mathbf{n} z d\sigma$, 其中 z 是 $d\sigma$ 的深度. 通过

反复应用三维高斯公式，在函数 a, b, c 明显选择的情况下，我们求得流体压力合力的分量

$$\iint \alpha z d\sigma = 0, \quad \iint \beta z d\sigma = 0,$$

$$\iint \gamma z d\sigma = -\iint dxdydz = -V.$$

再次用高斯公式我们求得关于原点的合力矩的分量.

$$\iint (yzr - z^2\beta) d\sigma = \iiint ydxdydz = Vy_0,$$

$$\iint (z^2\alpha - xz\gamma) d\sigma = -\iiint xdxdydz = -Vx_0,$$

$$\iint (xz\beta - yz\alpha) d\sigma = 0$$

((x_0, y_0, z_0) 是形心 C 的坐标). 现在我们注意到力 $\mathbf{f}$ 的分量是 $0, 0, -V$，而且它们相对于原点的力矩的分量是 $V_{y_0}, -V_{x_0}, 0$.

8. 根据椭球面的参数方程

$$x = a \cos u \cos v, \quad y = b \sin u \cos v, \quad z = c \sin v$$

$$\left(0 \le u < 2\pi, -\frac{\pi}{2} \le v < \frac{\pi}{2}\right),$$

我们容易得到公式

$$pds = abc \cos v du dV, \frac{ds}{p} = \frac{D^2 du dv}{abc \cos v},$$

其中 $D^2 = b^2c^2\cos^2 u\cos^2 v + a^2c^2\sin^2 u\cos^2 v + a^2b^2\sin^2 v\cos^2 v$.

10. 这个积分表示平面 $z = 0$ 对着点 $M = (0, 0, 1)$ 所张的平面立体角. 为了直接地解析证明，利用平面极坐标.

12. 验证恒等式

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a-x}{\gamma^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{b-y}{\gamma^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{c-z}{\gamma^3}\right) = 0,$$
$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2,$$

对于一切异于 (a,b,c) 的点 (x,y,z) 成立. 根据三维高斯公式, 我们得出结论 (i) 如果 Σ 是闭曲面, $A=(a,b,c)$ 在由 Σ 所围的体积外边, 则 $\Omega=0$.(ii) 如果 A 在 Σ 内部则积分值与 Σ 的形状无关, 将中心在 A 的球面取为 Σ, 我们容易证明 $\Omega=4\pi$.

13. 对 γ 用 r 写出的积分,

$$\frac{\partial\Omega}{\partial a}=\iint_{\Sigma}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{a-x}{\gamma^3}\right)dydz+\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{b-x}{\gamma^3}\right)dzdx$$

$$+\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{c-z}{\gamma^3}\right)dxdy$$

是与 Σ 无关的, 而且仅依赖于 Σ 的边界 Γ, 因为在第 12 题的答案中给出的恒等式蕴涵着

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{a-x}{\gamma^3}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{b-y}{\gamma^3}\right)\right]$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{c-z}{\gamma^3}\right)\right]=0.$$

根据斯托克斯定理 (第 5 章的讨论), $\dfrac{\partial\Omega}{\partial a}$ 的曲面积分表示式可以表为沿着 Γ 的线积分 $\int udx+vdy+wdz$, 验证函数

$$u=0, v=\frac{z-c}{\gamma^3},\quad w=-\frac{y-b}{\gamma^3},$$

满足恒等式

$$\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{a-x}{\gamma^3}\right), \frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{b-y}{\gamma^3}\right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{c-z}{\gamma^3}\right).$$

14. 注意下列事实: (1) 如果 Γ 是这样变形的, 在它们变形期间, Γ 从不扫过 $(-1,0)$ 或 $(1,0)$ 中的任何一个, 则线积分 θ 的值保持不变; (2) 如果 Γ 是按反时针定向围绕 (1,0) 的小圆周则 $\theta=2\pi$; (3) 如果 Γ 是按顺时针定向围绕 $(-1,0)$ 的小圆周, 则 $\theta=2\pi$.

15. 想像 C 是金属丝制成的坚硬的圆圈，而 Γ 是细绳，现在变形绳 Γ 到新位置 Γ',Γ' 整个地落在平面 $y=0$ 内. 在变形时，数 p 和 n 是不改变的，并当练习第 14 题被用到平面 $y=0$ 内的曲线 Γ' 上和这个平面中的直线段 $-1<x<1, y=0, z=0$ 上时，第一个公式直接得出，因子 4π(而不是 2π, 像前面例子那样) 起因于沿着 $p=1, n=0$ 闭路径立体角增加了 4π. 分析上实现上述从 Γ 到 Γ' 形变的方法之一是：假设 Γ 不与 z 轴相交并设

$$x=\gamma(t)\cos\phi(t),\quad y=\gamma(t)\sin\phi(t),$$
$$z=z(t)\quad(0\leq t\leq 2\pi)$$

是 Γ 的参数方程，于是考虑依赖于参数 τ 的曲线族

$$\Gamma(\tau): x=\gamma(t)\cos[\tau\phi(t)], y=\gamma(t)\sin[\tau\phi(\tau)], z=z(t),$$

τ 从 1 减少到 0, 注意 $\Gamma(1)=\Gamma$ 和 $\Gamma'=\Gamma(0)$, 是落在平面 $y=0$ 上的闭曲线，还注意 (对于固定的 z 值)$\Gamma(z)$ 上的每一点 p, 当 τ 变化时绕 z 轴旋转；因此， c 在 p 点所对的立体角 Ω 不随着 τ 改变. 这蕴涵着 $\Omega_1-\Omega_0$ 对于 $\Gamma(0)$ 就像对于 $\Gamma(1)=\Gamma$ 一样，将有同一个值，为了证明第二个公式，注意到

$$\begin{aligned}\Omega_1-\Omega_0&=\int_\Gamma d\Omega=\int_\Gamma \mathrm{grad}\Omega\cdot dP\\&=-\int_\Gamma dP\cdot\int_c\frac{\overline{PP'}\times dP'}{|PP'|^3}\\&=-\iint\limits_{\Gamma C}\frac{dP\cdot(\overline{PP'}\times dp')}{|\overline{PP'}|^3}\\&=\iint\limits_{\Gamma C}\frac{\overline{PP'}\cdot(dP\times dP')}{|\overline{PP'}|^3}\end{aligned}$$

16. 取坐标系 Ox_1, Ox_2, Ox_3 而且用 $\mathbf{x}$ 表示 $\mathbf{\Gamma}$ 上的动点的定位向量，则

$$\mathbf{a}=\frac{1}{2}\int\mathbf{x}\times\mathbf{dx}$$

具有所要求的特性，因为

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}_3=\frac{1}{2}\int_\Gamma(x_1dx_2-x_2dx_1)$$

是 Γ 在平面 Ox_1x_2 上的投影的面积.

17. 因为 $\partial(u,v)/\partial(x,y)\neq 0$, 从两个方程 $u=f_x, v=f_y$ 可以解出 x 和 y. 设 $x=\sigma(u,v), y=\tau(u,v)$. 因为 $u_y=v_x$,(参看 285 页) 我们有 $x_v=y_u, \sigma_v=\tau_u$, 因此，使得 $x=g_u(u,v), y=g_v(u,v)$ 的函数 g 存在.

18.

$$u=\frac{yz}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$v=\frac{-xz}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad w=0.$$

第　六　章

练习 6.1 e

1. 由于 $\dot\theta=0$, 方程 (17c) 呈如下形式

(i)
$$\dot r^2=c+\frac{b}{r},$$

其中 $c=2C/m$ 而且 $b=2r\mu$. 将此方程写成

$$\sqrt{\frac{r}{cr+b}}\cdot\frac{dr}{dt}=1,$$

并进行积分，我们得到，当 $c\neq 0$.

(iia)
$$t=k+\frac{\sqrt{cr^2+br}}{c}-\frac{b}{2c}f(r),$$

其中

(iib)
$$f(r)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{c}}\operatorname{arc\,sinh}(1+2cr/b), & \text{对于 } c>0,\\[2ex] \dfrac{-1}{\sqrt{c}}\operatorname{arc\,sin}(1-2cr/b), & \text{对于 } c<0,\end{cases}$$

而当 $c=0$,

$$\text{(iic)} \qquad r=\left(\frac{3\sqrt{b}}{2}t+k\right)^{2/3}.$$

回到微分方程 (i), 我们通过

$$c=\dot{r}_0^2-\frac{b}{r_0}$$

决定积分常数 c. 当 $c<0$, 我们看到 r 是有界的, $r\le -b/c$. 若 $\dot{r}_0>0$, 则 r 先增加到这个值, 而后当飞行体落向太阳时 r 减少. 当 $\dot{r}_0<0$, 这飞行体直接朝着太阳运动, 直到碰撞为止.

当 $c=0$, 我们注意在 (iic) 中的积分常数 k 是 $k=\pm r_0^{3/2}=b^{3/2}/\dot{r}_0^3$, 这里正号和负号取决于 $\dot{r}_0$ 是正还是负, 若 $\dot{r}_0$ 是负的, 我们又得到这样一个解, 在这个解中飞行体加速向太阳运动. 当 $\dot{r}_0$ 是正的, 这飞行体向无穷远逃逸, 但具有零极限速度.

当 $k>0$, 而 $\dot{r}_0<0$ 时与前面一样飞行体向太阳加速运动直到碰撞. 但是若 $\dot{r}_0>0$, 则飞行体逃逸并从 (i) 和 (iii) 能看出它有正的极限速度, 即

$$\dot{r}_\infty=c=\dot{r}_0^2-\frac{b}{r_0}.$$

2. 对于抛物线和双曲线, 飞行轨道都是非周期的而且 θ 是有界的, 因此, 根据 $\int_{\theta_0}^{\theta} r^2 d\theta=h(t-t_0)$, 当 t 趋近 ∞ 时, r 也必须趋近于 ∞. 由 (17d) 我们有当 $t\to\infty$ 时, $\dot{\theta}=0$; 因此在 (17c) 中, 由于

$$\lim_{t\to\infty} r^2\dot{\theta}^2=(\lim_{t\to\infty} r^2\dot{\theta})(\lim_{t\to\infty}\dot{\theta})=h\lim_{t\to\infty}\dot{\theta}=0,$$

我们得出结论 $\lim\limits_{t\to\infty}\dot{r}^2=2c/m$, 然而, 根据 ε 的定义, 对于抛物线 $(\varepsilon=1)c$ 的值为 0, 对于双曲线 $(\varepsilon>1)c$ 的值是正的.

3. 力是 $-m/2\ \mathrm{grad}\ \dot{r}^2$. 根据能量守恒,

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+\frac{1}{2}mr^2=c,$$

又对于任何一个向心力，动量矩方程给出

$$r^2\dot{\theta} = h.$$

我们从这些方程中消去 t, 就像我们对行星运动方程 (17c) 和 (17d) 所做的那样，得到

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{h}\sqrt{\frac{2cr^2}{m} - h^2 - r^4}.$$

由此容易通过积分得到

$$r^2 = \frac{a}{b + \sin 2\theta},$$

其中 $a = 2h^2$,$b = \sqrt{1 - h^2m^2/c^2}$. 在笛卡儿坐标中，这就变成

$$b(x^2 + y^2) + 2xy = a$$

这是圆锥截线方程.

4. 力是 $-\mathrm{grad}\, U$, 其中 $U = -\int f(r)dr$, 就行星运动而论，我们可以应用能量守恒和动量矩方程 (17d), 也就是

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \int f(r)dr = c,$$

$$r^2\dot{\theta} = h.$$

现在我们可以用同样方法继续进行得到需要的结果.

5. 应用第 4 题结果.

6. 若 (ξ, η) 是相对于椭圆轴的坐标，则

$$\xi = a\cos\omega = x + \varepsilon a,$$

$$\eta = b\sin\omega = y,$$

给出这个椭圆的方程而且根据面积定律

$$h(t - t_s) = \int_0^\omega \left(x\frac{\partial y}{\partial \omega} - y\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)d\omega$$

$$= ab\int_0^{\omega}(1-\varepsilon\cos\omega)d\omega.$$

7. 运动在平面上进行，因为 p 是有心力 (对于 $p = 1/r^2$, 这一情况在第 811 页证明过). 因此,

$$\ddot{x} = -\frac{x}{r}p,$$

$$\ddot{y} = -\frac{y}{r}p.$$

于是有

$$x\dot{y} - \dot{x}y = \text{常数} = h$$

$$\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} = \frac{-x\dot{x} - y\dot{y}}{r}p = -\dot{r}p.$$

因此,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = -\dot{r}p.$$

切线到原点的距离是

$$q = \frac{|x\dot{y} - \dot{x}y|}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \frac{h}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}};$$

因此,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\frac{h^2}{q^2} = -p\frac{dr}{dt}$$

或

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dr}\frac{h^2}{q^2} = -p,$$

这就证明了第一个论断. 对于心脏线我们有 $q = r^2/\sqrt{2ar}$.

8. 按照定义

$$\text{(A)}\qquad \begin{aligned}\ddot{x} &= -\lambda^2 x - 2\mu\dot{y}\\ \ddot{y} &= -\lambda^2 y + 2\mu\dot{x}.\end{aligned}$$

对这两个方程微商两次并进行组合之后，我们立即得到只包含 x 或只包含 y 的方程

$$\ddot{x}+(2\lambda^2+4\mu^2)\ddot{x}+\lambda^4 x=0,$$

$$\ddot{y}+(2\lambda^2+4\mu^2)\ddot{y}+\lambda^4 y=0,$$

于是， x 和 y 是 $\exp[\pm i(u\pm\sqrt{\lambda^2+\mu^2})t]$ 的线性组合 (参看第 841 页练习第 2 题). 或是

$$\cos(\mu+\sqrt{\lambda^2+\mu^2})t,\ \cos(\mu-\sqrt{\lambda^2+\mu^2})t,$$

$$\sin(\mu+\sqrt{\lambda^2+\mu^2})t,\ \sin(\mu-\sqrt{\lambda^2+\mu^2})t$$

的线性组合，具有常系数 a,b,c,d 和 a',b',c',d'. 根据 (A) 如下关系成立， $a'=-c,b'=-d,c'=a,d'=b$. 用初始条件 $x(0)=y(0)=\dot{y}(0)=0$, $\dot{x}(0)=u$, 我们就可得到所给的结果.

9. 设 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$ 是产生引力的粒子，则在点 (x,y) 的合力具有分量

$$X=\sum_\nu \frac{x-x_\nu}{\sqrt{(x-x_\nu)^2+(y-y_\nu)^2}},$$

$$Y=\sum_\nu \frac{y-y_\nu}{\sqrt{(x-x_\nu)^2+(y-y_\nu)^2}}.$$

如果我们引进复数 $z_1=x_1+iy_1,\cdots,z_n=x_n+iy_n,z=x+iy,Z=X+iY$, 则有

$$Z=\sum_\nu \frac{1}{z-\overline{z}_\nu}=\frac{\overline{f'(z)}}{\overline{f(z)}},$$

这里 $f(z)$ 表示多项式 $(z-z_1)\cdots(z-z_n)$ 而 $\overline{z}$ 表示 z 的共轭复数. 平衡位置对应 $Z=0$, 这也就是多项式 $f'(z)$ 的零点，其中至多有 $n-1$ 个.

在这特殊情况下, 平衡位置为: $(0,0),(\sqrt{a^2-b^2},0),(-\sqrt{a^2-b^2},0)$.

练习 6.2

1. (a) $y=\tan\log(c/\sqrt{1+x^2})$

(b) $y=c\sqrt{1+e^{2x}}$.

2. (a) $y=ce^{y/x}$,

(b) $y^2(2x^2+y^2)=c^2$,

(c) $x^2-2cx+y^2=0$, (圆周)

(d) $\arctan(y/x)+c=\log\sqrt{x^2+y^2}$ 或用极坐标 $r=e^{\phi+c}$(对数螺线),

(e) $c+\log|x|=\arcsin(y/x)-\dfrac{1}{x}\sqrt{x^2-y^2}$.

3. 若 $ab_1-a_1b\neq 0$, 我们有

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{a+by'}{a_1+b_1y'}=\frac{a+b\phi(\eta/\xi)}{a_1+b_1\phi(\eta/\xi)}.$$

这是一个齐次方程.

若 $ab_1-a_1b=0$ 或 $a_1/a=b_1/b=k$, 则

$$\frac{d\eta}{dx}=a+b\frac{dy}{dx}=a+b\phi\left(\frac{\eta+c}{k\eta+c_1}\right).$$

其中变量是分离的.

4. (a) $4x+8y+5=ce^{4x-8y}$,

(b) $x=c-\dfrac{1}{4}(3y-7x)-\dfrac{3}{4}\log(3y-7x)$.

5. (a) $y=ce^{-\sin x}+\sin x-1$,

(b) $y=(x+1)^n(e^x+c)$,

(c) $y=cx(x-1)+x$,

(d) $y=\dfrac{1}{3}x^5+cx^2$,

(e) $y=\dfrac{c}{\sqrt{1+x^2}}-\dfrac{1}{(1+x^2)(x+\sqrt{1+x^2})}$.

6. 引进 $1/y$ 作为新的未知函数；方程便成为齐次的.

$$\frac{1}{x}\frac{1-cx^{\sqrt{5}}}{cx^{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}}.$$

7. 用这个变量代换，方程成为

$$v' = v^n g(x)F(x)^{n-1}.$$

8. 参看第 7 题，通过 $v = xy$, $y' = v'/x - v/x^2$ 消去 y 得到分离变量的方程.

$$y = \frac{1}{x(c-\log x)}.$$

9. 仿效第 7 题中变量代换的想法，寻求一个函数 $f(x)$ 使得 $v = y \cdot f(x)$ 而且 $v' = (y' + y\sin x)f(x)$. 根据 $f' = y'f(x) + yf'(x)$ 我们有

$$f'(x) = f(x)\sin x;$$

从而

$$f(x) = ae^{-\cos x}.$$

为了我们的目的，常数 a 是无关紧要的，因此我们让 $a = 1$, 于是我们得到分离变量的方程

$$v' = -e^{(n-1)\cos x}\sin 2x,$$

它通过分离变量是容易积分的，其最后结果是

$$y = \begin{cases} \sqrt[n-1]{2\left[\frac{1}{n-1}-\cos x\right]+ke^{-(n-1)\cos x}} & n \neq 1 \\ ke^{\cos x+(\cos 2x)/2} & n = 1 \end{cases}$$

练习 6.3 b

1. 如果其中任何一个线性组合是 0, 也就是说

$$c_1 \sin n_1 x + c_2 \sin n_2 x + \cdots + c_k \sin n_k x = 0,$$

则通过乘 $\sin n_j(x), j=1,2,\cdots,k$, 并在 $[0,\pi]$ 上积分之后我们立即得到

$$c_j\int_0^x \sin^2 n_j x dx = 0.$$

从而对一切 j, $c_j=0$.

2. 用数学归纳法. 假设线性关系

$$c_1\phi_1+c_2\phi_2+\cdots+c_k\phi_k=0$$

成立, 如果 $P_k(x)$ 具有次数 n_k, 用 $e^{a_k x}$ 去除并微商 (n_k+1) 次, 其他 $e^{a_i x}$ 的系数的次数是不变的, 也就是它们保持不等于零.

3. 用 $(1-n)y^{-n}$ 乘方程的两边.

(a) $y^{-1}=cx+\log x+1$,

(b) $y^3=cx^{-3}+\dfrac{3a^2}{2x}$,

(c) $(y^{-1}+a)^2=c(x^2-1)$.

4. 如果我们表示 $y=y_1+u^{-1}$, 方程就归结为线性方程 $u'-(2py_1+Q)u=p$.

$$y=x-\frac{\exp[(1/2)x^4]}{c+\int_0^x x^2\exp[(1/2)x^4]dx}.$$

5. 让两个方程的右边相等, 得到 $y=x^2$ 并直接验证这是两个方程的积分.

6. 注意这是第 5 题的方程 (a), 从而是具有一个已知解的 Riccati 方程, 然后应用第 4 题的结果.

$$y=x^2-\frac{\exp[(2/3)x^3]}{c+\int_{-\infty}^x \exp[(2/3)x^3]dx}[=f(x,c)].$$

为了画出对应曲线族的图形, 首先区分曲线的两个分支

$$y^2+2x-x^4=0, y=\pm\sqrt{(x^3-2)x},$$

它划分平面为两个区域, 其中一个区域 $y' < 0$, 另一个区域 $y' > 0$, 这两个无限的曲线分支是渐近于抛物线 $y = \pm x^2$ 的, 通过证明下列两个关系, 断定所有积分曲线都渐近于这两条抛物线.

$$f(x,c) = -x^2 + o(1) \quad 当 \quad r \to +\infty(-\infty < c < +\infty)$$

与

$$f(x,c) = x^2 + o(1) \text{ 当 } x \to -\infty \quad (c \neq 0),$$

其中 $o(1)$ 表示趋近于零的函数.

7. 令 $y_1 - y_3 = a$, $y_1 - y_4 = b$, $y_2 - y_3 = c$, $y_2 - y_4 = d$ 则 $a + Pa(y_1 + y_3) + Qa = 0$, 于是

$$P(y_1 + y_3) = -Q - \frac{a'}{a},$$

$$P(y_1 - y_3) = aP$$

或

$$2Py_1 = aP - Q - \frac{a'}{a}.$$

类似地

$$2Py_1 = bP - Q - \frac{b'}{b}.$$

因此,

$$\frac{d\log(a/b)}{dx} = P(a-b) = -P(y_3 - y_4).$$

又类似地

$$\frac{d\log(c/d)}{dx} = -P(y_3 - y_4);$$

通过相减得

$$\log\frac{a/b}{c/d} = 常数.$$

8. 与前题证明中的关系式

$$\frac{d\log(a/b)}{dx} = p(y_4 - y_3)$$

进行比较.

特殊的方程的特解是 $y_1 = 1/\cos x, y_2 = -1/\cos x$;

$$y = \frac{1+ce^{2x}}{(1-ce^{2x})\cos x}.$$

9. (a) 和 (b) 的公共解 e^x 是通过从两个方程中消去 y'' 得到的.

(a) $c_1e^x + c_2x$,

(b) $c_1e^x + c_2\sqrt{x}$.

10. 曲线满足微分方程

$$n\left(x\frac{dx}{dy} - y\right) = r$$

或用极坐标 r, θ, 以 θ 作为自变量.

$$\frac{nr^2}{\cos\theta\dfrac{dr}{d\theta} - r\sin\theta} = r;$$

这也就是

$$\frac{d\log r}{d\theta} = \frac{n}{\cos\theta} + \tan\theta,$$

从而

$$r = a\frac{[\tan(\theta/2+\pi/4)]^n}{\cos\theta} = a\frac{(1+\sin\theta)^n}{\cos^{n+1}\theta}$$

(参看第一卷).

练习 6.3 c.

1. (a) $y = c_1e^x + c_2e^{-(1/2)x}\cos\dfrac{\sqrt{3}x}{2} + c_3e^{-(1/2)x}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x.$

(b) $y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{2x}.$

(c) $y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x.$

(d) $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^{\sqrt{2}x} + c_4e^{-\sqrt{2}x}.$

(e) 作变换 $x = e^t$:

$$y = c_1 x + c_2/x.$$

2. 根据代数学的基本定理, $f(z)$ 可以写成

$$f(z) = (z - a_1)^{\mu_1}(z - a_2)^{\mu_2}\cdots(z - a_k)^{\mu_k}$$

(参看第一卷第 321 页; 第二卷, 第 965 页), 其中 μ_ν 是正整数, 满足 $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k = n$ 而且

$$f(a_\nu) = f'(a_\nu) = \cdots = f^{(\mu_\nu - 1)}(a_\nu) = 0.$$

现在

$$L(e^{\lambda x}) = f(\lambda)e^{\lambda x}.$$

对此关系式微商 $(\mu_\nu - 1)$ 次, 并在结果中代入 $\lambda = a_\nu$, 我们得到 (参看 Leibnitz 法则).

$$L(e^{a_\nu x}) = f(a_\nu)e^{a_\nu x} = 0,$$

$$L(xe^{a_\nu x}) = [f'(a_\nu) + xf(a_\nu)]e^{a_\nu x} = 0,$$

$$L(x^2e^{a_\nu x}) = [f''(a_\nu) + 2xf'(a_\nu) + x^2 f(a_\nu)], e^{a_\nu x} = 0$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

$$L(x^{\mu_\nu - 1}e^{a_\nu x}) = \left[\binom{\mu_\nu - 1}{0} f^{(\mu_\nu - 1)}(a_\nu) + \binom{\mu_\nu - 1}{1} f^{(\mu_\nu - 2)}(a_\nu)x + \cdots + \binom{\mu_{\nu-1}}{\mu_{\nu-1}} f(a_\nu)x^{\mu_\nu - 1}\right]e^{a_\nu x} = 0.$$

于是我们有 n 个特解

$$e^{a_1 x}, xe^{a_1 x}, \cdots, x^{\mu_1 - 1}e^{a_1 x},$$

$$e^{a_2 x}, xe^{a_2 x}, \cdots, x^{\mu_2 - 1}e^{a_2 x},$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

$$e^{a_k x}, xe^{a_k x}, \cdots, x^{\mu_k - 1}e^{a_k x},$$

根据第 835 页第 2 题，它们是线性无关的.

3. 对微分方程进行变换之后，我们立即得到

$$(a_0b_0 - 1)P(x) + (a_0b_1 + a_1b_0)P'(x)$$
$$+ (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)P''(x) + \cdots = 0,$$

而且根据这个表达式，当 $a_0b_0 = 1$, $a_0b_1 + a_1b_0 = 0, \cdots$ 时，这是一个恒等式. 如果我们将 y' 换为 y, 则第二种情况归结为第一种情况.

4. (a) $1/(1+t^2) = 1 - t^2 + t^4 - \cdots$; 因此

$$y = P(x) - P''(x) = 3x^2 - 5x - 6.$$

(b) $1/(t+t^2) = (1/t) - 1 + t - t^2 + \cdots$; 因此,

$$y = \int P(x)dx - P(x) + P'(x) - P''(x)$$
$$= -\frac{2}{3} + x + \frac{1}{3}x^3.$$

5. (a) $y = \dfrac{3}{8}e^x$. (b) $y = \dfrac{1}{6}x^3e^x$.

6. $y = e^x\left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3}{2}x + \dfrac{7}{4}\right) + c_1e^{3x} + c_2e^{2x}$.

7. (b) 如果我们用 x^3 去乘方程，便出现在 (a) 中处理过的形式. 它有特解 $u = x^3$ 和 $y = x^5$; 因此，根据 (a), 第三个解通过 $W = 1 + x^2$ 给定，因此，一般解是

$$A(1+x^2) + Bx^3 + Cx^5.$$

练习 6.4

1. (a) $x^2+y^2+cx+1=0$ $(-\infty<c<\infty)$ 和直线 $x=0$,

(b) $x^2+2y^2=c^2$,

(c) 共焦圆锥曲线族 (参看第 280 页) 的微分方程求出来是

$$y'^2+\frac{x^2-y^2-a^2+b^2}{xy}y'-1=0,$$

当 y' 用 $-1/y'$ 代替时它是不变的; 椭圆族 $(-b^2<c<\infty)$ 正交于双曲线族 $(-a^2<c<-b^2)$,

(d) $y=\log|\tan(x/2)|+c$ 和垂直线 $x=k\pi$ (k 是整数),

(e) 曲线族 (曳物线)

$$x-c=\pm[\sqrt{a^2-y^2}-a\operatorname{arcosh}(a/y)]$$

和对 x 轴反射的同一个族.

2. (a) 抛物线族 $y=cx^2$,

(b) 双曲线族 $xy=c$.

3. (a) $y=x^2$, (b) $y=-x+x\log(-x)$, $(0>x>-\infty)$.

4. $y=xp+a\sqrt{1+p^2}-ap\operatorname{arsinh}p$.

5. $x=ce^{-p/a}+\frac{1}{2}p$.

$y=c(p+a)e^{-p/a}+\frac{1}{2}p(p+a)-\frac{1}{4}(p+a)^2$.

注意当 $c=0$ 由此得到抛物线 $y=x^2-(a^2/4)$. 这个结果的几何意义是什么?

6. (a) $y=\sin(x+c)$, 奇异解 $y=\pm1$.

(b) $x=\pm\frac{1}{2}\left(\arcsin y+y\sqrt{1-y^2}\right)+c$.

(c) $x=\pm\left(\sqrt{(2a-y)y}-2a\arctan\sqrt{\frac{y}{2a-y}}\right)+c$.

它是旋轮线族, 并可用参数形式表示为 $x=c+a(\phi-\sin\phi)$, $y=a(1-\cos\phi)$. 奇异解 $y=2a$.

(d) $x = \pm \int_0^y \sqrt{\frac{1+y^2}{1-y^2}} dy + c(-1 \leq y \leq 1)$;

奇异解 $y = \pm 1$(读者应该证明，这些曲线不是正弦曲线，对 x 的这个表达式，可以表示为第二类椭圆积分，参看第一卷第 454 页 4.1g 节，问题 1.)

7. $y = x \sin ax$; 奇异解 $y = x$ 和 $y = -x$.

8. 在各种情况下，让切线方程用形式 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 来给出.

(a) Clairaut 方程， $y = xp + kp/(p-1)$, 其中 $k = a + b$. 奇异积分是抛物线 $x^2 - 2xy + y^2 - 2kx - 2ky + k^2 = 0$, 它关于直线 $x = y$ 对称，而且分别在点 $(k, 0)$ 和 $(0, k)$ 与 x 轴和 y 轴相切.

(b) 设 $a = k\cos\theta$ 和 $b = k\sin\theta$, 其中 k 是在切线上所截取的长度，并用 θ 作为参数，则 Clairaut 方程是

$$y = xp \pm kp/\sqrt{1+p^2}.$$

这些曲线的参数方程是 $x = k\cos^3\theta, y = k\sin^3\theta$. 这是星形线 (第一卷，第 485 页， 4.1e 节，问题 7).

(c) 设 $|ab| = k$. 其 Clairaut 方程是 $y = xp + \sqrt{k|p|}$. 此曲线是两个直角抛物线族 $4xy = \pm k$ 的并.

练习 6.5

1. (a) 改写为 $\left(\frac{1}{2}y'^2\right)' = x$;

$$y = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a} + \frac{1}{2}a\log(x + \sqrt{x^2+a}).$$

(b) 改写为 $(y''^2)' = 1$;

$$y = \frac{4}{15}(x+a)^{5/2} + bx + c.$$

(c) 改写为 $(xy')' = 2$;

$$y = 2x + a\log x + b.$$

(d) 改写为 $x(y''^2)' = y''^2 - 2$ 并且引进 y''^2 作为新变量.

$$y = \frac{4}{15a^2}(ax+2)^{5/2} + bx + c, \quad (a \neq 0).$$

以及

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 + bx + c.$$

2. (a) $y = (ax+b)^{2/3}$,

(b) $y = \sqrt{a + (x+b)^2}$,

(c) $y = \sqrt{a(x+b)^2 + a^{-1}}$,

(d)

$$\int \frac{\partial y}{ae^y + y^2 + 2y + 2} = x + b,$$

以及 $y =$ 常数,

(e) 引进新变量 z 和 q, 其中 $z = y''$, $q = y'''$ 而且 $q(dq/dz) = y^{iv}$.

$$y = ax^2 + bx + c + \frac{2}{15}\left(\frac{x}{2} + d\right)^5.$$

(f) 同 (e) 小题方法:

$$y = ax + b + c\sin(x+d).$$

3. $MN = y + \sqrt{1+y'^2}$, $MC = -[(1+y'^2)^{3/2}/y'']$, 从而微分方程是

$$(1+y'^2)^2 y + ky'' = 0.$$

用通常方法容易由此导出

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{k + c - y^2}{y^2 - c} \ (c\ \text{为任意常数}).$$

曲面微分几何学 [1] 中的各种重要情况列举如下:

---

1) 参看 L. P. Eisenhart, A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces, reprinted by Dover (N.Y., 1960), pp. 270—274.

(1) $k=\kappa^2(>0)$, $c=-r^2(<0,r^2<x^2)$. 曲线是处处光滑和振动的，交错地与直线 $y=\pm\sqrt{\kappa^2-r^2}$ 相切，它像正弦曲线，但不是一样的.

(2) $k=\kappa^2,c=0$. 曲线是圆周，其半径为 κ, 中心在 x 轴上.

(3) $k=\kappa^2$, $c=r^2(>0)$. 曲线由一系列全等的弧组成，这些弧通过落在直线 $y=r$ 上的尖点，并与 $y=\sqrt{\kappa^2+r^2}$ 相切. 它像旋轮线，但不是一样的.

(4) $k=-\kappa^2(<0),c=r^2>\kappa^2$. 曲线是由一系列颠倒的弧组成，具有三个尖点在 $y=r$ 上并与 $y=\sqrt{r^2-\kappa^2}$ 相切.

(5) $k=-\kappa^2,c=r^2=\kappa^2$. 曲线是星形线.

(6) $k=-\kappa^2$. $c=r^2<\kappa^2$. 曲线有无穷多个尖点，并交替地与直线 $y=r$ 或 $y=-r$ 垂直.

4. 连续对圆周方程微商三次并用所得的方程消去 a,b,c 得到

$$(1+y^2)y''' - 3y'y''^2 = 0.$$

练习 6.6

1. (a) $c_0=a,c_1=a,c_\nu=\dfrac{a+1}{\nu!}(\nu\geqq 2)$.

(b) $c_0=\dfrac{\pi}{2}$, $c_1=1$, $c_{2\nu}=0$, $c_{2\nu+1}=\dfrac{2(-1)^\nu}{2\nu+1}$ $(\nu\geqq 1)$.

(c) $c_0=0$, $c_1=1$, $c_2=0$, $c_3=\dfrac{1}{3}$.

(d) $1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{4}+\cdots$.

2. 如果 $y(x)=\sum c_\nu x^\nu$, 则

$$c_{\nu+2}=-\frac{c_\nu}{(\nu+2)^2} \text{ 而且 } c_0=1,\ c_1=0;$$

$$y(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{2^{2\nu}\nu!^2}x^{2\nu}.$$

在第二卷第 611 页练习 4.12 第 7 题 $J_0(x)$ 的表达式中，如果用幂级数去代替 $\cos xt$ 并更换和与积分的顺序 (这为什么是允许的？) 我们得到

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}(-1)^{\nu}\int_{-1}^{+1}\frac{t^{2\nu}}{\sqrt{1-t^2}}dt;$$

$$\int_{-1}^{+1}\frac{t^{2\nu}}{\sqrt{1-t^2}}dt \text{ 的值是 } \frac{(2\nu)!\pi}{\nu!^2 2^{2\nu}}.$$

它可通过变换 $t = \sin\tau$ 求得 (见第一卷第 316 页). 由此可见 $y(x)$ 的幂级数和 $J_0(x)$ 恒等.

练习 6.7

1. 泊松公式给出具有边界值 $f(\theta)$ 的单位圆内部的位势函数 $u(r,\theta)$. 现在 $u(1/r,\theta)$ 也是具有同一边界值的位势函数 (见第 64 页第 4 题). 而且在单位圆外区域是有界的，于是表达式

$$\frac{r^2-1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\frac{d\alpha}{1-2r\cos(\theta-\alpha)+r^2}$$

是问题的解.

2. 位势是

$$\mu\log\frac{z+l+\sqrt{(z+l)^2+x^2+y^2}}{z-l+\sqrt{(z-l)^2+x^2+y^2}}.$$

因为在椭球 $z = l\alpha\cos\phi$, $\sqrt{x^2+y^2} = l\sqrt{\alpha^2-1}\sin\phi$ 上，位势是

$$\mu\log\frac{\alpha+1}{\alpha-1},$$

共焦椭球面

$$\frac{z^2}{l^2\alpha^2}+\frac{x^2+y^2}{l^2(\alpha^2-1)} = 1 \quad (1 \le \alpha \le \infty)$$

是等位面. 力线是正交轨线的, 从而它是共焦双曲面 (参看第 853 页练习 6.4 第 1 题 c.), 它们由同一个方程当 $0 \le \alpha \le 1$ 时给定, 并且 x 和 y 的比是常数.

3. 设 Σ 是半径为 ρ, 中心 (x, y, z) 落在 S 内的球, 因为 $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0$ 而且在由 Σ 和 S 所界的区域内 $\Delta u = 0$, 根据 Green 定理 (见第二卷第 748 页) 我们有

$$0 = \iint_s \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial(1/r)}{\partial n}\right) d\sigma$$

$$- \iint_\Sigma \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial(1/r)}{\partial n}\right) d\sigma,$$

其中, 在第一个积分中 n 是 S 的外法线, 而在第二个积分中 n 是 Σ 的外法线. 今在球面 Σ 上我们有

$$\frac{\partial(1/r)}{\partial n} = \frac{\partial(1/r)}{\partial r} = -\frac{1}{\rho^2},\ r = 常数 = \rho;$$

因此,

$$\iint_\Sigma \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \frac{1}{\rho}\iint_\Sigma \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0,$$

因为 u 是调和函数 (参看第 866 页); 另外还有

$$-\frac{1}{4\pi}\iint_\Sigma u\frac{\partial(1/r)}{\partial n} d\sigma = \frac{1}{4\pi\rho^2}\iint_\Sigma u d\sigma,$$

而且, 当 $\rho \to 0$, 这个表达式显然趋向于 $u(x, y, z)$, 这是因为它是 u 在 Σ 上的平均值.

练习 6.8

1. (a) $u = f(x) + g(y)$; f 和 g 是任意函数,

   (b) $u = f(x, y) + g(x, z) + h(y, z)$; f, g, h 是任意函数,

   (c) 通解是由特解加上齐次方程 $u_{xy} = 0$ 的通解得到的.

$$u = \int_0^x d\xi \int_0^y a(\xi, \eta) d\eta + f(x) + g(y),$$

其中 f 和 g 是任意的函数.

2. 如果 $u(x,y)=\sum a_{\nu\mu}x^{\nu}y^{\mu}$, 则

$$\alpha_{\nu+1,\mu+1}=\frac{\alpha_{\nu\mu}}{(\nu+1)(\mu+1)};$$

另外,

$$\alpha_{\nu 0}=\alpha_{0\nu}=0$$

对一切 $\nu\geq 1$ 而且 $\alpha_{00}=1$. 因此,

$$u(x,y)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{x^{\nu}y^{\nu}}{\nu!^2}=J_0(2i\sqrt{xy}),$$

其中 J_0 是 Bessel 函数. (参看第 859 页第 2 题)

3. $z^2(z_x^2+z_y^2+1)=1$.

4. 从两个参数的解族 $z=u(x,y,a,b)$, 用某种方式使 a 和 b 依赖于参数 t, 这样得到单参数族:

$$a=f(t)$$

$$b=g(t)$$

$$z=u(x,y,f(t),g(t)).$$

这个单参数族的包络是这样得到的, 先通过如下方程求 t,

$$0=z_t=u_af'+u_bg',$$

然后在 $z=u(x,y,f(t),g(t))$ 中, 将 t 用上述求得的 t 的表达式代替, 其结果又是 $F(x,y,z,z_x,z_y)=0$ 的解, 因为

$$z=u(x,y,a,b),$$

$$z_x=u_x+u_t\cdot t_x=u_x(x,y,a,b),$$

$$z_y=u_y+u_t\cdot t_y=u_y(x,y,a,b)$$

以及 $z=u(x,y,a,b)$ 满足方程 $F(x,y,z,z_x,z_y)=0$.

5. (a) 根据微分方程我们得

$$[f'(x)]^2+[g'(y)]^2=1$$

或

$$[f'(x)]^2=1-[g'(y)]^2.$$

因为左边不依赖于 y, 右边不依赖于 x, 所以两边都等于常数 (此常数应是正的或 0), 比如说 c^2; 也就是

$$[f'(x)]^2=c^2,\quad 1-[g'(y)]^2=c^2.$$

因此,

$$u=cx+\sqrt{1-c^2}y+b$$

是一个解，其中 c 和 b 是任意的，只要 $c^2\leq 1$.

(b) $u=f(x)+g(y)$ 给出

$$f(x)=\frac{1}{g'(y)}=\text{常数}=a,$$

于是

$$u=ax+\frac{1}{a}y+b$$

(其中 a 和 b 是常数). 如果 $u=f(x)g(y)$, 则

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^2=4\Big/\frac{d}{dy}[g(y)]^2=\text{常数}=2c;$$

于是，在这种情况下,

$$u=\sqrt{(2cx+a)\left(\frac{2}{c}y+b\right)},$$

其中 a,b,c 是任意常数.

(c) $u=x\sqrt{\dfrac{y}{x+k}}+y\sqrt{\dfrac{x+k}{y}}+k\sqrt{\dfrac{y}{x+k}}.$

6. 应用线性变换

$$x = \xi + \eta,$$

$$y = 3\xi + 2\eta,$$

$$u = f(y - 2x) + g(3x - y) + \frac{1}{12}e^{x+y}.$$

7. 令 $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{n/2}$ 并设 K 具有次数 h, 则

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = n(n+1)(x^2 + y^2 + z^2)^{(n-2)/2},$$

$$x\frac{\partial K}{\partial x} + y\frac{\partial K}{\partial y} + z\frac{\partial K}{\partial z} = hK.$$

因此, $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-(1+h)/z}$ 是一个解.

8. 依照第 846 页, 第一个方程的解具有如下形式,

$$z = f(x + at) + g(x - at).$$

在第二个方程中代入这个表达式以后, 我们有

$$f'g' = 0;$$

这也就是, 不是 f 等于常数就是 g 等于常数. 因此, $z = f(x + at)$ 或 $z = f(x - at)$ 是两个方程的通解.

9. (a) 根据微分方程, 有

$$\frac{\phi_{xx}}{\phi} = \frac{1}{c^2}\frac{\psi_{tt}}{\psi} = \lambda,$$

是一个常数, 仅当 $\lambda = -n^2$ 时, 边界条件得到满足, 其中 n 是整数而且

$$\phi(x) = \alpha \sin nx,$$

从而

$$\psi(t) = a \sin nct + b \cos nct.$$

于是，特殊类型的最一般特解是

$$u(x,t)=\sin nx(a\sin nct+b\cos nct).$$

(b) 用 $\sin A\sin B=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$ 和 $\sin A\cos B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)+\sin(A-B)]$，我们得到

$$\begin{aligned}u(x,t)=&\frac{1}{2}[a\cos n(x-ct)+b\sin n(x-ct)]\\&-\frac{1}{2}[a\cos n(x+ct)-b\sin n(x+ct)].\end{aligned}$$

(c) 假设解是 (a) 小题中所得到的特解的和，也就是

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx(a_n\sin nct+b_n\cos nct).$$

在 (ii) 中为了满足初始条件，我们应该有 $b_n=\alpha_n$, $a_n=0$.

对于 (i) 的解，依照第一卷第 629 页 (17) 式，也就是

$$\begin{aligned}\alpha_n&=\frac{1}{\pi}\Big[\int_{-\pi}^{0}-f(-x)\sin nxdx+\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx\Big]\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx.\end{aligned}$$

对于 (i) 中的具体函数，我们求得 $\alpha_{2\nu}=0$,

$$\alpha_{2\nu+1}=(-1)^{\nu}/\pi(2\nu+1)^2,$$

其中 $\nu=0,1,2,\cdots$;

从而

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\Big[\frac{\sin x\cos ct}{1^2}-\frac{\sin 3x\cos 3ct}{3^2}+\frac{\sin 5x\cos 5ct}{5^2}-\cdots\Big].$$

10. $u(x,t)=f(x-at)+g(x+at)$; 因此，对于 $x\geq 0$,

$$0=u(x,0)=f(x)+g(x)$$

$$0 = u_t(x,0) = -af'(x) + ag'(x);$$

对第一个方程微商并将结果与第二个方程比较，我们有

$$f'(x) = 0, \qquad g'(x) = 0$$

或

$$f(x) = \text{常数} = c, \quad g(x) = -c \text{ 对于 } x \geq 0.$$

此外，对于 $t \geq 0$,

$$\phi(t) = u(0,t) = f(-at) + g(at) = f(-at) - c;$$

这也就是， $f(\xi) = c + \phi(\xi/-a)$, 当 $\xi < 0$. 因为 $x + at \geq 0$ 总成立，又因此 $g(x+at) = -c$, 这样，如果 x 和 t 都是非负的，则有

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & \text{对于 } x - at \geq 0 \\ \phi\left(\dfrac{x-at}{-a}\right), & \text{对于 } x - at \leq 0. \end{cases}$$

第 七 章

练习 7.2 a

1. $\dfrac{2}{\sqrt{2g}}\sqrt{\dfrac{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}{y_1-y_0}}$.

2. $T = \displaystyle\int_{\sigma_0}^{\sigma_1} f(r)\sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2 d\sigma}$

练习 7.2 d

1. (a) 抛物线 $y = c^2 + \dfrac{x^2}{4c^2}$,

   (b) 中心在 x 轴上的圆周,

   (c) $y = c\sin\dfrac{x-a}{c}$.

2. $y=\frac{a}{x^{n-1}}+b$, 当 $n>1$ 和 $y=a\log x+b$ 当 $n=1$.

3. $y=a(x-b)^{n(n+m)}$, 若 $n+m\neq 0$;

$y=ae^{bx}$, 若 $n=-m$.

4. $ay''+a'y'+(b'-c)y=0$; 当 $b=$ 常数,

$$\int_{x_2}^{x_1} byy'dx=\frac{b}{2}(y_2^2-y_1^2)$$

只依赖于曲线 $y=y(x)$ 的端点.

5. $y_1-y_0<\frac{\pi}{2}$.

6. 在 x 固定情况下, 考虑 $F(x,y)$ 作为 y 的函数; 设此 y 的函数在 $y=\overline{y}$ 处有极小值. 则 $F(x,y)\geq F(x,\overline{y})$ 对于 $\overline{y}$ 的某个邻域成立并且 $F_y(x,\overline{y})=0$. 其中 $\overline{y}$ 将依赖于参数 x; [也就是, $\overline{y}=\overline{y}(x)$]. 因此, 对于邻域中的任一个函数 y, 我们有

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x,y(x))dx\geq\int_{x_0}^{x_1} F(x,\overline{y}(x))dx,$$

其中 $\overline{y}(x)$ 满足方程 $F_y(x,\overline{y}(x))=0$.

7. (a) $y=0$,

(b) 用 Cauchy 不等式. 对一切允许的 x,

$$1=y(1)-y(0)=\int_0^1 y'dx\leq\sqrt{\int_0^1 1^2dx}\sqrt{\int_0^1 y'^2dx}=\sqrt{I},$$

而且等号当 $y=x$ 时成立.

8. 在 Euler 方程中, 引进 $1/r$ 作为新的因变量, 其通解是直线 $1/r=a\cos\theta+b\sin\theta$.

练习 7.3 b

1. 如果 $v=1/f(r)$, 则 T 由第 889 页练习第 2 题给定:

$$F=f(r)\sqrt{\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2}.$$

沿着射线方向， ϕ 的 Euler 方程是

$$F_{\dot{\phi}} = \frac{\dot{\phi}^2 f^2 r^2 \sin^2 \phi}{F} = \text{常数} = C.$$

现在这样选择极坐标，使平面 $\phi = 0$ 通过初始点和端点，因为在这两点 $\phi = 0$, 所以根据中值定理，对于某个中间点我们有 $\dot{\phi} = 0$, 这就使 $C = 0$; 但是，另一方面， $\dot{\phi} = 0$ 对整个射线是成立的，即 $\phi \equiv 0$. 因此，整个射线必须落在平面 $\phi = 0$ 上.

2. 参看上面第 1 题, 用 ϕ 作参数, 我们要使 $r \int \sqrt{\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta}\, d\phi$ 取极小，其中 $r =$ 常数. 在 Euler 方程中引进 $\cot \dot{\theta}$ 作为新的因变量，导出通解 $\cot\theta = a\cos\phi + b\sin\phi$, 这个解对应于球面与通过其中心的平面的交线.

3. 参看上面第 1 题，这里用球坐标，我们有 $\theta =$ 常数，引进 r 作为因变量而 $\phi \sin\theta$ 作为自变量，便得出与第 856 页练习 7.2d 第 8 题中同样一个求极小值的积分 (球坐标为 r, θ, ϕ 的锥面上的点被映为极坐标是 $r, \phi\sin\theta$ 的平面上的点，并且这个映象保持弧长不变).

$$1/r = a\cos(\phi\sin\theta) + b\sin(\phi\sin\theta).$$

4. 此路径应该是直线. 因为对于给定的端点，它应该有极小的长度. 我们只要求得约束在两条给定曲线上的两动点之间的最短距离. 这是一个多元函数在辅助条件下求极小的问题 (参看第三章，第 371 页).

5. 参看下一个问题的解.

6. 设端点分别约束在曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 上, 则极小曲线的端点是 $(a_0, f(a_0)), (b_0, g(b_0))$, 令其方程是 $y = u(x)$, 其中 $u(a_0) = f(a_0)$, $u(b_0) = g(b_0)$. 因为 u 也是符合固定端点条件的极值曲线，所以它满足 Euler 方程. 考虑具有参数 ε 和端点 $(a, f(a)), (b, g(b))$ 的曲线族 $y = u(x) + \varepsilon\eta(x)$, 其中 $a = a(\varepsilon), b = b(\varepsilon)$ 是如下方程的解

$$f(a) = u(a) + \varepsilon\eta(a), g(b) = u(b) + \varepsilon\eta(b).$$

其相应的积分是

$$G(\varepsilon)=\int_{a(\varepsilon)}^{b(\varepsilon)}F(x,u(x)+\varepsilon\eta(x))\sqrt{1+[u'(x)+\varepsilon\eta'(x)]^2}dx.$$

对于极值曲线 u, 我们有条件 $0=G'(0)$. 与第 889—890 页所进行的那样, 我们来计算 $G'(0)$. 用分部积分消去 $\eta'(x)$, 因为 u 满足 Euler 方程, 所以有贡献的仅是这样两部分, 其一是对 G 的积分表达式中的上下限进行微商的结果, 其二是由边界项在分部积分中产生出的项. 注意, 对于 $\varepsilon=0$,

$$[f'(a)-u'(a)]\frac{da}{d\varepsilon}=\eta(a),[g'(b)-u'(b)]=\frac{db}{d\varepsilon}=\eta(b)$$

以及 $\eta(a)$,$\eta(b)$ 是任意的, 我们可求得关系式

$$0=1+u'(a_0)f'(a_0)=1+u'(b_0)g'(b_0),$$

此关系表示在端点的正交性.

练习 7.4a

1. 能量守恒定律给出

$$T+U=T=\frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\text{常数}=\frac{1}{2}c^2;$$

因此, $ds/dt=\text{常数}=c=\text{初速度}$.

又 Hamilton 原理断言如下积分的稳定特性.

$$\int_{t_0}^{t_1}(T-U)dt=\int_{t_0}^{t_1}Tdt=\frac{1}{2}c^2\int_{t_0}^{t_1}dt=\frac{1}{2}c\int_{s_0}^{s_1}ds;$$

由此可见, Hamilton 积分的稳定性蕴涵着路径长度是稳定的.

2. 设 t 是沿着曲线 C 确定的参数, 在 C 上具有参数 t 的点处, 作垂直于 C 的测地线, 在这测地线上, 我们用弧长 s 作为参数, s 从 C 上的点算起, 则 $x=x(s,t),y=y(s,t),z=z(s,t)$ 将表示这样得到的一条曲线: 对每一个 t, 在 C 上具有参数 t 的点处,

作垂直于 C 的测地线，沿着每条所作的测地线，截取一段固定的测地距离 s，因为 s 是弧长，我们有

$$x_s^2+y_s^2+z_s^2=1;$$

此外，根据第 911 页公式 (19)，x_{ss}, y_{ss}, z_{ss} 与 G_x, G_y, G_z 成比例，并且 $G(x,y,z)=0$ 对问题中的一切 s,t 成立. 在 C 上 (即对于 $s=0$)，按假设，我们有 $x_sx_t+y_sy_t+z_sz_t=0$，因此，

$$\begin{aligned}&\frac{d}{ds}(x_sx_t+y_sy_t+z_sz_t)\\&\quad=\lambda(G_xx_t+G_yy_t+G_zz_t)+x_sx_{st}+y_sy_{st}+z_sz_{st}\\&\quad=\lambda\frac{dG}{dt}+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x^2+y_s^2+z_s^2)=0.\end{aligned}$$

因此，$x_sx_t+y_sy_t+z_sz_t=$ 常数 $=0$ 对一切 s 成立. 这样就证明了由 $s=$ 常数表达的曲线 C' 垂直于测地线.

练习 7.4 b

1. 从测地线的微分方程 (第 911 页) 我们发现，对于一个柱面 (也就是当 G 与 z 无关时) $\dfrac{dz}{dt}$ 是常数；因此，柱面上的测地线与 xy 平面成一定角.

2. (a) $g(x)-\dfrac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}=0,$

(b) $g(x)-\dfrac{6y''(y''^2+4y'y''')}{(1+y'^2)^4}+\dfrac{2y^{(4)}}{(1+y'^2)^3}+\dfrac{48y'^2y''^3}{(1+y'^2)^5}=0,$

(c) $y+y''+y^{(4)}=0,$

(d) $(2-y'^2)y''=0.$

3. (a) $\phi d=(ax+by)\phi_x+(b_x+c_y)\phi_y+a\phi_{xx}+2b\phi_{yy}+c\phi_{yy},$

(b) $\Delta^2\phi=0,$

(c) $\Delta^2\phi=0.$

4. $\dfrac{au''+a'u'+u(b'-c)}{u}=\lambda=$ 常数.

5. (a) Euler 方程给出

$$f+2\lambda u=0;$$

根据这个方程和 $\int_0^1 \phi^2 dx=K^2$, 我们有

$$\lambda=\pm\frac{\sqrt{\int_0^1 f^2 dx}}{2K},\quad u=\pm\frac{Kf}{\sqrt{\int_0^1 f^2 dx}}.$$

(b) 对于任何一个连续的许可函数 ϕ 我们有

$$I=\int f\phi dx\le\sqrt{\int_0^1 f^2 dx}\cdot\sqrt{\int_0^1 \phi^2 dx}=K\sqrt{\int_0^1 f^2 dx},$$

其中等号当 $\phi=u$ 时成立.

8. 根据必要条件第 888 页 (6b), 我们求得

$$\int_{x_0}^{x_1}(F_{yy}\eta^2+2F_{yy'}\eta\eta'+F_{y'y'}\eta'^2)dx\ge 0$$

对于一切在 $x=x_0$, $x=x_1$ 为 0 的 $\eta(x)$ 成立. 取 h 和 ξ 使得 $x_0<\xi-h<\xi<\xi+h<x_1$, 当 $|x-\xi|<h$ 时, 定义 $\eta(x)$ 是

$$[(x-\xi)^2-h^2]^2 h^{-7/2},$$

而在其他地方是 0. 当 $h\to 0$, 此积分趋近于 $cF_{y'y'}(\xi,u(\xi),u'(\xi))$, 其中 c 是正常数.

9. 这个问题实际上等同于标准的等周问题, 其解是圆弧, 但是在本题中, 因为解是 x 的函数, 所以允许长度有一上界, 即,

$$\frac{2[(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2]}{x_1-x_0}\arctan\frac{x_1-x_0}{|y_1-y_0|}.$$

第 八 章

练习 8.1

1. (a) 设 $\alpha = a_1 + ia_2$, $\beta = b_1 + ib_2$. 以乘法为例

$$\overline{\alpha\beta} = (a_1b_1 - a_2b_2) - i(a_1b_2 + a_2b_1) = \overline{\alpha}\overline{\beta},$$

(b) 根据 (a), 通过对部分和的实部和虚部取极限就可直接得出.

2. (a) 根据第 1 题, $\overline{P(\alpha)} = P(\overline{\alpha})$; 因此, $P(\alpha) = 0$ 蕴涵 $P(\overline{\alpha}) = 0$ 并且反之亦然.

(b) 根据长除法, 将 $P(z)$ 表示为如下形式

$$P(z) = (z - 2az + a^2 + b^2)Q(z) + cz + d,$$

其中 $Q(z)$ 是具有实系数的多项式, 而且 c 和 d 是实数, 在此方程中令 $z = \alpha$, 得到 $c\alpha + d = 0$, 从而,

$$ca + d = 0 \text{ 和 } icb = 0.$$

因为 $b \neq 0$, 所以 $c = 0$. 因此, $d = 0$.

3. (a) 用如下形式的圆周方程

$$(z - z_0)(\overline{z} - \overline{z}_0) = r^2.$$

则

$$z_0 = \frac{\alpha - \lambda^2\beta}{1 - \lambda^2}, \quad r = \frac{\lambda|\alpha - \beta|}{|1 - \lambda^2|}.$$

若 $\lambda = 1, z = x + iy$, 方程成为直线方程 $ax + by = c$, 其中 $a = 2\text{Re}(\alpha - \beta)$, $b = 2\text{Im}(\alpha - \beta)$, $c = |\alpha|^2 - |\beta|^2$.

(b) 先将点变换反演求得

$$z = \frac{\beta - \delta z'}{\gamma z' - \alpha};$$

然后证明

$$|z - z_1| = \lambda |z - z_2|$$

变成

$$|z' - z_1'| = \lambda \left| \frac{\gamma z_1' - \alpha}{\gamma z_2' - \alpha} \right| |z' - z_2'|.$$

4. 对于 $x \geq 0$.

5. 用比较判别法

6. 对于 $n > 0$, 在 $\cos^2 z + \sin^2 z$ 的展开式中 z^n 的系数是

$$(-1)^{n/2} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^\nu}{\nu!(n-\nu)!} = \frac{(-1)^{n/2}}{n!} \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} = 0$$

[参看第一卷第 123 页. 问题第 1 题 (b)].

7. 此级数当且仅当 $|z| < 1$ 时收敛. 因为若 $|z| = \theta < 1$, 则

$$\left| \frac{z^\nu}{1 - z^\nu} \right| \leq \frac{\theta^\nu}{1 - \theta^\nu} \leq \frac{1}{1 - \theta} \theta^\nu,$$

因此我们可以与几何级数比较; 若 $|z| > 1$ 则当 ν 无限增加时 $\frac{z^\nu}{1 - z^\nu}$ 趋于 -1, 但是在收敛级数中一般项必须趋于 0, 若 $|z| = 1$, 则级数每一项不是没有定义就是绝对值 $\geq \frac{1}{2}$, 因此这时级数不能收敛.

练习 8.2

1. 设 $f(z) = u + iv$, $g(z) = s + it$. 以取乘积为例, 对于

$$U(x, y) = \text{Re}\,\{f(z)g(z)\} = us - vt$$

$$V(x, y) = \text{Im}\,\{f(z)g(z)\} = ut + vs.$$

我们得到

$$U_x = u_x s + u s_x - (v_x t + v t_x)$$

$$= v_y s + u t_y + u_y t + v s_y$$

$$= ut_y + u_y t + v_y s + v s_y = V_y,$$

等等.

2. 对于 $f(z) = u + iv$. 对 $u^2 + v^2 =$ 常数进行微商之后，我们就得到一对方程

$$uu_x + vv_x = 0, \qquad uu_y + vv_y = 0.$$

通过 Cauchy-Riemann 方程，把第二个方程换成只含有关于 x 的微商，我们得到只有以 $u_x = v_x = 0$ 为解的方程组，(除非 $u^2 = v^2 = 0$). 从而 $u_y = v_y = 0$, 因此结果成立.

3. (a)—(c) 到处连续；不可微.

(d) 对 $z \neq 0$ 连续；不可微.

4. 若 $z = re^{i\phi}, \zeta = \xi + i\eta$, 则

$$\xi = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\phi$$

$$\eta = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\phi.$$

若 $r =$ 常数 $= c$, 则

$$\frac{\xi^2}{\frac{1}{4}\left(c + \frac{1}{c}\right)^2} + \frac{\eta^2}{\frac{1}{4}\left(c - \frac{1}{c}\right)^2} = 1;$$

若 $\phi =$ 常数 $= c$, 则

$$\frac{\xi^2}{\cos^2 c} + \frac{\eta^2}{\cos^2 c - 1} = 1$$

(参看第 279 页第 8 题).

5. 根据 8.1 节，第 3 题 (b), 这变换将圆周映射到圆周. 因为两个点是不动的，所以通过这两点的圆族在变换和它的反变换下都变换到同一圆族，又因为映射是共形的，所以圆族的正交族也变换为自身.

6. 设 $z=x+iy,\zeta=1/z=\xi+i\eta$. 于是

$$\xi=\frac{x}{x^2+y^2},\quad \eta=\frac{-y}{x^2+y^2}.$$

我们将反演看作是复合映射 $gf(z)$, 其中 $f(z)=\dfrac{1}{z}$; $g(\zeta)=\bar{\zeta}$ 是关于 x 轴的反射. 因为反射保持角的大小, 仅符号改变, 所以是共形映射, 而 $1/z$ 是解析的, 角的大小与符号都保持不变, 故在乘积映射 $gf(z)$ 中, 角度不变而符号变了, 因此反演是共形映射. 反射把圆周映射到圆周, 而 $1/z$ 作为一般线性变换的特例 (参看第 5 题) 也同样把圆周映到圆周, 因此, 反演也是把圆周映射到圆周. 反演的 Jacobian 是反射的 Jacobian 和 $1/z$ 的 Jacobian 的乘积, 从而它的值是

$$-|f'(z)|^2=-\frac{1}{|z|^2}=\frac{-1}{(x^2+y^2)^2}.$$

7. $|\zeta|^2=\zeta\bar{\zeta}=\dfrac{\alpha\overline{\alpha}z\overline{z}+\beta\overline{\beta}+(\alpha\beta z+\overline{\alpha}\overline{\beta}\overline{z})}{\beta\overline{\beta}z\overline{z}+\alpha\overline{\alpha}+(\alpha\beta z+\overline{\alpha}\overline{\beta}\overline{z})}.$

现在对于 $\alpha\overline{\alpha}-\beta\overline{\beta}=1$, 其分母和分子之差为

$$z\overline{z}-1;$$

也就是当 $|z|>1$ 时分母大于分子, 而 $|z|<1$ 时分母小于分子. 如果 $\beta\overline{\beta}-\alpha\overline{\alpha}=1$, 情形恰好相反.

8. 首先, 通过 $\zeta=az+b$ 变换到单位圆; 然后应用变换

$$\zeta'=i\frac{1+\zeta}{1-\zeta}.$$

9. 用 $\zeta_i-\zeta_j=\dfrac{(\alpha\delta-\beta\gamma)(z_i-z_j)}{(\gamma z_i+\delta)(\gamma z_j+\delta)}.$

练习 8.3

1. (a) 将被积函数写成这样形式

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{z-1}+\frac{3}{z+1}\Big),$$

括号中的第一项在 $z=-1$ 邻域内解析；因此，沿着中心在 -1 的小圆它的积分为 0, 类似地，其中第二项沿着中心在 1 的小圆积分是 0, 为了计算围绕 1 的圆周上的积分，设 $z=re^{i\theta}$, 得到 πi, 类似地，对于围绕 -1 的小圆，积分值为 $3\pi i$,

(b) 取一路径一方面环绕 1, 另一方面环绕 -1. 但环绕前者的次数是环绕后者次数的 3 倍. 如图 8.12 所示.

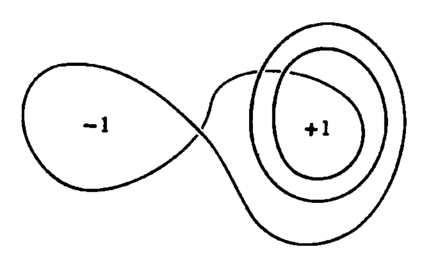


图 8.12

2. $\alpha^z\cdot\alpha^\zeta=\exp[z(\log\alpha+2\pi i)]\exp[\zeta(\log\alpha+2m\pi i)]$, 而 $\alpha^{z+\zeta}=\exp[(z+\zeta)(\log\alpha+2k\pi i)]$.

如果所用的对数始终是同一分支，也就是 $n=m=k$, 这样指数的加法成立. 这是最理想的，然而，仅在很特殊的情况下，我们才能做到. 原因在于如果加法定理成立，则

$$k(z+\zeta)=nz+m\zeta+p,$$

其中 p 是某个整数. 若把 z 和 ζ 看作两个分量的向量时是线性无关的，且 $n\neq m$, 则 $z=a+ib$ 和 $\zeta=\alpha+i\beta$ 的分量应受如下限制，即

$$\frac{(m-n)(a\beta-ab)}{\beta+b}=p$$

是一整数. 而当 $n=m\neq k$ 时，则要求 $\beta+b=0$. 这两个条件一般都不满足. 对于第二个法则，

$$z^a\zeta^a=\exp[\alpha(\log z+2n\pi i)]\exp[\alpha(\log\zeta+2m\pi i)]$$

$$= \exp\{\alpha[\log z + \log\zeta + 2(n+m)\pi i]\}$$

而

$$(z\zeta)^a = \exp\{\alpha[\log(z\zeta) + 2k\pi i]\}.$$

在此，即使 $k = n + m$ 等式也未必成立. 这是因为，若 $z = re^{i\theta}$ 和 $\zeta = \rho e^{i\phi}$, 条件 $-\pi < \theta \leq \pi, -\pi < \varphi \leq \pi$ 不一定使 $\theta + \phi$ 满足此不等式.

对于第三法则，

$$(\alpha^z)^\zeta = e^{\zeta \log \alpha^z}$$

$$= \exp\{\zeta[z(\log\alpha + 2n\pi i) + 2m\pi i]\}$$

$$= \exp\{z\zeta \log\alpha + 2z\zeta n\pi i + 2\zeta m\pi i\}.$$

类似地，

$$(\alpha^\zeta)^z = \exp(z\zeta \log\alpha + 2z\zeta p\pi i + 2zq\pi i)$$

和

$$\alpha^{z\zeta} = \exp(z\zeta \log\alpha + 2z\zeta r\pi i),$$

其中 m, n, p, q, r 是任意整数，于是仅当 $m = q = 0$ 和 $n = p = r$ 时，等式才有可能成立.

我们可以说理想情况是存在的：挑选所涉及的多值函数的分支以使得指数法则成立，但是我们必须谨慎地选择适当的分支.

3. (a) i^i 的值是 $\exp\left[\left(2n - \frac{1}{2}\right)\pi\right]$, 其中 n 为任意整数.

(b) 设 $\zeta = \xi + i\eta$, $z = re^{i\theta}$, $-\pi < \theta \leq \pi$ 和

$$a = \log r = \log|z|.$$

则

$$z^\zeta = \exp[a\xi - (\theta + 2k\pi)\eta] \exp\{i[a\eta + \xi(\theta + 2k\pi)]\}.$$

其条件是对于每一个整数 k 的选择, $a\eta+\xi(\theta+2k\pi)$ 是 π 的整数倍, 取 $k=0,1$ 我们得到 $\xi=j/2$, 其中 j 是任意整数, 并因此, 对于 $a\neq 0(r\neq 1)$

$$\eta=\left(l\pi-\frac{1}{2}j\theta\right)\Big/a,$$

其中 l 可以是任何整数, 于是, 对于一切不在单位圆上的 z 及每一对整数 j 和 l, 存在一个指数 $\zeta(j,l)$ 使得 z^ζ 的一切值都是实数. 如果 $a=0$, 则以上加在 η 上的条件, 由条件 $\xi\theta=p\pi$ 代替, 其中 p 是任意整数而 η 是任意的. 若 $p\neq 0$, 我们看到 $\theta=2\pi p/j$ 必须是 2π 的有理数倍; 若 $p=0$, ξ 应为 0, 因此 θ 可以任意.

(c) 能. 设 $z=x+iy,\zeta=\xi+i\eta$, 其中 $y=\eta=0$. 当 $x>0$ 时, 由 (b) 的解给出 $\xi=j/2$, j 是任意整数. 当 $x<0$, (b) 的解仅给出整数值 $\xi=n$.

4. 对于 $z=x+iy$, 我们当然可以在积分号下对 x 和 y 进行微商, 因为所得的微商关于参数是连续的, 而且微商的积分在其下限 $t=0$ 处的收敛性对于 $x>\varepsilon>0$ 是一致的. 又由于被积函数满足 Cauchy-Riemann 方程, 因此积分之后还是满足的. 通过分部积分给出函数方程.

5. 应用第一卷第 590 页中的定理来判断此级数绝对收敛.

6. (a) 环绕小圆周积分的值, 当圆周逐渐变小时趋近于 0, 如果我们表示单位圆上的点为 $z=e^{i\theta}$ 以及分别表示坐标轴上的点为 $z=x$ 和 $z=iy$, 则由 Cauchy 定理得到

$$\begin{aligned}0=&\int_0^1\left(x+\frac{1}{x}\right)^m x^{n-1}dx+i\int_0^{\pi/2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})^m e^{in\theta}d\theta\\&-i\int_0^1\left(iy+\frac{1}{iy}\right)^m\cdot(iy)^{n-1}dy\\=&\int_0^1\left(x+\frac{1}{x}\right)^m x^{n-1}dx+i\cdot 2^m\int_0^{\pi/2}\cos^m\theta e^{in\theta}d\theta\\&-e^{i\pi(n-m)/2}\int_0^1\left(-y+\frac{1}{y}\right)^m y^{n-1}dy;\end{aligned}$$

通过让方程的虚部相等，我们得到

$$2^m\int_0^{\pi/2}\cos^m\theta\cos n\theta d\theta=\sin\frac{\pi(n-m)}{2}\int_0^1\left(-y+\frac{1}{y}\right)^m y^{n-1}dy$$

$$=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi(n-m)}{2}\int_0^1(1-\eta)^m\eta^{(n-m-2)/2}d\eta$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}(n-m)\right)B\left(m+1,\frac{n-m}{2}\right)$$

(参看第 646 页).

(b) 利用关系式

$$\left(\sin\frac{(n-m)\pi}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-m}{2}\right)=\frac{\pi}{\Gamma(1-\frac{n-m}{2})}.\qquad \text{(参看第 645 页)}$$

练习 8.4

1. 被积函数有对 z 的连续微商, 因此可以在积分号下求微商. 参看 1.8b 节.

2. 容易看出

$$h(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(\zeta)z^n}{(\zeta-z)\zeta^n}d\zeta$$

是 z 的解析函数, 通过在积分号下求微商, 并应用 Leibnitz 法则 (参看第一卷, 第 229 页), 我们求得 $h^{(\mu)}(z)$ 是

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\mu}{\nu}\nu!n\cdot(n-1)\cdots(n-\mu+\nu+1)\int\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{\nu+1}}\frac{z^{n-\mu+\nu}}{\zeta^n}d\zeta$$

$$=\frac{\mu!}{2\pi i}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\mu-\nu}\int\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{\nu+1}}\frac{z^{n-\mu+\nu}}{\zeta^n}d\zeta,$$

其中只有 $\mu-\nu\le n$ 的项不为 0, 因为此外 $\binom{n}{\mu-\nu}$ 为 0. 另一方面, 当 $z=0$ 时, $\mu-\nu<n$ 的项为 0; 因此, 若 $\mu<n$, 则无非零

项. 于是 $h^{(\mu)}(0)=0$. 若 $\mu\geq n$, 只保留 $\mu-\nu=n$ 的项. 于是

$$h^{(\mu)}(0)=\frac{\mu!}{2\pi i}\int\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta^{\mu+1}}=f^{(\mu)}(0).$$

3. 根据 Cauchy-Riemann 方程, v 的偏微商 v_x 和 v_y 是给定的; 具有这些微商的函数 v 是存在的, 因为可积条件 $u_{xx}+u_{yy}=0$ 被满足, [参看第 113 页公式 (75a,b)]. 因此除了一个附加常数之外, v 被唯一地确定, 而且通过如下曲线积分给出

$$v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}(v_y dy+v_x dx)+c.$$

根据 Cauchy-Riemann 方程 v 也是位势函数.

4. 在 $z=1$ 为 πi; 在 $z=-1$ 为 $3\pi i$(8.3 节, 练习第 1 题).

5. 选取半径为 R, 中心在 O 点的圆周, $R=|\zeta|$ 如此之大, 使得 $R>2|z|$. 则

$$\left|\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta}\right|=\frac{|z|}{|\zeta|^2|1-z/\zeta|}<\frac{2|z|}{R^2}.$$

由此得到积分的界

$$|f(z)-f(0)|\leq 2M|z|/R,$$

再通过 R 趋于 ∞ 取极限.

6. $|a_\nu|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(t)}{t^{\nu+1}}dt\right|\leq\frac{1}{2\pi}\frac{M}{\rho^{\nu+1}}\cdot 2\pi\rho,$

其中 C 是半径为 ρ, 环绕原点的圆周.

7. 根据假设 $|\alpha_n|>0$, 因此,

(i) $$\begin{aligned}|p(z)|&=|z|^n\left|\alpha_n+\frac{\alpha_n-1}{z}+\cdots+\frac{\alpha_0}{z^n}\right|\\&>\frac{1}{2}|z|^n|\alpha_n|\end{aligned}$$

只要我们取

$$|z|>\max\left\{1,2\frac{|\alpha_{n-1}|+\cdots+|\alpha_0|}{|\alpha_n|}\right\};$$

事实上，这时，

$$\left|\alpha_n+\frac{\alpha_n-1}{z}+\cdots+\frac{\alpha_0}{z^n}\right|\geq|\alpha_n|-\left\{\frac{|\alpha_n-1|}{|z|}+\cdots+\frac{|\alpha_0|}{|z^n|}\right\}$$

$$\geq|\alpha_n|-\frac{|\alpha_n-1|+\cdots+|\alpha_0|}{|z|}>\frac{|\alpha_n|}{2}.$$

现在，因为 $P(z)$ 没有根， $f(z)$ 是在全平面有定义的，又 $|z|>1$ 所以

$$|f(z)|<\frac{2}{|\alpha_n|\ |z|^n}<\frac{2}{|\alpha_n|}.$$

从而推出 $f(z)$ 是有界的，因此 $f(z)$ 是常数. 根据上面不等式中的第一个，我们有 $f(z)=0$, 这与 $f(z)\cdot p(z)=1$ 矛盾.

8. (a)—(b) f'/f 的留数在 α 点是 $2\pi i$. 设 $f(z)=(z-\alpha)^p\phi(z)$, 其中 ϕ 是解析的， $\phi(\alpha)\neq 0$ 而且 p 分别在 (a) 和 (b) 中表示零点的阶数 n 和极点阶数 $-m$. 则

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{p\phi(z)+(z-\alpha)\phi'(z)}{(z-\alpha)\phi(z)}.$$

因此， Cauchy 积分公式表明当 $z=\alpha$ 时， I 取值为

$$[p\phi(z)+(z-\alpha)\phi'(z)]/\phi(z).$$

即 $I=p$.

(c) 应用留数定理 (第 949 页).

9. (a) 根据第 8 题，方程 $P(z)+\theta Q(z)=0$ 的根的个数是

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{P'(z)+\theta Q'(z)}{P(z)+\theta Q(z)}dz.$$

对于每一个 $\theta, 0\leq\theta\leq 1$, 在 C 上任何一点处分母不为 0, 因此整个积分是 θ 的连续函数. 又因为它的值总是整数，所以是常数，因此对 $\theta=0$ 和对 $\theta=1$ 有同一个值.

(b) 若

$$|a|<r^4-\frac{1}{r},$$

则 $r>1$; 因此方程 $z^5+1=0$ 所有 5 个根都在圆周 $|z|=r$ 内部; 如果我们令 $P(z)=z^5+1$, $Q(z)=az$, 则在圆周 $|z|=r$ 上我们有

$$|Q(z)|=|a|r<r^5-1<|z^5+1|=|P(z)|.$$

10. 根据第 7 题 (i) 式中 $|P(z)|$ 的下界估计, 可围绕原点作半径充分大的圆周, 使它在圆周上或圆外不能有根, 应用在第 7 题 (i) 式中所用的估计方法, 我们求得

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{n}{z}+R(z),$$

其中余项 $R(z)$ 在半径 r 足够大的圆外满足 $|R(z)|<M/|z|^2$. 取 r 充分大使得 P 的一切根都落在 $|z|=r$ 内部, 应用第 8 题 (c) 的结果, 根的个数等于如下半径为 r 的圆上的积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f'(z)}{f(z)}dz=n+\frac{1}{2\pi i}\int R(z)dz.$$

又因为

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int R(z)dz\right|<\frac{M}{r},$$

所以当 $r\to\infty$ 时, 余项的积分趋向于 0.

11. (a) 仿效第 8 题 (a) 的解法.

(b) 若根是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_j$, 又若极点位于 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k$, 并且它们分别有重数 $n_1,n_2,\cdots,n_j$ 和 $m_1,m_2,\cdots,m_k$, 则积分值为

$$n_1\alpha_1+n_2\alpha_2+\cdots+n_j\alpha_j-m_1\beta_1-m_2\beta_2-\cdots-m_k\beta_k.$$

12. 因为 $f(z)=e^z$ 是到处解析的, $f'(z)/f(z)=1$, 因此, 在任何一个半径无论多大的圆周上, 8(a) 中的积分必须是零, 从而 $f(z)$ 不可能有根.

练习 8.5

1. (a) 在 α 的邻域中将函数展开为

$$f(z)=a_0+a_1(z-\alpha)+\cdots+a_{n-1}(z-\alpha)^{n-1}+\cdots$$

和

$$g(z) =(z-\alpha)^{-n}[c_{-n}+c_{-n+1}(z-\alpha)+\cdots$$
$$+c_{-1}(z-\alpha)^{n-1}+\cdots],$$

我们得到留数

$$2\pi i\sum_{\nu=0}^{n-1}a_\nu c_{-\nu-1}.$$

(b) 在上述的解中，利用 $c_k=0$ 当 $k>-n$ 时成立，且

$$a_{n-1}=f^{(n-1)}(\alpha)/(n-1)!.$$

2. 假设

$$\begin{aligned}f(z)&=(z-\alpha)^2\phi(z)\\&=(y-\alpha)^2\times\left[\frac{f''(\alpha)}{2}+\frac{f'''(\alpha)}{6}(z-\alpha)+\cdots\right],\end{aligned}$$

并确定 $1/\phi(z)$ 的展开式中的一阶项系数.

3. (a) $\pi/\sqrt{2}$.

(b) 对于在 $e^{i\pi/4}$ 和 $e^{i3\pi/4}$ 的留数应用第 2 题的结果得到 $3\pi/4\sqrt{2}$. 在此，考虑到 $f(z)=(1+x^4)^2$, $f''(z)=24x^2(1+x^4)+32x^6$ 和 $f'''(z)=48x(1+x^4)+9\cdot 32x^5$.

(c) 点 $z_k=\omega^{2k-1}$ 是被积函数的简单极点，$(k=1,2,\cdots,2n)$, 其中 $\omega=e^{i\pi/2n}$ 是 1 的 $4n$ 次主方根. 当 $k\leq n$ 时极点位于上半平面. 于是根据公式 (8.21b) 积分等于

$$I=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k^{2m}}{2nz_k^{2n-1}}=-\frac{\pi i}{n}\sum_{k=1}^{n}z_k^{2m+1},$$

其中我们应用了 $z_k^{2n}=-1$. 在这最后的和式中代入 z_k 的表达式，我们得到 I 的几何级数形式，然后求和得到结果.

$$I=-\frac{\pi i}{n\omega^{2m+1}}\sum_{k=1}^{n}[\omega^{4m+2}]^k=-\frac{\pi i\omega^{2m+1}}{n}\frac{1-(\omega^{4m+2})^n}{1-\omega^{4m+2}}$$

$$=\frac{\pi}{n}\frac{2i}{\omega^{2m+1}-\omega^{-(2m+1)}}=\frac{\pi}{n\sin[\pi(2m+1)/2n]}.$$

4. 公式左边是函数 $z^k/f(z)$ 除以 $2\pi i$ 的留数之和，因此等于

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{z^k}{f(z)}dz,$$

其中积分路径是包围所有根 α_ν 在内的圆周．但是，这样的圆周当中心保持不动，半径趋向无限大时，积分值趋向于 0.

5. 因为 $x\cos x$ 是奇的而 $x\sin x$ 是偶的，所以积分等于

$$\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2+c^2}dx.$$

$ze^{iz}/2i(z^2+c^2)$ 在上半平面的留数是 $\frac{1}{2}\pi e^{-|c|}$. 取

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

并在整个闭轨道 C 上积分，此处 C 由 $-r$ 到 r 间的实轴与以此线段为直径的上半圆所组成．我们只需证明在半圆上的积分随 $r\to\infty$ 而趋于 0，为此，我们估计半圆 $(0\le\theta\le\pi)$ 上的积分，

$$J=\int_0^{\pi}\frac{r^2e^{i\theta}e^{-r\sin}e^{ir\cos\theta}}{r^2e^{2i\theta}+c^2}d\theta.$$

选择 r 如此大使得 $|r^2e^{2i\theta}+c^2|>\frac{1}{2}r^2$: 例如选 $r^2>2c^2$. 由此得到

$$|J|<4\int_0^{\pi/2}e^{-r\sin\theta}d\theta<4\int_0^{\pi/2}e^{-2r\theta/\pi}d\theta<\frac{2\pi}{r}.$$

杂题

1. $(z_1-z_3)/(z_2-z_3)$ 必须是实的.

2. 设 $\arg z$ 是 $z=re^{i\theta}$ 的幅角；也就是 $\arg z=\theta+2n\pi$. 线段 $\overrightarrow{\alpha\beta}$ 与线段 $\overrightarrow{\alpha\gamma}$ 之间的夹角是

$$\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}+2p\pi,$$

其中 p 是整数. 由给定方程得知

$$\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=-\arg\frac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}+2n\pi.$$

于是, 如果取连接 α 和 β 的线段为三角形的底边, 我们看到底与两边的夹角大小相等符号相反. 反之, 底角的相等得出给定的方程.

3. $$\Delta=\frac{(z_1-z_3)/(z_2-z_3)}{(z_1-z_4)/(z_2-z_4)}$$

必须是实的, 这是因为如果 C 是过 z_1, z_2, z_3 三点的圆周, 我们可以通过线性变换 $\zeta=(\alpha z+\beta)/(\gamma z+\delta)$ 将 C 变到实轴 (参看 8.2 节练习第 8 题). 根据 8.2 节练习第 9 题, Δ 是不变的. 因此, z_4 的像与 z_1, z_2, z_3 的像落在同一圆周上的必要条件是它是实的, 而这等价于 Δ 是实的.

4. 要证明的等价性是

$$\sqrt{|z_1-z_2||z_3-z_4|}+\sqrt{|z_2-z_3||z_1-z_4|}=\sqrt{|z_1-z_3|\,|z_2-z_4|}$$

或

$$1+\sqrt{\left|\frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{(z_2-z_3)(z_1-z_4)}\right|}=\sqrt{\left|\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_2-z_3)(z_1-z_4)}\right|}.$$

现在平方根下的表达式在线性变换下是不变的 (参看 8.2 节练习第 8.9 题). 如果通过适当的线性变换将圆周变为实轴, 我们就只需证明关系

$$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD$$

对直线上的四个点成立, 而这是显然的.

5. $\zeta=e^{iz}$ 取遍除了 $\zeta=0$ 以外的一切值, 这从关系式 $e^{iz}=e^{-y}(\cos x+i\sin x)$ 容易看到. 现在我们应该选择 ζ 使得

$$c=\cos z=\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right);$$

这个二次方程总是有解

$$\zeta=c\pm\sqrt{c^2-1}.$$

并且这个解不等于零，于是对应的 z 存在.

6. 参看第 5 题. 若 $\zeta = e^{iz}$, 则

$$\tan z = \frac{1}{i}\frac{\zeta - (1/\zeta)}{\zeta + (1/\zeta)} = c$$

或

$$\zeta = \sqrt{\frac{1+ic}{1-ic}};$$

仅当 $c \neq \pm i$ 时，存在有限值 $\zeta \neq 0$; 因此，当 c 既不等于 i 又不等于 $-i$ 时，$\tan z = c$ 有唯一解.

7. 若 $z = x + iy$, 当 $x = n\pi$ 或 $y = 0$ 时 $\cos z$ 是实的，而当 $x = n\pi + \dfrac{\pi}{2}$ 或 $y = 0$ 时 $\sin z = 0$(其中 n 是整数).

8. (a) $r = 1$(当 $|z| > 1$ 时各项趋于 ∞; 当 $|z| < 1$ 时与几何级数比较).

(b) $r = 0$.

(c) $r = 1$.

9. (a) 在上半圆上积分 $e^{iz}/(1+z^4)$:

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{4}e^{-\sqrt{2}/2}\left(\sin\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

(b) 在上半圆上积分 $z^2e^{iz}/(1+z^4)$:

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{4}e^{-\sqrt{2}/2}\left(\cos\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

(c) 在上半圆上积分 $e^{iz}/(q^2+z^2)$:

$$\frac{\pi}{2q}e^{-q}$$

(d) 以原点为中心的大圆周和沿正实轴的割痕围成一个区域，在此区域上积分

$$x^{a-1}/[(x+1)(x+2)] : \frac{\pi(2^{a-1}-1)}{\sin \pi a}.$$

10. (a) $+2\pi i$ 在 $z=2n\pi$, $-2\pi i$ 在 $z=(2n+1)\pi$,

(b) $+2\pi i$ 在 $z=2n\pi+3\pi/2$, $-2\pi i$ 在 $z=2n\pi+\pi/2$,

(c) 应用函数方程 $\Gamma(z)=\Gamma(z+\nu+1)/z(z+1)\cdots(z+\nu)$;

$$\frac{(-1)^n}{n!}2\pi i \text{ 在 } z=-n.$$

(d) $2\pi i$ 在 $z=n\pi i$.

11.

$$\begin{aligned}|\sinh(x+iy)|^2 &= \left(\frac{e^{x+iy}-e^{-x-iy}}{2}\right)\left(\frac{e^{x-iy}-e^{-x+iy}}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}(\cosh 2x-\cos 2y)\\ &\geq \frac{1}{2}(\cosh 2x-1).\end{aligned}$$

沿着以 $x=\pm\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)$ 和 $y=\pm\left(n+\frac{1}{2}\right)$ 为边的矩形的边界积分，其中 n 是整数，当 $n\to\infty$ 时，此积分趋向于 0; 因此，留数的和趋向于零.

12. $\dfrac{\cos\pi t}{t-z}=\dfrac{\cot\pi t}{t}+\dfrac{z\cot\pi t}{t(t-z)}$;

$\cot\pi t$ 在矩形 c_n 上有界，而 $(\cot\pi t)/t$ 在此矩形这一对边和另一对边上的积分几乎抵消了；因此，

$$\lim_{n\to\infty}\int_{C_n}\frac{\cot\pi t}{t-z}dt=\lim_{n\to\infty}\int_{C_n}\frac{z\cot\pi t}{t(t-z)}dt=0.$$

如果我们将大小相等符号相反的极点的留数放在一起，则留数的和收敛，从而我们得到

$$\cot\pi x=\frac{2x}{\pi}\left(\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x^2-1^2}+\frac{1}{x^2-2^2}+\cdots\right)$$

(参看第一卷，第 678 页).

13. $\dfrac{1}{1+t}=1-t+t^2-\cdots\pm t^{n-1}+(-1)^n\dfrac{t^n}{1+t}$.

因此,

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots \pm \frac{z^n}{n} + R_n,$$

其中

$$R_n = (-1)^n \int_0^z \frac{t^n}{1+t} dt.$$

如果我们令 $z = e^{i\theta}$ 并取从 0 到 $e^{i\theta}$ 的直线作为积分路径, 当 $e^{i\theta} \neq -1$, 我们有

$$|R_n| = \left| \int_0^1 \frac{t^n}{1+e^{i\theta t}} dt \right| \leq \frac{1}{m} \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{m(n+1)}.$$

其中 m 是 $|1+e^{i\theta}t|$ 在 $0 \leq t \leq 1$ 的最小值. 因此, 如果 $z = e^{i\theta} \neq -1$, 则 R_n 趋近于 0.

14. 若 $x \neq 0$ 和 C' 是包含 y 而不包含 0 的围道, 并且如果 f 在此围道所界的区域内是正则的, 依照第 945 页, 则有

$$\frac{d^n}{dy^n} \frac{yf(y)}{(y-a)^{n+1}} = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C'} \frac{tf(t)}{(t+a)^{n+1}(t-y)^{n+1}} dt.$$

如果我们令 $a = y = \sqrt{x}$, 则后一个积分成为

$$\frac{n!}{2\pi i} \int_{C'} \frac{tf(t)}{(t^2-x)^{n+1}} dt.$$

因此, 如果我们作变换 $t^2 = \tau$, 此积分便成为

$$\frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\sqrt{\tau})}{(\tau - x)^{n+1}} d\tau,$$

其中 C 是包含 x 但不包含 0 的围道; 于是积分等于

$$\frac{1}{2} \frac{d^n}{dx^n} f(\sqrt{x}).$$

15. (a) $f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2\nu-1)^z} - \frac{1}{(2\nu)^z} \right);$

现在

$$\frac{1}{(2\nu-1)^z}-\frac{1}{(2\nu)^z}=z\int_{2\nu-1}^{2\nu}\frac{1}{y^{z+1}}dy$$

$$\leq\frac{|z|}{|(2\nu-1)^{z+1}|}=\frac{|z|}{(2\nu-1)^{1+x}}.$$

而当 $x>0$, 级数 $\sum_{\nu}1/(2\nu-1)^{1+x}$ 是绝对收敛的.

(b)

$$(1-2^{1-z})\zeta(z)=1+\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}+\frac{1}{4^z}+\cdots-\frac{2}{2^z}-\frac{2}{4^z}-\frac{2}{6^z}-\cdots$$

$$=1-\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}-\frac{1}{4^z}+\cdots=f(z).$$

(c)

$$\lim_{z\to1}(z-1)\zeta(z)=f(1)\cdot\lim_{z\to1}\frac{z-1}{1-2^{1-z}}$$

$$=\frac{f(1)}{g'(1)}=1,$$

其中

$$g(z)=1-2^{1-z}.$$

(O-1249.0101)
责任编辑：林　鹏　杨　波
封面设计：张　放

数学名著译丛



ISBN 7-03-008540-X/O·1249
定　价：35.00 元